गणित

कक्षा – 10

सत्र 2021–22

DIKSHA एप कैसे डाउनलोड करें?

विकल्प 1 : अपने मोबाइल ब्राउज़र पर diksha.gov.in/app टाइप करें।

विकल्प 2 : Google Play Store में DIKSHA NCTE ढूंढे एवं डाउनलोड बटन पर tap करें।

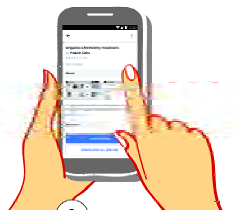
DIKSHA

मोबाइल पर QR कोड का उपयोग कर डिजिटल विषय वस्तु कैसे प्राप्त करें ?

DIKSHA App को लॉंच करे → **App** की समस्त अनुमति को स्वीकार करें → उपयोगकर्ता **Profile** का चयन करें।

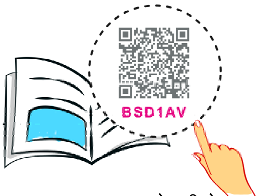
1 पाठ्यपुस्तक में QR Code को Scan करने के लिए मोबाइल में QR Code tap करें।

2 मोबाईल को QR Code पर केन्द्रित करें।

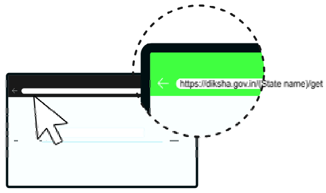


3 सफल Scan के पश्चात् QR Code से लिंक की गई सूची उपलब्ध होगी।

डेस्कटॉप पर QR Code का उपयोग कर डिजिटल विषय–वस्तु तक कैसे पहुँचे ?



1 QR Code के नीचे 6 अंक का Alpha Numeric Code दिया गया है।



2 ब्राउज़र में diksha. gov.in/cg टाईप करें।

3 सर्च बार पर 6 डिजिट का QR CODE टाईप करें।

4 प्राप्त विषय–वस्तु की सूची से चाही गई विषय–वस्तु पर क्लिक करें।

राज्य शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् छत्तीसगढ़, रायपुर

नि:शुल्क वितरण हेतु

प्रकाशन वर्ष : 2021

FV7C7Q

मार्गदर्शन : प्रो. हृदयकांत दीवान, अजीम प्रेमजी विश्वविद्यालय, बैंगलोर

सहयोग : विद्या भवन सोसायटी उदयपुर, अजीम प्रेमजी फाउण्डेशन

कार्यक्रम समन्वयक : डॉ. विद्यावती चन्द्राकर, सहायक प्राध्यापक, एस.सी.ई.आर.टी. छत्तीसगढ़, रायपुर

विषय–समन्वयक : डॉ. सुधीर श्रीवास्तव, सहायक प्राध्यापक, एस.सी.ई.आर.टी. छत्तीसगढ़, रायपुर

लेखन समूह : डॉ. सुधीर श्रीवास्तव, टी.के. गजपाल, नंदलाल शाह, डॉ. राघवेन्द्र कुमार गौराहा, हारेन्द्र सिंह भुवाल, सिरीश कुमार नन्दे, खान वकारूज्जमां खां, आरती माने, डॉ. रीतू श्रीवास्तव, तान्या सक्सेना, नेहा कश्यप, अनुपमा, रामकुमार साहू, बृजलाल पटेल, कमलेश, अरधेन्दु शेखर

आवरण पृष्ठ एवं ले–आउट डिजाइनिंग : रेखराज चौरागड़े

टंकण : हारेन्द्र सिंह भुवाल, आरती माने, डॉ. रीतू श्रीवास्तव, रितेश दुबे, प्रसून सरकार, शंकर सिंह राठौर, पार्थसारथी भट्टाचार्य

चित्रांकन : प्रशान्त सोनी, विद्या भवन शिक्षा संदर्भ केन्द्र, उदयपुर

प्रकाशक

छत्तीसगढ़ पाठ्यपुस्तक निगम, रायपुर

मुद्रक

मुद्रित पुस्तकों की संख्या – ....

शिक्षकों के लिए दो शब्द...

पिछले साल आपने नवीं कक्षा में गणित की नई पाठ्यपुस्तक को पढ़ाया है। आपने उसकी विशेषताओं को अनुभव किया होगा। इस दौरान आपने बच्चों के आत्मविश्वास में अंतर देखा होगा। अब वे पहले से बेहतर तरीके से सवाल हल कर पा रहे होंगे। आपने यह ध्यान दिया होगा कि भले ही सभी विद्यार्थी सभी सवालों को हल न कर पाते रहे हों पर उनके सवाल पढ़ने, पढ़कर समझने की इच्छा और कोशिश करने के तरीकों में अंतर आया है। हम यह भी उम्मीद करते हैं कि अब वे गणित के विषय में समूह चर्चा में ज्यादा भाग लेते होंगे, एक दूसरे को ज्यादा सुनते होंगे एवं बेहतर ढंग से एक दूसरे की मदद करते होंगे।

हमें यह भी विश्वास है कि विद्यार्थियों के समूह कार्य के समय उनके कार्य का अवलोकन करते हुए आपने इस बात को अच्छी तरह समझा होगा कि वे क्या कर पा रहे हैं, क्या नहीं कर पा रहे हैं। इससे आपको उन क्षेत्रों को पहचानने में मदद मिली होगी जो विद्यार्थियों को मुश्किल लगती हैं और जहाँ उन्हें मदद और प्रोत्साहन की जरूरत पड़ती है।

दसवीं कक्षा में भी इन्हीं गतिविधियों पर खास जोर दिया गया है, जहाँ विद्यार्थी समूह चर्चा करेंगे, किताब पढ़कर समझेंगे, करके देखेंगे, सवाल हल करेंगे, खुद नए सवाल बनाएँगे।

गणित के तार्किक ढाँचे को समझना एवं कथनों को गणितीय ढंग से सिद्व करना, गणित सीखने–सिखाने का एक अहम् पहलू है। इस किताब में गणितीय कथनों को जाँचने के तरीके पर जोर दिया गया है ताकि विद्यार्थी गणितीय कथनों को ऐसे ही मान लेने के बजाए उन्हें पहले सिद्व करें, उसमें निहित तर्क को समझें, साथ ही जाँचने और सिद्व करने में अंतर भी जान सकें। अतः आप कक्षा में विद्यार्थियों को नए कथन लिखने उन्हें स्वयं सिद्व करने का ढंग ढूँढ़ने या पहले किए गए प्रमेयों को पढ़कर समझने एवं समझाने के अवसर दें।

माध्यमिक स्तर पर यह अपेक्षित है कि विद्यार्थी गणित की भाषा को पढ़ सके, उसके चिह्नों एवं प्रतीकों का सहजता से उपयोग करते हुए ढेर सारे नए गणितीय कथन लिख सके। इस किताब में ऐसे अवसर हैं जहाँ विद्यार्थी गणितीय कथनों को पढ़कर उससे निष्कर्ष निकालते हुए उस पर आधारित प्रश्नों का उत्तर खोजेंगे। इस बात को ध्यान में रखते हुए बहुत से नए प्रतीकों से अवगत कराया गया है और साथ ही व्यापकीकरण पर खास जोर दिया गया है। इसके पर्याप्त अभ्यास की आवश्यकता है।

कक्षा 10 में अवधारणात्मक और प्रक्रियात्मक ज्ञान को जोड़ने का प्रयत्न किया गया है। खास तौर से ज्यामितीय रचनाएँ, अनुपात–समानुपात, बैंकिंग–कराधान और निर्देशांक ज्यामिति आदि पाठों में लगातार अंकों के उपयोग तथा गणना करने की प्रक्रियाओं को ज्यादा से ज्यादा अर्थपूर्ण और उपयोगी बनाने का प्रयास किया गया है ताकि विद्यार्थी केवल सवाल हल करने की प्रक्रिया में न उलझकर सवालों में छिपी अवधारणाओं को सरलता और सहजता से सीख सकें और अन्तर्निहित कर उनका उपयोग जीवन में कर सकें।

आप इस किताब में ऐसे बहुत से अवसर पाएँगे जहाँ विद्यार्थी केवल सूत्रों को याद करके प्रश्नों का उत्तर नहीं निकालेंगे बल्कि सोचेंगे, विश्लेषण करेंगे, नया रास्ता ढूंढ़ेंगे। क्षेत्रमिति में ठोस आकृतियों के पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन की समझ बनाने के लिए जाल (Net) का उपयोग किया गया है जिससे विद्यार्थियों को स्वयं सूत्र खोजने में मदद मिलेगी। साथ ही इस पाठ में नवीं कक्षा से जोड़ते हुए घन और घनाभ के जाल को भी सम्मिलित किया है। आप कक्षा में विद्यार्थियों को विभिन्न ठोस आकृतियों के Net Diagrams को Visualize करने और बनाने के लिए प्रोत्साहित करें।

गणित में सम्पूर्ण समझ विकसित करने के लिए जरूरी है कि विद्यार्थी अलग–अलग पाठों में अवधारणाओं के बीच संबंध देख पाएँ, ताकि उनकी समझ एक विशेष अवधारणा तक सीमित न रहकर विस्तृत एवं व्यापक हो सके। इसमें आपको उनकी मदद करनी होगी तथा कक्षा में संवाद व चर्चा में भागीदारी को बढ़ाने का प्रयास करना होगा।

आप इन पाठों में इन सभी प्रयत्नों को देख पाएँगे जैसे दो चरों के रैखिक समीकरण में आलेख बनाने का उपयोग या समरूपता जाँचते समय अनुपात–समानुपात के उपयोग को रेखांकित किया गया है और भी ऐसे मौके है जिन्हें आप देख पाएँगे, कुछ नए आप और बना पाएँगे।

स्कूल शिक्षा विभाग एवं राज्य शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, छ.ग. द्वारा शिक्षकों एवं विद्यार्थियों में दक्षता संवर्धन हेतु अतिरिक्त पाठ्य संसाधन उपलब्ध कराने की दृष्टि से Energized Text Books एक अभिनव प्रयास है, जिसे ऑन लाईन एवं ऑफ लाईन (डाउनलोड करने के उपरांत) उपयोग किया जा सकता है। ETBs का प्रमुख उद्देश्य पाठ्यवस्तु के अतिरिक्त ऑडियो–वीडियो, एनीमेशन फॉरमेट में अधिगम सामग्री, संबंधित अभ्यास, प्रश्न एवं शिक्षकों के लिए संदर्भ सामग्री प्रदान करना है।

उम्मीद है आपको और बच्चों को इस किताब को पढ़ने, दी गई गतिविधियों और सवालों को करने में मजा आएगा। आप अपने अनुभव हमसे बाँटते रहे, किताब के सवाल बदलते रहें। यह उनकी जीवंतता को बनाए रखने के लिए जरूरी है, अतः आप जो भी नए सवाल बनाकर करवाएँ, उन्हें हमें भी भेजें, ताकि वे पाठ्यपुस्तक के अगले संस्करण में शामिल हो सकें। आपके सुझाव व प्रश्न पाठ्यपुस्तक को बेहतर बनाने में मदद करेंगे।

संचालक

राज्य शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्

छत्तीसगढ़, रायपुर

पाठ्यक्रम

बाह्य मूल्यांकन – 75 अंक, कक्षा – 10 ,विषय – गणित, आंतरिक मूल्यांकन – 25 अंक

इकाई–1 बीजगणित

अध्याय – 1 बहुपद

बहुपदों का भाग, शेषफल प्रमेय, गुणनखण्ड प्रमेय, बहुपदों का गुणनखण्डन करना, $ax^2 \quad bx \quad c$ के रूप में बहुपद के मध्यपद को तोड़कर गुणनखण्डन करना, द्विघाती बहुपद के मान व शून्यक ,द्विघाती बहुपद के गुणांक व शून्यक में संबंध।

अध्याय – 2 दो चरों का रैखिक समीकरण

कथनों से समीकरण बनाना, युगपद् समीकरण का हल–आलेखी विधि, विलोपन एवं प्रतिस्थापन विधि, अवलोकन से समीकरण निकाय के हलों के प्रकार ज्ञात करना, चरों के अज्ञात गुणांक का मान पता करना, समीकरण से कथन बनाना।

अध्याय – 3 एक चर का द्विघात समीकरण

द्विघात समीकरण,द्विघात समीकरण के मूल,मूलों की जाँच,द्विघात समीकरण के हल करने के तरीके–गुणनखण्डन करके,पूर्ण वर्ग बनाकर, सूत्र से हल करना। द्विघात समीकरण के विभेदक(विविक्तकर), मूलों की प्रकृति, द्विघात समीकरण के अचर गुणांक पता करना, द्विघात समीकरण के मूल एवं गुणांकों में संबंध, मूल ज्ञात होने पर द्विघात समीकरण बनाना।

अध्याय – 4 समान्तर श्रेढ़ी

समान्तर श्रेढ़ी,समान्तर श्रेढ़ी का nवाँ पद (व्यापक पद),दो राशियों का समान्तर माध्य,दो राशियों के बीच समान्तर श्रेढ़ी का निर्माण,समान्तर श्रेढ़ी के n पदों का योग।

अध्याय – 5 अनुपात एवं समानुपात

अनुपात,अनुपात का व्यावहारिक उपयोग,दो या अधिक भागों में बाँटना,किसी भी दिए अनुपात में किसी राशि को बाँटना,समानुपात,चतुर्थानुपाती,मध्यानुपाती,तृतीयानुपाती,सतत् अनुपात, K–नियम,व्युत्क्रमानुपात

इकाई–2 निर्देशांक ज्यामिति

अध्याय – 6 निर्देशांक ज्यामिति

कार्तीय निर्देशांक का परिचय,निर्देशांक समतल पर किसी बिन्दु का प्रदर्शन,दो बिन्दुओं के बीच की दूरी ज्ञात करना,अंतराल की ढाल(प्रवणता),रेखा की प्रवणता,अक्षों पर रेखा का अन्तःखण्ड,रेखा का समीकरण $y \quad mx \quad c$ के रूप में।

अध्याय – 7 आलेख

किन्हीं दो राशियों के बीच के संबंध को आलेख पर देखना,दो राशियों के मध्य संबंध को आलेख पर दर्शाना,विभिन्न परिस्थितियों में बने आलेखों को पढ़ना व निष्कर्ष निकालना।

इकाई–3 वाणिज्य गणित

अध्याय – 8 बैंकिंग एवं कराधान

बैंकिंग,आवर्ती जमा खाता पर ब्याज की गणना,सावधि जमा खाता पर ब्याज की गणना। आयकर क्या है? आयकर की गणना करना।

इकाई–4 त्रिकोणमिति

अध्याय – 9 त्रिकोणमिति समीकरण एवं सर्वसमिकाएँ

त्रिकोणमितीय अनुपातों के बीच संबंध,सभी त्रिकोणमितीय अनुपातों को किसी भी एक त्रिकोणमितीय अनुपात में व्यक्त करना। त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ,समीकरण व उनके हल,पूरक कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात।

अध्याय – 10 ऊँचाई एवं दूरी

उन्नयन कोण,अवनमन कोण, ऊँचाई एवं दूरी पर आधारित प्रश्न

इकाई–5 ज्यामिति

अध्याय – 11 ज्यामितीय आकृतियों में समरूपता

स्केलिंग, विभिन्न ज्यामितीय आकृतियों(आयत,वर्ग,वृत्त,त्रिभुज) में समरूपता की जाँच,समरूपता पर आधारित प्रमेय(प्रमेय 1 से 8 तक)

अध्याय – 12 वृत्त एवं स्पर्श रेखाएँ

जीवा, चाप,वृत्तखंड,त्रिज्यखंड,सर्वांगसम वृत्त,वृत्त के केन्द्र से जीवा पर लंब, वृत्त पर आधारित प्रमेय(प्रमेय 1से10तक),वृत्त की स्पर्शरेखा एवं छेदक रेखा तथा उन पर आधारित प्रमेय(प्रमेय 11 से 14तक)

अध्याय – 13 ज्यामितीय रचनाएँ

समरूप बहुभुज की रचना,समरूप चतुर्भुज की रचना,अंतर्गत वृत्त की रचना,परिगत वृत्त की रचना।

इकाई–6 गणितीय कथनों की जाँच

अध्याय – 14 गणितीय कथनों की जाँच

गणितीय कथनों को सिद्ध करने के आधार(परिभाषा,पूर्व ज्ञात प्रमेय,अभिगृहीत),निगमनिक तर्कण द्वारा सिद्ध करना, कथनों को सिद्ध करने में गणितीय भाषा का उपयोग,गणितीय कथनों को सिद्ध करने के तरीके।

इकाई–7 क्षेत्रमिति

अध्याय – 15 ठोस आकृतियों का पृष्ठीय क्षेत्रफल एवं आयतन

घन एवं घनाभ का पृष्ठीय जाल,घन एवं घनाभ के विकर्ण(पृष्ठीय एवं आकाशीय),बेलन का पृष्ठीय क्षेत्रफल एवं आयतन ,शंकु का पृष्ठीय क्षेत्रफल एवं आयतन,गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल एवं आयतन।

इकाई–8 सांख्यिकी

अध्याय – 16 आँकड़ों का विश्लेषण

आलेखों द्वारा प्रदर्शित आँकड़ों का विश्लेषण,अंकगणितीय औसत,माध्यिका,बहुलक और इनके उपयोग की समझ,अंतर्वेशन एवं बहिर्वेशन।

विषय-सूची

इकाई	इकाई का नाम	अध्याय	पृष्ठ क्र.
1.	**बीजगणित** (Algebra) DRVH9C	1. बहुपद (Polynomials) 2. दो चरों का रैखिक समीकरण (Linear Equations in Two Variables) 3. एक चर का द्विघात समीकरण (Quadratic Equations in One Variable) 4. समांतर श्रेढ़ी (Arithmetic Progression) 5. अनुपात एवं समानुपात (Ratio and Proportion)	01–28 29–66 67–100 101–128 129–148
2.	**निर्देशांक ज्यामिति** (Co-Ordinate Geometry)	6. निर्देशांक ज्यामिति (Co-Ordinate Geometry) 7. आलेख (Graph)	149–172 173–188
3.	**वाणिज्य गणित** (Commercial Mathematics)	8. बैंकिंग एवं कराधान (Banking and Taxation)	189–204
4.	**त्रिकोणमिति** (Trigonometry)	9. त्रिकोणमितीय समीकरण एवं सर्वसमिकाएँ (Trigonometric Equations and Identities) 10. ऊँचाई एवं दूरीः त्रिकोणमितीय अनुप्रयोग (Height and Distance:Trigonometrical Applications)	205–226 227–240
5.	**ज्यामिति** (Geometry)	11. ज्यामितीय आकृतियों में समरूपता (Similarity in Geometrical Shapes) 12. वृत्त एवं स्पर्श रेखाएँ (Circle and Tangents) 13. ज्यामितीय रचनाएँ (Geometrical Constructions)	241–268 269–308 309–328
6.	**गणितीय कथनों की जाँच** (Proof of Mathematical statements)	14. गणितीय कथनों की जाँच (Proof of Mathematical Statements)	329–346
7.	**क्षेत्रमिति** (Mensuration)	15. ठोस आकृतियों का पृष्ठीय क्षेत्रफल एवं आयतन (Surface Area And Volume of Solids)	347–372
8.	**सांख्यिकी** (Statistics)	16. आँकड़ों का विश्लेषण (Data Analysis)	373–406

अध्याय 01

बहुपद

E49QPH

व्यंजकों $2x \quad 3$, $3x^2 \quad 7x \quad 2$, $x^2 \quad \frac{1}{2}x \quad 3$, $y^3 \quad \sqrt{2}y^2 \quad 3y \quad 7$ में प्रत्येक में अक्षर संख्या (चर) की घात पूर्ण संख्या है। इस प्रकार के व्यंजक बहुपद होते हैं। बहुपदों पर संक्रियाएँ जोड़ना, घटाना और गुणा करना आपने कक्षा 9 में सीखा है। बहुपदों के जोड़ने, घटाने और गुणा करने के उन तरीकों को एक बार फिर देखते हैं।

1. $x+3$ व $x+4$ को जोड़िए।

हलः– $(x+3)$ व $(x+4)$ का जोड़ अर्थात $(x+3) + (x+4)$

$$= x+3+x+4$$
$$= (x+x)+(3+4)$$
$$= 2x \quad 7$$

2. बहुपद $2x^2 \quad 3x \quad 5$ में $x^2 \quad x \quad 2$ को घटाइए।

हलः– $2x^2 \quad 3x \quad 5$ में $x^2 \quad x \quad 2$ को घटाना अर्थात $2x^2 \quad 3x \quad 5 \qquad x^2 \quad x \quad 2$

$$2x^2 \quad 3x \quad 5 \quad x^2 \quad x \quad 2$$
$$2x^2 \quad x^2 \qquad 3x \quad x \qquad 5 \quad 2$$
$$x^2 \quad 2x \quad 7$$

3. $x \quad 5$ में $x \quad 7$ का गुणा कीजिए।

हलः– $x \quad 5$ को $x \quad 7$ से गुणा अर्थात $x \quad 5 \quad x \quad 7$

$$x \ x \quad 7 \qquad 5 \ x \quad 7$$
$$= x^2 - 2x - 35$$

करके देखें

1. बहुपदों $2x - 7$ व $5x + 9$ को जोड़िए।
2. बहुपद $3x^2 + 2x - 3$ में से $x^2 + 3x - 4$ को घटाइए।
3. बहुपदों $x^2 + 2x - 3$ व $x^2 + x - 2$ को गुणा कीजिए।

क्या बहुपदों का भाग भी कर सकते हैं?

ध्यान दें कि जोड़ने व घटाने में एक घात वाले पद साथ रखे जाते हैं। गुणा में पदों की घातें जुड़ जाती हैं। अतः बहुपदों में जोड़ना, घटाना व गुणा सब हमने किया है और देखा है कि यह कैसे होता है। क्या जिस तरह बहुपदों का जोड़ना, घटाना और गुणा होता है, हम बहुपदों का भाग भी कर सकते हैं?

भाग करते समय पदों व उनकी घात का हिसाब कैसे रखेंगे? यह सब सोचने से पहले यह देखें कि आखिर बहुपदों के भाग की आवश्यकता कब होती है?

नीचे की परिस्थितियों को देखें।

1. एक कार 4 घंटे में x किमी. दूरी तय करती है। कार की चाल ज्ञात कीजिए।

हलः– कार द्वारा तय की गई कुल दूरी $= x$ किमी.

तथा इस दूरी को तय करने में लगा समय $= 4$ घंटे

$$\because \quad \text{चाल} = \frac{\text{दूरी}}{\text{समय}}$$

$$\text{चाल} = \frac{x}{4} \text{ किमी./घंटे}$$

यह भाग सरल है क्योंकि एक पद वाले बहुपद का एक पद वाले स्थिरांक बहुपद से भाग है।

2. यदि किसी आयत का क्षेत्रफल $40x^2$ वर्गमीटर है तथा उसकी एक भुजा की लंबाई $10x$ मीटर है तब आयत की चौड़ाई क्या होगी?

हलः– आयत का क्षेत्रफल $= 40x^2$ वर्गमीटर

आयत की लंबाई $= 10x$ मीटर

$\because$ आयत का क्षेत्रफल = लंबाई   चौड़ाई

$40x^2 = 10x$ चौड़ाई

$$\text{चौड़ाई} = \frac{40x^2}{10x}$$

$$= \frac{4 \quad 10 \quad x \quad x}{10x}$$

$$= 4x \text{ मीटर}$$

यहाँ भाजक व भाज्य दोनों एक पदीय हैं और इससे भागफल भी एक पदीय ही है।

अब हम एक द्विपदीय बहुपद को एकपदीय बहुपद से भाग करते हैं।

3.बहुपद $18x^2 \quad 9x$ को $3x$ से भाग दीजिए।

हलः— $18x^2 \quad 9x$ को $3x$ से भाग करने के लिए हम इसे निम्नलिखित रूप में लिख सकते हैं—

$$\frac{18x^2}{3x} \quad \frac{9x}{3x}$$

$$6x \quad 3$$

करके देखें

1. $2x^3 \quad 12x \quad 6$ को $2x$ से भाग दीजिए।
2. एक बस 5 घंटे में y किमी. दूरी तय करती है। बस की चाल ज्ञात कीजिए।
3. एक आयताकार बगीचे का क्षेत्रफल $65x^2$ वर्गमीटर है तथा उस बगीचे की चौड़ाई $5x$ मीटर है। तब बगीचे की लंबाई ज्ञात कीजिए।
4. $4x^2 \quad 4$ वर्ग इकाई क्षेत्रफल वाले समकोण त्रिभुज की आधार भुजा की लंबाई $2x$ इकाई है। तब त्रिभुज के शीर्षलंब की लंबाई ज्ञात कीजिए।

ऊपर के उदाहरण में भाग की जो प्रक्रिया हमने की है इसका उपयोग हम व्यावहारिक संदर्भों के प्रश्नों को हल करने में भी करते हैं। इसके कुछ उदाहरण देखते हैं —

उदाहरणः—1. $8x$ इकाई लंबाई का एक रेखाखण्ड AB है जिसे दो बराबर भागों में बाँटना है तब आप यह कैसे बताएँगे कि इसके प्रत्येक भाग की लंबाई कितनी है?

हलः— माना दिए गए रेखाखण्ड AB पर C कोई बिन्दु है जो AB को दो बराबर भागों में बाँटता है।

इसे हम निम्नलिखित रूप में लिख सकते हैं—

$$AB \quad AC \quad BC$$

अब चूँकि C, रेखाखण्ड AB को दो बराबर भागों में बाँटता है।

अतः $AC \quad BC$

$$AB \quad AC \quad AC$$

$8x \quad 2AC$

या $\quad AC \quad \dfrac{8x}{2}$

$AC \quad \dfrac{2 \quad 4x}{2}$

$AC \quad 4x$

अर्थात रेखाखण्ड के दोनों बराबर भागों की लंबाई $4x$ इकाई है।

अधिक पद वाले बहुपदों में भाग

कई पद वाले बहुपद को एकपदीय बहुपद से भाग करने में हम हर पद को अलग–अलग कर सकते हैं।

बहुपद $18x^2 \quad 9x$ को गुणनखण्डन करते हुए $3x$ से भाग दीजिए।

$18x^2 \quad 9x$ को $3x$ से भाग करने के लिए हम इसे निम्नलिखित रूप में लिख सकते हैं–

$$\frac{18x^2 \quad 9x}{3x}$$

$$\frac{9 \quad 2 \quad x \quad x \quad 9 \quad x}{3x}$$

$$\frac{9x \;\, 2x \quad 1}{3x}$$

$$3 \;\, 2x \quad 1$$

$$6x \quad 3$$

एक और देखें ;

बहुपद $4x^4 \quad 12x^3 \quad 8x^2$ का गुणनखण्डन करके $4x^2$ से भाग दीजिए।

$4x^4 \quad 12x^3 \quad 8x^2$ को $4x^2$ से भाग करने के लिए हम इसे निम्नलिखित रूप में लिख सकते हैं–

$$\frac{4x^4 \quad 12x^3 \quad 8x^2}{4x^2}$$

$$\frac{4x^2 \quad x^2 \quad 3x \;\, 4x^2 \quad 2 \quad 4x^2}{4x^2}$$

$$\frac{4x^2 \;\, x^2 \quad 3x \quad 2}{4x^2}$$

$$x^2 \quad 3x \quad 2$$

गुणनखण्डन करके बहुपदों का भाग करना

अब हम गुणनखण्डन करते हुए बहुपदों का भाग करना सीखेंगे।

यदि बहुपद $2x^2 \quad 5x \quad 3$ को बहुपद $x \quad 2$ से भाग करना हो तब क्या हम ऊपर के उदाहरणों के तरीकों को अपना सकते हैं?

$2x^2 \quad 5x \quad 3$ को $x \quad 2$ से भाग देने का अर्थ है कि इसे हम निम्नलिखित रूप में लिख सकते हैं –

$$\frac{2x^2 \quad 5x \quad 3}{x \quad 2}$$

लेकिन यहाँ अंश एवं हर के बहुपदों में कोई समान गुणनखण्ड हम नहीं पहचान पा रहे हैं और हम इसका भागफल नहीं पता कर पा रहे हैं। ऐसी परिस्थितियों में हम भाग की दीर्घ भाजन विधि का उपयोग कर सकते हैं।

अंकगणित में आप जानते हैं कि 25 को 4 से भाग करने का अर्थ है–

$\frac{25}{4}$ अर्थात

$$\begin{array}{r|c|l} & \text{भाज्य} & \\ \text{भाजक } 4 & 25 & 6 \text{ भागफल} \\ & \underline{24} & \\ & 1 & \\ & \text{शेषफल} & \end{array}$$

यहाँ $25 \quad 4 \quad 6 \quad 1$

अर्थात भाज्य = भाजक x भागफल + शेषफल

इसी तरह भाजक से भाज्य को भाग करने हमें भागफल व शेषफल मिलेगा। अगर भाग पूरा–पूरा हो जाए तो शेषफल शून्य भी हो सकता है।

उदाहरण:–2. बहुपद $2x^2 \quad 5x \quad 3$ को बहुपद $x \quad 2$ से भाग कीजिए।

हलः– यहाँ बहुपद $2x^2 \quad 5x \quad 3$ भाज्य और $x \quad 2$ भाजक है।

$$\begin{array}{c|r|c} & \text{भाज्य} & \\ \text{भाजक} & 2x^2 \quad 5x \quad 3 & \text{भागफल} \\ x \quad 2 & 2x^2 \quad 4x \quad\;\; & 2x \quad 9 \\ \hline & 9x \quad 3 & \\ & 9x \quad 18 & \\ \hline & 15 & \\ & \text{शेषफल} & \end{array}$$

यहाँ हमें भागफल $2x + 9$ और शेषफल 15 मिला।

यानी यहाँ बहुपद को भाग देने के लिए निम्नलिखित चरणों में काम करते हैं–

चरण :–1. भाज्य एवं भाजक को उनकी घातों के अवरोही क्रम में लिखेंगे।

चरण :–2. भाज्य के पहले पद को भाजक के पहले पद से भाग देंगे।

यहाँ $\frac{2x^2}{x} \quad 2x$

यह भागफल का पहला पद होगा।

चरण :–3. इस भागफल से भाजक का गुणा करेंगे और गुणनफल को भाज्य में घटाएँगे –

$$x \quad 2 \; 2x \quad 2x^2 \quad 4x$$

$$\begin{array}{r} 2x^2 \quad 5x \quad 3 \\ 2x^2 \quad 4x \\ \hline 9x \quad 3 \end{array}$$

चरण :–4. घटाने पर प्राप्त परिणाम के प्रथम पद को भाजक के प्रथम पद से भाग करेंगे।

अर्थात $\frac{9x}{x} \quad 9$ यह भागफल का दूसरा पद होगा।

चरण :–5. पुनः इस भागफल से भाजक का गुणा करेंगे।

अर्थात $9 \quad x \quad 2 \quad 9x \quad 18$

अब $9x \quad 3$ में से $9x \quad 18$ को घटाएँगे

$$\begin{array}{l} 9x \quad 3 \\ 9x \quad 18 \end{array} \qquad \text{या} \qquad \begin{array}{r} 9x \quad 3 \\ 9x \quad 18 \\ \hline 15 \end{array}$$

यह प्रक्रिया तब तक दोहराते हैं जब तक कि शेषफल शून्य न हो जाए या शेषफल के चर की घात भाजक के चर की घात से कम न हो जाए। इस उदाहरण में शेषफल 15 है जिसमें चर की घात, भाजक $x \quad 2$ के चर की घात से कम है।

इस भाग का संक्षिप्त प्रतिरूपण है।

$$2x^2 \quad 5x \quad 3 \qquad x \quad 2 \quad 2x \quad 9 \qquad 15$$

अर्थात भाज्य = भाजक x भागफल + शेषफल

उदाहरण:–3. बहुपद $5x \quad 11 \quad 12x^2 \quad 2x^3$ को बहुपद $x \quad 5$ से भाग दीजिए।

हलः– यहाँ भाज्य $5x \quad 11 \quad 12x^2 \quad 2x^3$ व भाजक $x \quad 5$ है।

भाजक में x की घात अवरोही क्रम में है तथा भाज्य को हमें x की घातों के अवरोही क्रम में लिखना होगा।

घातों के अवरोही क्रम में लिखने पर भाज्य $2x^3 \quad 12x^2 \quad 5x \quad 11$ होगा।

अब

$$
\begin{array}{r|r|l}
x \quad 5 & 2x^3 \quad 12x^2 \quad 5x \quad 11 & 2x^2 \quad 2x \quad 5 \\
 & 2x^3 \quad 10x^2 \qquad\qquad & \\
\hline
 & 2x^2 \quad 5x \quad 11 & \\
 & 2x^2 \quad 10x \qquad & \\
\hline
 & 5x \quad 11 & \\
 & 5x \quad 25 & \\
\hline
 & 36 &
\end{array}
$$

i gy s $2x^3$ के लिए भागफल में $2x^2$ लेंगे

अब $-2x^2$ के लिए $-2x$ लेंगे

और $-5x$ के लिए -5 लेंगे

अब भाग नहीं कर सकते। यह शेषफल है।

यहाँ भागफल $2x^2 \quad 2x \quad 5$

शेषफल 36

उदाहरणः–4. बहुपद $2x^3 \quad 3x^2 \quad x \quad 3$ को बहुपद $2x^2 \quad 4x \quad 3$ से भाग दीजिए।

हलः– यहाँ $2x^3 \quad 3x^2 \quad x \quad 3$ भाज्य और $2x^2 \quad 4x \quad 3$ भाजक है।

अब

$$
\begin{array}{r|r|l}
2x^2 \quad 4x \quad 3 & 2x^3 \quad 3x^2 \quad x \quad 3 & x \quad \frac{1}{2} \\
 & 2x^3 \quad 4x^2 \quad 3x \qquad & \\
\hline
 & x^2 \quad 4x \quad 3 & \\
 & x^2 \quad 2x \quad \frac{3}{2} & \\
\hline
 & 2x \quad 3 \quad \frac{3}{2} &
\end{array}
$$

$$2x \quad \frac{3}{2}$$

> शेषफल की घात भाज्य एवं भाजक की घात से कम होती है।

यहाँ भागफल $x \quad \frac{1}{2}$ तथा शेषफल $2x \quad \frac{3}{2}$

उदाहरणः–5. बहुपद $2x^3 \quad 4x \quad 3$ को बहुपद $x \quad 2$ से भाग कीजिए।

हलः– यहाँ भाज्य $2x^3 \quad 4x \quad 3$ है जिसे हम $2x^3 \quad 0.x^2 \quad 4x \quad 3$ लिख सकते हैं व भाजक $x \quad 2$ है।

अब

$$x \quad 2 \;\Big|\; \begin{array}{l} 2x^3 \quad 0.x^2 \quad 4x \quad 3 \\ 2x^3 \quad 4x^2 \\ \hline \qquad 4x^2 \quad 4x \quad 3 \\ \qquad 4x^2 \quad 8x \\ \hline \qquad\qquad 12x \quad 3 \\ \qquad\qquad 12x \quad 24 \\ \hline \qquad\qquad\qquad 21 \end{array} \;\Big|\; 2x^2 \quad 4x \quad 12$$

भागफल एवं शेषफल भी बहुपद होते हैं।

भागफल $= 2x^2 \quad 4x \quad 12$

शेषफल $= 21$

उदाहरणः–6. यदि भाजक $3x \quad 1$, भागफल $2x \quad 1$, शेषफल 4 हो तब भाज्य ज्ञात कीजिए।

हलः– $\because$ भाज्य = भाजक भागफल + शेषफल

$3x \quad 1 \quad 2x \quad 1 \quad 4$

$3x \; 2x \quad 1 \quad 1 \; 2x \quad 1 \quad 4$

$6x^2 \quad 3x \quad 2x \quad 1 \quad 4$

भाज्य $6x^2 \quad x \quad 3$

उदाहरणः–7. सिद्ध कीजिए कि बहुपद $2x^3 \quad x^2 \quad 5x \quad 2$ को $x \quad 2$ से भाग करने पर शेषफल शून्य है।

हलः–

$$x \quad 2 \;\Big|\; \begin{array}{l} 2x^3 \quad x^2 \quad 5x \quad 2 \\ 2x^3 \quad 4x^2 \\ \hline \qquad 3x^2 \quad 5x \quad 2 \\ \qquad 3x^2 \quad 6x \\ \hline \qquad\qquad x \quad 2 \\ \qquad\qquad x \quad 2 \\ \hline \qquad\qquad\quad 0 \end{array} \;\Big|\; 2x^2 \quad 3x \quad 1$$

स्पष्टतः शेषफल शून्य है ।

करके देखें :

बहुपद $x^2 \quad 2xy \quad y^2$ को गुणनखण्ड के रूप में लिखिए तथा $x \quad y$ से भाग दीजिए।

उदाहरण:–8. बहुपद $a^3 \quad 3a^2b \quad 3ab^2 \quad b^3$ को बहुपद $a \quad b$ से भाग दीजिए।

हल:– यहाँ भाज्य $a^3 \quad 3a^2b \quad 3ab^2 \quad b^3$ तथा भाजक $a \quad b$

$$
\begin{array}{r|l|l}
a \quad b & a^3 \quad 3a^2b \quad 3ab^2 \quad b^3 & a^2 \quad 2ab \quad b^2 \\
 & a^3 \quad a^2b & \\
 & (-) \quad (+) & \\
\hline
 & \quad 2a^2b \quad 3ab^2 \quad b^3 & \\
 & \quad 2a^2b \quad 2ab^2 & \\
 & \quad (+) \quad (-) & \\
\hline
 & \quad\quad ab^2 \quad b^3 & \\
 & \quad\quad ab^2 \quad b^3 & \\
 & \quad\quad (-) \quad (+) & \\
\hline
 & \quad\quad\quad 0 &
\end{array}
$$

प्रश्नावली 1

1. बहुपद $x^2 \quad x \quad 1$ को $x \quad 1$ से भाग देकर भागफल एवं शेषफल ज्ञात कीजिए।
2. बहुपद $6x^2 \quad 5x \quad 1$ को $2x \quad 1$ से भाग देकर भागफल एवं शेषफल ज्ञात कीजिए।
3. बहुपद $2y^3 \quad 4y^2 \quad 3y \quad 1$ को $y \quad 1$ से भाग देकर भागफल एवं शेषफल ज्ञात कीजिए।
4. बहुपद $x^5 \quad 5x \quad 3x^2 \quad 5x^3 \quad 3$ को $4x \quad x^2 \quad 2$ से भाग देकर भागफल एवं शेषफल ज्ञात कीजिए।
5. बहुपद $x^2 \quad 2xy \quad y^2$ को $x \quad y$ से भाग देकर भागफल एवं शेषफल ज्ञात कीजिए।
6. cgqn a को बहुपद $a \quad b$ से भाग दीजिए।
7. यदि भाजक $3x^2 \quad 2x \quad 2$, भागफल $x \quad 1$, शेषफल 3 है तब भाज्य बताइए।
8. यदि भाजक $4x \quad 7$, भागफल $x \quad 1$, शेषफल 0 है तब भाज्य बताइए।
9. सिद्ध कीजिए कि बहुपद $4x^3 \quad 3x^2 \quad 2x \quad 9$ को $x \quad 1$ से भाग करने पर शेषफल शून्य है।
10. जाँच कीजिए कि बहुपद $x^2 \quad 5x \quad 3$ को $x \quad 3$ से भाग करने पर शेषफल शून्य है अथवा नहीं ?
11. यदि किसी आयत का क्षेत्रफल $45x^2 \quad 30x$ वर्गमीटर तथा उसकी चौड़ाई $15x$ मीटर है तब लंबाई क्या होगी ?
12. $28x$ इकाई लंबाई का एक रेखाखण्ड AB है जिसे दो बराबर भागों में बाँटना है तब प्रत्येक भाग की लंबाई क्या होगी ?

(Remainder Theorem)

अब भाग के विभिन्न उदाहरणों का एक बार फिर अवलोकन करें। क्या आपको इनमें कोई खास बात दिखाई पड़ती है?

हम कह सकते हैं कि "यदि किसी बहुपद $f \;\; x$ को $x \;\; a$ से भाग दिया जाए तो शेषफल $f \;\; a$ होता है।" यही शेषफल प्रमेय है। $f \;\; a$ का अर्थ है $f \;\; x$ का मान जब $x \;\; a$ हो।

$\because$ भाज्य भाजक भागफल शेषफल

अब $f \;\; x \qquad x \;\; a \;\; q \;\; x \qquad r$

$x \;\; a$ के लिए $f \;\; x$ का मान निम्नलिखित होगा–

$$f \;\; a \qquad a \;\; a \;.q \;\; a \qquad r$$

$$f \;\; a \qquad 0.q \;\; a \qquad r$$

$$f \;\; a \qquad 0 \;\; r$$

या $f \;\; a \qquad r$

चूँकि हमने r को शेषफल कहा है इसलिए यहाँ शेषफल $f \;\; a$ हुआ।

हमने $f \;\; x$ को $x \;\; a$ से भाग किया और पाया कि शेषफल $f \;\; a$ है।

इसलिए हम कह सकते हैं कि यदि किसी बहुपद $f \;\; x$ को $x \;\; a$ से भाग दिया जाए तो शेषफल $f \;\; a$ होता है।

करके देखें

यदि $f \;\; x$ का भाजक $x \;\; a$ हो तब शेषफल ज्ञात कीजिए।

(i) $f(x) \;\; 2x \;\; a$ (ii) $f(x) \;\; x^2 \;\; a^2$ (iii) $f(x) \;\; x^2 \;\; 2x \;\; 1$

अब हम शेषफल प्रमेय का उपयोग करते हुए भाज्य और भाजक के मालूम होने पर बिना भाग किए ही शेषफल ज्ञात कर सकते हैं।

उदाहरण:–9. भाज्य $p \;\; x \qquad 3x^4 \;\; x^3 \;\; 30x \;\; 1$ को निम्नलिखित से भाग देने पर शेषफल ज्ञात कीजिए–

$a \qquad x \;\; 1 \qquad\qquad b \qquad 2x \;\; 1$

हल:– a भाज्य $p \;\; x \qquad 3x^4 \;\; x^3 \;\; 30x \;\; 1$

तथा भाजक $g \;\; x \qquad x \;\; 1$ है

तब शेषफल = ?

शेषफल प्रमेय से हमने जाना कि शेषफल $r \quad p \; a$ होता है जब भाग $x \quad a$ से करें।

$\because$ यहाँ भाजक $x \quad 1$ है इसलिए $r \quad p \quad 1$ होगा।

$p \; x$ में $x \quad 1$ रखने पर

शेषफल $\quad p \quad 1$

$3 \quad 1^{4} \quad 1^{3} \quad 30 \quad 1 \quad 1$

$3 \quad 1 \quad 30 \quad 1$

शेषफल $\quad 27$

> जब भाजक $x \quad a$ हो तब
> शेषफल $r \quad f \; a$ लेकिन
> जब भाजक $x \quad a$ हो तब
> शेषफल $r \quad f \quad a$ होता है।

b भाज्य $\quad p \; x \quad 3x^4 \quad x^3 \quad 30x \quad 1$

तथा भाजक $g \; x \quad 2x \quad 1$

तब शेषफल $\quad p \; a$

यहाँ $2x \quad 1$ को $2 \quad x \quad \frac{1}{2}$ लिखेंगे अब a के स्थान पर $\frac{1}{2}$ दिख रहा है।

अतः शेषफल $\quad p \quad \frac{1}{2}$

$$3 \quad \frac{1}{2}^{4} \quad \frac{1}{2}^{3} \quad 30 \quad \frac{1}{2} \quad 1$$

$$3 \quad \frac{1}{16} \quad \frac{1}{8} \quad 15 \quad 1$$

$$\frac{3}{16} \quad \frac{1}{8} \quad 14$$

$$\frac{3 \quad 2}{16} \quad 14$$

$$\frac{1}{16} \quad 14$$

शेषफल $\quad 14\frac{1}{16}$

उदाहरणः–10. यदि $p \; x \quad 2x^2 \quad 3x \quad 6$ को $g \; x \quad x \quad 2$ से भाग करना हो तो शेषफल प्रमेय की सहायता से शेषफल ज्ञात कीजिए।

हलः– यहाँ भाज्य $p \; x \quad 2x^2 \quad 3x \quad 6$

तथा भाजक $g \ x \quad x \ 2$

तब शेषफल प्रमेय से,

शेषफल $\quad r \quad p \ 2$

$$2 \ 2^2 \quad 3 \ 2 \quad 6$$

$$r \quad 8$$

उदाहरण:–11. जब किसी बहुपद $f \ x$ को $x^2 \quad 4$ से भाग दिया जाता है तब शेषफल $5x \quad 6$ होता है। यदि इसी बहुपद को $x \quad 2$ से भाग दिया जाए तब शेषफल क्या होगा?

हल:– यहाँ भाज्य $f \ x$ है और भाजक $x^2 \quad 4$ व $x \quad 2$ है। जब $f \ x$ को $x^2 \quad 4$ से भाग दिया जाता है तब शेषफल $5x \quad 6$ प्राप्त होता है। इसे हम निम्न रूप में लिख सकते हैं–

$\because$ भाज्य भाजक भागफल शेषफल

$$f(x) \quad (x^2 \quad 4) \quad q(x) \quad (5x \quad 6)$$

अब हमें मालूम है कि भाज्य और भाजक पता हो तब हम शेषफल प्रमेय की सहायता से शेषफल ज्ञात कर सकते हैं। चूँकि $f \ x$ का एक और भाजक $x \quad 2$ है।

अतः शेषफल प्रमेय से,

शेषफल $\quad f \ 2$

$$2^2 \quad 4 \quad q \ 2 \quad 5 \ 2 \quad 6$$

$$4 \quad 4 \quad q \ 2 \quad 10 \quad 6$$

$$0 \quad q \ 2 \quad 16$$

शेषफल $\quad 16$

अतः जब $f \ x$ को $x \quad 2$ से भाग दिया जाएगा तो शेषफल 16 प्राप्त होगा।

सोचें और चर्चा करें

1. उपरोक्त उदाहरण में दूसरे भाजक $x \quad 2$ के स्थान पर $x \quad 2$ होने पर भी क्या शेषफल ज्ञात किया जा सकता है? यदि हाँ तो शेषफल ज्ञात कीजिए।

2. उपरोक्त उदाहरण के दोनों भाजकों में क्या कोई खास संबंध दिखाई पड़ता है? साथियों की मदद से उस संबंध को पता करें। यदि दोनों भाजकों में कोई संबंध न हो तब भी क्या शेषफल ज्ञात किया जा सकता है? एक उदाहरण लेकर परिणाम जानने की कोशिश करें।

(The Factor Theorem)

जब किसी भाज्य बहुपद को दूसरे बहुपद से भाग कर रहे हों और शेषफल शून्य हो जाता हो तब इसके क्या मायने होते हैं? शेषफल के शून्य हो जाने से क्या भाज्य और भाजक में कोई नया संबंध दिखाई पड़ता है?

शेषफल के शून्य हो जाने पर भाज्य और भाजक के संबंध को हम पहले अंकगणित के एक उदाहरण से समझने का प्रयास करते हैं, फिर बहुपदों में इस संबंध को पता करेंगे।

25 को भाज्य और 5 को भाजक के रूप में लेकर देखते हैं कि भागफल और शेषफल क्या होंगे ?

भाज्य

भाजक 5 | 25 | 5 भागफल

25

0

शेषफल

∵ भाज्य भाजक भागफल शेषफल

25 5 5 0

25 5 5

इस संबंध को देखकर यह कह सकते हैं कि भाजक 5, भाज्य 25 का एक गुणनखण्ड है।

करके देखें

15 को 3 से भाग करके उपरोक्त रूप में लिखकर देखिए कि क्या इसमें भी इसी प्रकार का संबंध मिलता है?

क्या बहुपदों के भाग में भी इसी प्रकार के संबंध दिखाई पड़ते है आइए इन संबंधों को निम्नलिखित उदाहरण में देखते हैं।

उदाहरणः—12. यदि बहुपद x^2 16 को बहुपद x 4 से भाग दिया जाए तो भागफल और शेषफल क्या होंगे?

हलः—

भाज्य

भाजक भागफल

x 4 | x^2 0.x 16 | x 4

x^2 4x

4x 16

4x 16

0

शेषफल

स्पष्टतः भागफल $(x-4)$ और शेषफल 0 है।

अब इसे निम्नलिखित रूप में लिख लेते हैं–

$\because$ भाज्य = भाजक × भागफल + शेषफल

$x^2-16=(x+4)(x-4)+0$

उपरोक्त उदाहरण में हम देख सकते हैं कि $(x+4)$ व $(x-4)$ का गुणनफल x^2-16 आ रहा है। इसका अर्थ है कि यहाँ भाजक $(x+4)$, x^2-16 का एक गुणनखण्ड है। लेकिन ऐसा हम तभी कह सकते हैं जब शेषफल शून्य हो।

पता करें कि क्या $(x-4)$ को x^2-16 का एक गुणनखण्ड कह सकते हैं?

अब हम यह कह सकते हैं कि जब किसी भाजक से किसी भाज्य को भाग देने पर शेषफल शून्य प्राप्त हो तब वह भाजक, उस भाज्य का एक गुणनखण्ड होता है। इस कथन को गुणनखण्ड प्रमेय का सरल रूप कह सकते हैं। देखा जाए तो गुणनखण्ड प्रमेय, शेषफल प्रमेय का ही विस्तारित रूप है।

गुणनखण्ड प्रमेय की उपपत्ति :

यही कथन प्रमेय के रूप में निम्नलिखित ढंग से लिखा जाता है। अब इसे हम प्रमेय के रूप में लिखकर सिद्ध करेंगे।

प्रमेय : यदि $x=a$, बहुपद $f(x)$ का एक ऐसा शून्यक है जिसके लिए शेषफल $f(a)=0$ तब $(x-a)$, $f(x)$ का एक गुणनखण्ड होता है। अथवा

यदि बहुपद $f(x)$ को $(x-a)$ से भाग देने पर शेषफल $f(a)=0$ हो, तब $(x-a)$ $f(x)$ का एक गुणनखण्ड होता है।

उपपत्ति : भाज्य, भाजक, भागफल एवं शेषफल के संबंध को निम्नलिखित रूप में लिखा जाता है–

अर्थात $f(x)=g(x).q(x)+r(x)$

शेषफल प्रमेय से हमें मालूम है कि यदि $f(x)$ को $(x-a)$ से भाग दिया जाए तो शेषफल $f(a)$ होता है।

$\because$ भाज्य = भाजक × भागफल + शेषफल

अर्थात $f(x)=(x-a).q(x)+f(a)$

अब यदि शेषफल $f(a)=0$

तब $f(x)=(x-a).q(x)$

स्पष्टतः $(x-a)$, $f(x)$ का एक गुणनखण्ड हुआ।

> बहुपद $f(x)$ का मान x के जिस मान के लिए शून्य होता है वह मान ही शून्यक होता है।

इस प्रमेय का विलोम भी सत्य है यानी यदि कोई भाजक, किसी भाज्य का एक गुणनखण्ड है, तब शेषफल शून्य होता है।

विलोम : यदि $(x-a)$ बहुपद $f(x)$ का एक गुणनखण्ड है तब शेषफल शून्य होता है।

उपपत्ति : चूँकि $(x-a)$ बहुपद $f(x)$ का एक गुणनखण्ड है

अर्थात $x=a$, $f(x)$ का एक शून्यक है।

$f(x)=(x-a).q(x)$ में

$x=a$ रखने पर

$f(a)=(a-a).q(a)$

$f(a)=0$

स्पष्टतः $(x-a)$, बहुपद $f(x)$ का गुणनखण्ड हो तब शेषफल $f(a)$ शून्य होता है।

1. यदि किसी बहुपद के दो गुणनखण्ड $(x-a)$, $(x-b)$ हों तब
$f(x)=(x-a)(x-b).q(x)$

2. यदि किसी बहुपद के तीन गुणनखण्ड $(x-a)$, $(x-b)$, $(x-c)$ हों तब
$f(x)=(x-a)(x-b)(x-c).q(x)$

कोई भाजक, भाज्य बहुपद का गुणनखण्ड है अथवा नहीं यह हम भाग किए बिना ही गुणनखण्ड प्रमेय की मदद से बता सकते हैं। आगे दिए गए उदाहरणों में आप गुणनखण्ड प्रमेय की उपयोगिता को समझ सकेंगे।

उदाहरणः–13. क्या $(x-2)$, बहुपद $p(x)=x^3-3x^2+4x-4$ का एक गुणनखण्ड है?

हलः– यदि $(x-2)$, बहुपद $p(x)=x^3-3x^2+4x-4$ का एक गुणनखण्ड है तब $x=2$ रखने पर शेषफल शून्य होना चाहिए।

$p(x)$ में $x=2$ रखने पर

$$p(2)=(2)^3-3(2)^2+4(2)-4$$
$$=8-3\times4+8-4$$
$$=8-12+4$$
$$=12-12$$
$$p(2)=0$$

स्पष्टतः $p(2)=0$ अतः $(x-2)$; $p(x)$ का एक गुणनखण्ड है।

उदाहरणः–14 क्या $x \quad a$ बहुपद $p \; x \quad x^3 \quad ax^2 \quad 5x \quad 5a$ का एक गुणनखण्ड है?

हलः– बहुपद $p \; x \quad x^3 \quad ax^2 \quad 5x \quad 5a$ में $x \quad a$ रखने पर $p \; a \quad 0$ हो जाए तब हम $x \quad a$ को $p \; x$ का गुणनखण्ड कह सकते हैं।

$x \quad a$ रखने पर

$$p \; a \quad a^3 \quad a.a^2 \quad 5a \quad 5a$$

$$a^3 \quad a^3 \quad 0$$

$$p \; a \quad 0$$

स्पष्टतः $p \; a \quad 0$ अतः $x \quad a$ बहुपद $p \; x$ का एक गुणनखण्ड है।

उदाहरणः–15. यदि $x \quad 1$, $p \; x \quad x^2 \quad x \quad k$ का एक गुणनखण्ड है तब k का मान ज्ञात कीजिए।

हलः– चूँकि $x \quad 1$, $x^2 \quad x \quad k$ का एक गुणनखण्ड है। तब गुणनखण्ड प्रमेय के विलोम से कह सकते हैं कि $x \quad 1$ पर शेषफल $p \; 1$ शून्य होगा।

अतः $\quad p \; 1 \quad 0$

$$1^2 \quad 1 \quad k \quad 0$$

$$1 \quad 1 \quad k \quad 0$$

$$2 \quad k \quad 0$$

$$k \quad 2$$

प्रश्नावली 2

1. यदि $p \; x \quad x^3 \quad 3x^2 \quad 5x \quad 8$ को निम्नलिखित से भाग करें तो शेषफल प्रमेय की मदद से शेषफल ज्ञात कीजिए –

   (i) $x \quad 1$ (ii) $2x \quad 1$ (iii) $x \quad 2$ (iv) $x \quad 4$ (v) $x \quad \frac{1}{3}$

2. निम्नलिखित में जाँचिए कि क्या $g \; x$, $p \; x$ का एक गुणनखण्ड है?

   (i) $g \; x \quad x \quad 3$; $p \; x \quad x^3 \quad 4x^2 \quad x \quad 6$

   (ii) $g \; x \quad x \quad 1$; $p \; x \quad 2x^3 \quad x^2 \quad 2x \quad 1$

   (iii) $g \; x \quad x \quad 2$; $p \; x \quad x^4 \quad x^3 \quad x^2 \quad x \quad 2$

   (iv) $g \; x \quad x \quad 1$; $p \; x \quad x^3 \quad 5x^2 \quad 5x \quad 1$

   (v) $g \; x \quad x \quad 4$; $p \; x \quad x^2 \quad 2x \quad 1$

3. निम्नलिखित में a का मान ज्ञात कीजिए जबकि $g\ x$, $p\ x$ का एक गुणनखण्ड हो–

(i) $g\ x \quad x\ 1\ ;\ p\ x \quad x^2\ \ ax\ \ 2$

(ii) $g\ x \quad x\ 1\ ;\ p\ x \quad ax^2\ \ 5x\ \ 3$

(iii) $g\ x \quad x\ 2;\ p\ x \quad 2x^2\ \ 6x\ \ a$

(iv) यदि $g\ t$, $p\ t$ का एक गुणनखण्ड हो तो t का मान ज्ञात कीजिए–

$g\ t \quad t\ 3\ ;\ p\ t \quad t^2\ \ 2at\ \ 2a\ \ 3$

(v) यदि $g\ y$, $p\ y$ का एक गुणनखण्ड हो तो y का मान ज्ञात कीजिए–

$g\ y \quad y\ 5;\quad p\ y \quad y^2\ \ 2y\ \ a$

4. जब किसी बहुपद $f\ x$ को $x^2\ \ 9$ से भाग दिया जाता है तब $3x\ \ 2$ शेषफल है। जब इसी बहुपद को $x\ \ 3$ से भाग दिया जाए तब शेषफल क्या होगा?

5. जब किसी बहुपद $f\ x$ को $x^2\ \ 16$ से भाग दिया जाता है तब शेषफल $5x\ \ 3$ है। जब इसी बहुपद को $x\ \ 4$ से भाग दिया जाए तब शेषफल क्या होगा?

(Factoring Polynomials)

अभी तक हमने देखा कि किसी बहुपद को किसी अन्य बहुपद से भाग दिया जाता है तब शेषफल शून्य होने पर हम यह कह पाते हैं कि वह भाजक बहुपद, भाज्य बहुपद का गुणनखण्ड है। इससे हम बहुपद के गुणनखण्ड नहीं ढूँढ सकते तो हम उन बहुपदों तक कैसे पहुँचे जो किसी बहुपद के गुणनखण्ड हैं? हम बहुपदों के प्रकार के आधार पर उनके गुणनखण्ड प्राप्त करते हैं। हम यहाँ एकघातीय व द्विघातीय बहुपदों के गुणनखण्डन की चर्चा करेंगे।

किसी संख्या का गुणनखण्डन करने का अर्थ उसे ऐसे अभाज्य गुणनखण्डों में तोड़ना होता है, जिनका गुणा करने पर पुनः वही संख्या प्राप्त हो।

6 के गुणनखण्ड $2\ \ 3$ के बारे में विचार करते हैं।

6 को यहाँ 2 व 3 के अभाज्य गुणनखण्ड के रूप में लिखा गया है जिनका गुणनफल 6 है।

इसी प्रकार 12 को भी लिख सकते हैं –

$12\ \ 2\ \ 2\ \ 3$

इसी प्रकार जब हम किसी बहुपद के गुणनखण्डन की बात करते हैं तो उसका आशय होता है कि बहुपद को ऐसे सरल बहुपदों के रूप में तोड़कर लिखना जिन्हें गुणा करने पर फिर वही बहुपद मिल जाए।

बहुपदों के गुणनखण्डन करने के कुछ तरीके हैं जैसे हम कभी उभयनिष्ठ बहुपद पहचान कर गुणनखण्डन करते हैं तो कभी निम्नलिखित सर्वसमिकाओं के उपयोग से –

$a \quad b \;^{2} \quad a^2 \quad 2ab \quad b^2$

$a \quad b \;^{2} \quad a^2 \quad 2ab \quad b^2$

$a^2 \quad b^2 \quad\quad a \quad b \quad a \quad b$

,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,आदि, ।

उभयनिष्ठ बहुपद निकालकर गुणनखण्ड ज्ञात करना तभी संभव हो पाता है जबकि बहुपद के सभी पदों में वह बहुपद मौजूद हो। आगे के कुछ उदाहरणों में इसे समझा जा सकता है।

उदाहरणः–16. $12x \quad 4x^2$ का गुणनखण्डन कीजिए।

हलः– $12x \quad 4x^2 \quad 4 \quad 3 \quad x \quad 4 \quad x \quad x$ (यहाँ बहुपद $4x$ दोनों पदों में है)

$4x \; 3 \quad x$

उदाहरणः–17. $ab \quad ac \quad a^2$ का गुणनखण्डन कीजिए।

हलः– $ab \quad ac \quad a^2 \quad a(b \quad c \quad a)$ (a तीनों पदों में है)

$a \; a \quad b \quad c$

उदाहरणः–18. $2x^3 \quad 4x$ का गुणनखण्डन कीजिए।

हलः– $2x^3 \quad 4x \quad 2 \quad x \quad x^2 \quad 2 \quad 2 \quad x$

$2x \; x^2 \quad 2$

क्या आप $x^2 \quad 4$, $x^2 \quad 6x \quad 9$, $x^2 \quad 5x \quad 6$ के गुणनखण्डन में उभयनिष्ठ बहुपद पहचान कर गुणनखण्ड पता कर सकते हैं?

आइए कुछ बहुपद $x^2 \quad 4$, $x^2 \quad 6x \quad 9$, तथा $x^2 \quad 5x \quad 6$ को देखें। इनमें से प्रत्येक बहुपद के पदों को देखने से हमें पता चल रहा है कि इनके सभी पदों में कोई भी पद एक जैसे नहीं है। इस प्रकार के बहुपदों का उभयनिष्ठ बहुपद निकालकर गुणनखण्डन नहीं हो सकता। तो क्या करें? आइए देखें

$x^2 \quad 4$ का गुणनखण्ड निम्नलिखित होगा–

$x^2 \quad 4 \quad x^2 \quad 2^2$ $\because$ सर्वसमिका $a^2 \quad b^2 \quad (a \quad b)(a \quad b)$

$x \quad 2 \; (x \quad 2)$

क्या $x^2 \quad 6x \quad 9$ को किसी सर्वसमिका के रूप में लिख सकते हैं?

हाँ $x^2 \quad 6x \quad 9$ को $a \quad b \;^{2} \quad a^2 \quad 2ab \quad b^2$ सर्वसमिका के रूप में लिख सकते हैं।

$x^2 \quad 6x \quad 9 \quad x^2 \quad 2 \quad 3x \quad 3^2$

$x \quad 3^{\ 2}$

$x \quad 3 \quad x \quad 3$

करके देखें

1. $x^2 \quad 16$ का गुणनखण्डन कीजिए।
2. $4x^2 \quad 20x \quad 25$ का गुणनखण्डन कीजिए।

$ax^2 + bx + c$

पुनः हम $x^2 \quad 5x \quad 6$ के गुणनखण्डन पर विचार करते हैं। क्या किसी सर्वसमिका के रूप में इसे लिखकर इसका गुणनखण्डन कर सकते हैं?

आप देखेंगे कि इस बहुपद को हम किसी भी ज्ञात सर्वसमिका के रूप में नहीं दर्शा पा रहे हैं।

इस प्रकार के बहुपदों के गुणनखण्डन करने के लिए हमें उनके मध्यपद को दो ऐसे भागों में तोड़ने की जरूरत होती है जिनका योग तो मध्य पद के बराबर हो लेकिन उनका गुणनफल बहुपद के प्रथम व अंतिम पद के गुणनफल के बराबर हो।

अब हम $x^2 \quad 5x \quad 6$ का गुणनखण्डन करके देखते हैं।

$x^2 \quad 5x \quad 6 \quad x^2 \quad 2 \quad 3 \; x \quad 2 \quad 3$

$x^2 \quad 2x \quad 3x \quad 2 \quad 3$

$x^2 \quad 2x \qquad 3x \quad 2 \quad 3$

$x \; x \quad 2 \qquad 3 \; x \quad 2$

$x \quad 2 \quad x \quad 3$

इस तरीके को सीखने के लिए हम निम्नलिखित व्यंजक का उपयोग करते हैं :

$x \qquad x \qquad x^2 \qquad\qquad x$

$1.x^2 \qquad\qquad x$

x व x के गुणनफल के रूप में प्राप्त व्यंजक को $ax^2 \quad bx \quad c$ के रूप में लिख सकते हैं। तब हम देखते हैं कि यहाँ $a \quad 1,\ b$ व c है।

$ax^2 \quad bx \quad c$ के रूप के किसी बहुपद का गुणनखण्ड प्राप्त करने के के लिए प्रथम पद x^2 के गुणांक a व अंतिम पद c का गुणा करते हैं तथा प्राप्त गुणनफल के दो ऐसे गुणनखण्ड प्राप्त करते हैं जिनका योग मध्यपद x के गुणांक b के बराबर हो।

आइए इसे निम्नलिखित उदाहरण से समझते हैं –

उदाहरण:–19. बहुपद $x^2 \quad 3x \quad 2$ का गुणनखण्डन कीजिए।

हल:– बहुपद $x^2 \quad 3x \quad 2$ की तुलना $ax^2 \quad bx \quad c$ से करने पर

$a \quad 1, \; b \quad 3, \; c \quad 2$

अब चूँकि $a \quad c \quad 1 \quad 2 \quad 2$

2 के संभावित गुणनखण्ड निम्नलिखित हैः

$1 \quad 2 \;\big|\; 1 \quad 2$

अब इन गुणनखण्डों का योग देखते हैं $1 \quad 2 \quad 3$ लेकिन $1 \quad 2 \quad 3$ यानी $1 \quad 2$ ही 2 का ऐसा गुणनखण्ड है जिसका योग 3 है जो कि b के बराबर है।

अतः $x^2 \quad 3x \quad 2 \quad x^2 \quad 1 \quad 2 \; x \quad 1 \quad 2$

$x^2 \quad 1.x \quad 2.x \quad 1 \quad 2$

$x^2 \quad 1.x \quad 2.x \quad 1 \quad 2$

$x \; x \quad 1 \quad 2 \; x \quad 1$

$x \quad 1 \quad x \quad 2$ अभीष्ट गुणनखण्ड है।

उदाहरण:–20. बहुपद $6x^2 \quad 5x \quad 6$ का गुणनखण्डन कीजिए।

हल:– बहुपद $6x^2 \quad 5x \quad 6$ की तुलना $ax^2 \quad bx \quad c$ से करने पर

$a \quad 6, \; b \quad 5, \; c \quad 6$

अब चूँकि $a \quad c \quad 6 \quad 6 \quad 36$

–36 के संभावित गुणनखण्ड निम्नलिखित हैं :

1 36	1 36
2 18	2 18
3 12	3 12
4 9	$\boxed{4 \quad 9}$
6 6	6 6

स्पष्टतः ac 36 के उपरोक्त गुणनखण्डों में 4 (9) में 4 व 9 का योग 5 है जो मध्यपद b के बराबर है।

अतः $6x^2 \quad 5x \quad 6 \quad 6x^2 \quad 4 \quad 9 \; x \quad 6$

$$6x^2 \quad 4x \quad 9x \quad 6$$

$$6x^2 \quad 4x \quad 1 \; 9x \quad 6$$

$$2x \; 3x \quad 2 \quad 3 \; 3x \quad 2$$

$3x \quad 2 \quad 2x \quad 3$ अभीष्ट गुणनखण्ड है।

उदाहरणः—21. बहुपद $14x^2 \quad 19x \quad 3$ का गुणनखण्डन कीजिए।

हलः— बहुपद $14x^2 \quad 19x \quad 3$ की तुलना $ax^2 \quad bx \quad c$ से करने पर

$a \quad 14,\; b \quad 19,\; c \quad 3$

अब चूँकि $a \quad c \quad 14 \quad 3 \quad 42$

—42 के संभावित गुणनखण्ड निम्नलिखित हैं :

1 42	1 42
2 21	2 21
3 14	3 14
6 7	6 7

स्पष्टतः $a \quad c \quad 42$ के उपरोक्त गुणनखण्डों में 2 21 में 2 व 21 का योग 2 21 19 है जो मध्यपद b के बराबर है।

अतः $14x^2 \quad 19x \quad 3 \quad 14x^2 \quad 2 \quad 21 \; x \quad 3$

$$14x^2 \quad 2x \quad 21x \quad 3$$

$$14x^2 \quad 2x \quad 21x \quad 3$$

$$2x \; 7x \quad 1 \quad 3 \; 7x \quad 1$$

$7x \quad 1 \quad 2x \quad 3$ अभीष्ट गुणनखण्ड

उदाहरणः–22. बहुपद $4\sqrt{3}x^2 \quad 5x \quad 2\sqrt{3}$ का गुणनखण्डन कीजिए।

हलः– बहुपद $4\sqrt{3}x^2 \quad 5x \quad 2\sqrt{3}$ की तुलना $ax^2 \quad bx \quad c$ से करने पर

$a \quad 4\sqrt{3}, \; b \quad 5, \; c \quad 2\sqrt{3}$

अतः $a \quad c \quad 4\sqrt{3} \quad 2\sqrt{3} \quad 8 \quad 3 \quad 24$,

–24 के संभावित गुणनखण्ड निम्नलिखित हैं :

1 24	1 24
2 12	2 12
$\boxed{3 \quad 8}$	3 8
6 4	6 4

स्पष्टतः $a \quad c \quad 24$ के उपरोक्त गुणनखण्डों में $3 \quad 8$ में 3 व 8 का योग $3 \quad 8 \quad 5$ है जो मध्यपद b के बराबर है।

अतः $4\sqrt{3}x^2 \quad 5x \quad 2\sqrt{3} \quad 4\sqrt{3}x^2 \quad 3 \quad 8 \; x \quad 2\sqrt{3}$

$4\sqrt{3}x^2 \quad 3x \quad 8x \quad 2\sqrt{3}$

$4\sqrt{3}x^2 \quad 3x \quad 8x \quad 2\sqrt{3}$

$4\sqrt{3}x^2 \quad \sqrt{3}\sqrt{3}x \quad 2 \quad 4x \quad \sqrt{3}$

$\sqrt{3}x \quad 4x \quad \sqrt{3} \quad 2 \quad 4x \quad \sqrt{3}$

$4x \quad \sqrt{3} \quad \sqrt{3}x \quad 2$ अभीष्ट गुणनखण्ड

सोचे एवं चर्चा करें

क्या यह संभव है कि किसी द्विघातीय बहुपद के दो से अधिक गुणनखण्ड हों? इस अध्याय के उदाहरणों का अवलोकन करें एवं साथियों के साथ मिलकर द्विघाती बहुपद बनाकर उसके गुणनखण्ड कर जाँचिए कि क्या इनके दो से अधिक गुणनखण्ड प्राप्त हो रहे हैं?

प्रश्नावली 3

निम्नलिखित बहुपदों के मध्य पद तोड़कर गुणनखण्डन कीजिए –

(1)	$x^2 \quad 3x \quad 4$	(2)	$x^2 \quad 2x \quad 1$	(3)	$x^2 \quad x \quad 12$
(4)	$x^2 \quad 8x \quad 15$	(5)	$t^2 \quad 4t \quad 21$	(6)	$y^2 \quad 35y \quad 156$
(7)	$7x^2 \quad 2x \quad 5$	(8)	$12x^2 \quad 24x \quad 12$	(9)	$6x^2 \quad 7x \quad 3$
(10)	$14y^2 \quad 19y \quad 3$	(11)	$\sqrt{3}y^2 \quad 9y \quad 6\sqrt{3}$	(12)	$144x^2 \quad 24x \quad 1$

(Values and Zeroes of Quadratic Polynomials)

E4SHT7

माना कोई बहुपद $p \; x \quad x^2 \quad 6x \quad 9$ है। इसमें $x \quad 1$ रखते हैं।

तब $\quad p \; 1 \quad 1^{\;2} \quad 6 \; 1 \quad 9$

$1 \quad 6 \quad 9$

4

$x \quad 1$ रखने पर $p \; 1$ का मान 4 प्राप्त होता है। यह x=1 के लिए बहुपद का मान है।

ऐसे ही हम $p \quad 1 \;,\; p \; 2$ आदि के मान ज्ञात कर सकते हैं।

हम देखते हैं कि जब $x \quad 3$ रखते हैं

तब $\quad p \; 3 \quad 3^2 \quad 6 \; 3 \quad 9$

$9 \quad 18 \quad 9$

0

यहाँ x=3 के लिए बहुपद का मान 0 है। अतः 3 को हम इस बहुपद का शून्यक कहेंगे। निम्नलिखित उदाहरण में बहुपद का शून्यक ज्ञात करेंगे।

उदाहरणः–23. बहुपद $x^2 \quad 3x \quad 4$ का शून्यक ज्ञात कीजिए।

हलः– माना $\quad p \; x \quad x^2 \quad 3x \quad 4$

यहाँ हमें x का ऐसा मान ज्ञात करना है जिसके लिए बहुपद का मान शून्य हो।

यदि $\quad x = 1$

तब $\quad p \; 1 \quad 1^{\;2} \quad 3 \; 1 \quad 4$

$1 \quad 3 \quad 4$

6

यदि $\quad x = -1$

तब $\quad p \quad 1 \quad 1^{\;2} \quad 3 \quad 1 \quad 4$

$1 \quad 3 \quad 4$

0

$x = -1$ रखने पर बहुपद का मान शून्य हो जाता है अर्थात –1 इस बहुपद का शून्यक है। क्या और भी कुछ मान संभव है जिसके लिए बहुपद शून्य हो? यह जानने के लिए हमें x के और भी मान रखने होंगे। लेकिन यदि बहुपद के गुणनखण्डों का उपयोग करें तो हम बहुपद के सभी शून्यक सरलता से ज्ञात कर सकते हैं।

बहुपद $x^2 \quad 3x \quad 4$ के गुणनखण्ड ज्ञात करेंगे।

$$x^2 \quad 3x \quad 4 \quad x^2 \quad 4x \quad x \quad 4$$

$$x^2 \quad 4x \quad 1\, x \quad 4$$

$$x\; x \quad 4 \quad 1\, x \quad 4$$

$$x \quad 4 \quad x \quad 1$$

इस बहुपद का शून्यक x का वह मान होगा जिसके लिए बहुपद शून्य हो जाए

अर्थात $x^2 \quad 3x \quad 4 \quad 0$

$$x \quad 4 \quad x \quad 1 \quad 0$$

$x \quad 4 \quad 0$ या $x \quad 1 \quad 0$

$x \quad 4 \quad 0$ या $x \quad 1 \quad 0$

$x \quad 4$ या $x \quad 1$

यहाँ हम देख सकते हैं कि x के दो मानों –1 व 4 के लिए बहुपद का मान शून्य है।

अतः –1 व 4 इस बहुपद के शून्यक हैं।

उपरोक्त उदाहरण में –1 व 4 दिए गए बहुपद के शून्यक हैं जबकि $x \quad 4$ व $x \quad 1$ बहुपद के गुणनखण्ड हैं। आपने देखा कि बहुपद के गुणनखण्डों को शून्य के बराबर रखने पर बहुपद के शून्यक प्राप्त हो गए। यानी गुणनखण्ड मालूम हो तो शून्यक प्राप्त कर सकते हैं। क्या शून्यक मालूम होने पर गुणनखण्ड जान सकेंगे?

करके देखें

1. $x^2 \quad 9$ के गुणनखण्ड व शून्यक ज्ञात कीजिए।
2. किसी बहुपद के शून्यक 4 व –1 है गुणनखण्ड क्या होंगे?

बहुपद $x^2 \quad 5x \quad 6$ के शून्यक 3 व 2 हैं, तब इसके गुणनखण्ड $x \quad 3$ व $x \quad 2$ हैं।

अर्थात $x^2 \quad 5x \quad 6 \quad 1.\; x \quad 3 \quad x \quad 2$

अब बहुपद $4x^2 \quad 4x \quad 1$ के गुणनखण्ड व शून्यक पर विचार करते हैं –

$$4x^2 \quad 4x \quad 1 \quad 4x^2 \quad 2x \quad 2x \quad 1$$

$$4x^2 \quad 2x \quad 1 \; 2x \quad 1$$

$$2x \; 2x \quad 1 \quad 1 \; 2x \quad 1$$

$$2x \quad 1 \quad 2x \quad 1$$

$$2 \quad x \quad \frac{1}{2} \quad 2 \quad x \quad \frac{1}{2}$$

$$4 \quad x \quad \frac{1}{2} \quad x \quad \frac{1}{2}$$

अर्थात $4x^2 \quad 4x \quad 1$ का गुणनखण्ड $4 \quad x \quad \frac{1}{2} \quad x \quad \frac{1}{2}$ है। स्पष्टतः इस बहुपद के $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ शून्यक हैं।

क्या $x^2 \quad 5x \quad 6$ व $4x^2 \quad 4x \quad 1$ के गुणनखण्ड में कोई खास बात (पैटर्न) दिखाई पड़ रही है? $x^2 \quad 5x \quad 6$ में x^2 का गुणांक 1 उसके एक गुणनखण्ड के रूप में लिखा है। इसी प्रकार $4x^2 \quad 4x \quad 1$ में x^2 का गुणांक 4 उसके एक गुणनखण्ड के रूप में लिखा है। यानी हम बहुपद $ax^2 \quad bx \quad c$ को जिसके शून्यक व हैं तथा a, b, c वास्तविक संख्याएँ जहाँ $a \quad 0$ निम्नलिखित रूप में लिख सकते हैं –

$ax^2 \quad bx \quad c \quad k \quad x \qquad x \qquad ; \; k \quad a$

जहाँ k एक वास्तविक संख्या है और $k \quad 0$

पुनः $ax^2 \quad bx \quad c \quad kx^2 \quad k \qquad x \quad k$ (गुणा करने पर)

इस समीकरण के दोनों पक्षों के x^2, x के गुणांकों एवं अचर पदों की तुलना करने पर

$a \quad k; \; b \quad k \qquad ; \; c \quad k$

$\frac{b}{k} \qquad ; \; \frac{c}{k}$

$\frac{b}{a}$

अर्थात $\frac{b}{a}$ एवं $\frac{c}{a}$ (अंश और हर में –1 का गुणा करने पर)

हम कह सकते हैं कि द्विघातीय बहुपद $ax^2 \quad bx \quad c$ में

शून्यकों का योगफल $\dfrac{x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

तथा शून्यकों का गुणनफल $\dfrac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

बहुपद के शून्यकों एवं गुणांकों के संबंध को कुछ उदाहरणों से समझते हैं

उदाहरण:–24. बहुपद $6x^2 \quad 13x \quad 7$ के शून्यकों का योगफल एवं गुणनफल ज्ञात कीजिए।

हलः– बहुपद $6x^2 \quad 13x \quad 7$ की तुलना $ax^2 \quad bx \quad c$ से करने पर

$a \quad 6$, $b \quad 13$, $c \quad 7$

$\because$ शून्यकों का योगफल $\dfrac{b}{a}$

शून्यकों का योगफल $\dfrac{13}{6}$

$\because$ शून्यकों का गुणनफल $\dfrac{c}{a}$

शून्यकों का गुणनफल $\dfrac{7}{6}$

उदाहरण:–25. बहुपद $4x^2 \quad 4\sqrt{3}x \quad 3$ के शून्यकों का योगफल एवं गुणनफल ज्ञात कीजिए।

हलः– बहुपद $4x^2 \quad 4\sqrt{3}x \quad 3$ की तुलना $ax^2 \quad bx \quad c$ से करने पर

$a \quad 4$, $b \quad 4\sqrt{3}$, $c \quad 3$

$\because$ शून्यकों का योगफल $\dfrac{b}{a}$

शून्यकों का योगफल $\dfrac{4\sqrt{3}}{4}$

$\sqrt{3}$

$\because$ शून्यकों का गुणनफल $\dfrac{c}{a}$

शून्यकों का गुणनफल $\dfrac{3}{4}$

सोचें एवं चर्चा करें :

1. क्या शून्यक ज्ञात होने पर बहुपद ज्ञात कर सकते हैं? कोई दो मान लेकर बहुपद बनाइए।

प्रश्नावली 4

1. नीचे $ax^2 \quad bx \quad c$ रूप के कुछ द्विघातीय बहुपदों के शून्यक दिए गए हैं, तब बहुपदों के गुणनखण्ड लिखिए –

(i) $3, 4$ (ii) $2, \quad 3$ (iii) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$

(iv) $15, 17$ (v) $18, 12$

2. निम्नलिखित बहुपदों के शून्यकों का योगफल एवं गुणनफल ज्ञात कीजिए –

(i) $x^2 \quad 10x \quad 24$ (ii) $2x^2 \quad 7x \quad 9$ (iii) $x^2 \quad 11x \quad 30$

(iv) $5x^2 \quad 3x \quad 4$ (v) $x^2 \quad x \quad 12$

हमने सीखा

1. बहुपदों की भाग की प्रक्रिया अंकगणित के भाग की प्रक्रिया से थोड़ी अलग होती है। इसमें चर की घात का ध्यान रखना होता है।
2. बहुपदों का भाग करने के लिए भाज्य एवं भाजक को उनकी घातों के अवरोही क्रम में लिखते हैं।
3. बहुपदों का भाग करने के लिए दीर्घ भाजन विधि का भी उपयोग करते हैं।
4. दीर्घ भाजन विधि में भाग की प्रक्रिया तब तक दोहराते हैं जब तक कि शेषफल शून्य न हो जाए या शेषफल के चर की घात भाजक के चर की घात से कम न हो जाए।
5. बहुपदों के भाग की प्रक्रिया में भागफल एवं शेषफल भी बहुपद होते हैं।
6. यदि किसी बहुपद $f \quad x$ को $x \quad a$ से भाग दिया जाए तो शेषफल $f \quad a$ होता है। यह शेषफल प्रमेय है।
7. गुणनखण्ड प्रमेयः– यदि $x \quad a$, बहुपद $f \quad x$ का एक ऐसा शून्यक है जिसके लिए शेषफल $f \quad a \quad 0$ तब $x \quad a$, $f \quad x$ का एक गुणनखण्ड होता है।
8. द्विघातीय बहुपदों के दो शून्यक होते हैं।

mÙkj eky k&1

1-	Hkkx Qy $x \quad 2$,	शेषफल $= 3$
2.	भागफल $3x \quad 1$,	शेषफल $= 0$
3.	भागफल $2y^2 \quad 2y \quad 1$,	शेषफल $= 0$
4.	भागफल $x^3 \quad 4x^2 \quad 19x \quad 65$,	शेषफल $227x \quad 133$
5.	भागफल $x \quad y$,	शेषफल $= 0$
6.	भागफल 1,	शेषफल b
7.	$3x^3 \quad x^2 \quad 5$	8. $4x^2 \quad 3x \quad 7$
10.	शेषफल शून्य नहीं है।	11. $3x \quad 2$ मीटर
12.	$14x$ मीटर	

उत्तरमाला–2

1. (i) 15 (ii) $\frac{51}{8}$ (iii) 22 (iv) 100 (v) $\frac{269}{27}$

2. (i) $x \quad 3$ दिए गए बहुपद का गुणनखण्ड है ।
   (ii) $x \quad 1$ दिए गए बहुपद का गुणनखण्ड नहीं है ।
   (iii) $x \quad 2$ दिए गए बहुपद का गुणनखण्ड है ।
   (iv) $x \quad 1$ दिए गए बहुपद का गुणनखण्ड नहीं है ।
   (v) $x \quad 4$ दिए गए बहुपद का गुणनखण्ड नहीं है ।

3. (i) $a \quad 3$ (ii) $a \quad 2$ (iii) $a \quad 4$
   (iv) $a \quad 3$ (v) $a \quad 35$

4. शेषफल 11 5. शेषफल 17

उत्तरमाला–3

(1) $x \quad 4 \quad x \quad 1$ (2) $x \quad 1 \quad x \quad 1$

(3) $x \quad 4 \quad x \quad 3$ (4) $x \quad 5 \quad x \quad 3$

(5) $t \quad 7 \quad t \quad 3$ (6) $(y \quad 39) \quad y \quad 4$

(7) $7x \quad 5 \quad x \quad 1$ (8) $12 \quad x \quad 1 \quad x \quad 1$

(9) $2x \quad 3 \quad 3x \quad 1$ (10) $2y \quad 3 \quad 7y \quad 1$

(11) $y \quad 2\sqrt{3} \quad \sqrt{3}y \quad 3$ (12) $12x \quad 1 \; ^2$

उत्तरमाला–4

1 (i) $x \quad 3 \quad x \quad 4$ (ii) $x \quad 2 \quad x \quad 3$
  (iii) $x \quad \frac{1}{2} \quad x \quad \frac{1}{2}$ (iv) $x \quad 15 \quad x \quad 17$
  (v) $x \quad 18 \quad x \quad 12$

2. (i) 10, 24 (ii) $\frac{7}{2}, \frac{9}{2}$ (iii) 11, 30
   (iv) $\frac{3}{5}, \frac{4}{5}$ (v) 1, 12

अध्याय

दो चरों का रैखिक समीकरण

E5B9WH

रीमा ने सलमा से पूछा किसी खंभे का एक चौथाई भाग नीले रंग में, एक तिहाई भाग लाल रंग में तथा खंभे का शेष 10 मीटर भाग काले रंग से रंगा हुआ है, खंभे की कुल लंबाई कितनी होगी?

सलमा ने कहा कि पिछली कक्षा में हमने एक चर के रैखिक समीकरण में सीखा है कि इस तरह की परिस्थिति में एक चर (अज्ञात) का मान ज्ञात करने के लिए एक चर का समीकरण बनाया जाता है और फिर उसे हल करके चर (अज्ञात) का मान ज्ञात कर लिया जाता है।

रीमा – अच्छा! तो, यहाँ हम खंभे की लंबाई कैसे जानेंगे?

सलमा – यदि खंभे की कुल लंबाई को x मीटर मान लें,

तब, खंभे के नीले भाग की लंबाई $= \frac{x}{4}$ मीटर

खंभे के लाल भाग की लंबाई $= \frac{x}{3}$ मीटर

खंभे का काला भाग = 10 मीटर

अतः खंभे की कुल लंबाई = नीले भाग की लंबाई + लाल भाग की लंबाई + काले भाग की लंबाई

$$x = \frac{x}{4} \quad \frac{x}{3} \quad 10$$

$$x = \frac{3x \quad 4x \quad 120}{12}$$

$$12x = 7x + 120$$

$$12x - 7x = 120$$

$$5x = 120$$

$$x = \frac{120}{5}$$

$$x = 24 \text{ मीटर}$$

अर्थात् खंभे की कुल लंबाई 24 मीटर है।

क्या आप बता सकते हैं कि खंभे के नीले व लाल भाग की लंबाई कितनी होगी?

सलमा और रीमा ने बातों–बातों में कुछ और प्रश्नों को हल किया।

उदाहरणः–1. सलमा – मेरे अंक तुम्हारे अंक से दो अधिक हैं और दोनों के अंकों का योग 14 हैं तो हम दोनों के कितने–कितने अंक होंगे?

हलः– रीमा – माना मेरे अंक $= x$

तुम्हारे अंक $x + 2$ होंगे।

$\because$ दोनों के अंकों का योग 14 है

$x + x + 2 = 14$

$2x + 2 = 14$

$2x = 14 - 2$

$2x = 12$

$$x = \frac{12}{2}$$

$x = 6$

यानी मेरे अंक 6 और तुम्हारे अंक 8 होंगे।

ऐसे ही उन्होंने कई सवाल किए। कुछ सवाल और उनके हल हम यहाँ दे रहे हैं।

उदाहरणः–2. नीचे दिए गए त्रिभुज के प्रत्येक अंतःकोण की माप क्या होगी?

हलः– $\because$ त्रिभुज के तीनों अंतःकोणों का योग 180° होता है।

A+ B+ C= 180°

$x° + (x + 40)° + (x + 20)° = 180°$

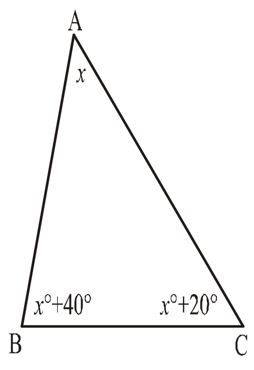
$3x° + 60° \quad 180°$

$3x° \quad 180° - 60°$

$3x° \quad 120°$

$$x° \quad \frac{120}{3}$$

$x° \quad 40°$



दिए गए त्रिभुज के प्रत्येक अंतःकोण की माप निम्नलिखित है–

A = $x°$ 40°,

B = $x° + 20° \quad 40° + 20° \quad 60°$

C = $x° + 40° \quad 40° + 40° \quad 80°$

करके देखें

1. एक थैले में 50 पैसे के सिक्के हैं। इन सिक्कों की संख्या ज्ञात कीजिए यदि थैले में 30 रुपये हैं।
2. एक समकोण त्रिभुज के एक कोण का माप 60^0 है तो दूसरे कोण का माप ज्ञात कीजिए।
3. पिता की आयु पुत्र की आयु की दुगुनी है तो दोनों की वर्तमान आयु क्या होगी?

सलमा और रीमा ने कुछ ऐसे सवालों पर भी चर्चा की।

मेरे बैग में 50 पैसे और 1 रुपये के सिक्के हैं। बैग में कुल 100 सिक्के हैं, तो 50 पैसे और 1 रूपये के कितने–कितने सिक्के हैं?

यहाँ पर दो अलग–अलग प्रकार के सिक्के हैं और उनकी संख्या अलग–अलग है।हमें दोनों ही पता नहीं है अतः दोनों की संख्या को अज्ञात द्वारा दर्शाना होगा। अतः हम 50 पैसे के सिक्कों की संख्या को x तथा 1 रुपये के सिक्कों की संख्या को y मानेंगे।

हम जानते हैं कि बैग में कुल सिक्कों की संख्या 100 है यानी

$$x + y = 100$$

लेकिन हम अभी यह नहीं बता सकते हैं कि दोनों प्रकार के सिक्कों की संख्या कितनी–कितनी होगी?

इसी प्रकार के कुछ और उदाहरण देखें जिनमें समीकरण तो बनता है लेकिन उसके हल का पता नहीं चल पाता।

उदाहरणः–3. कुछ हिरणों और कुछ सारस पक्षी के पैरों की कुल संख्या 180 है।

हलः– माना हिरणों की संख्या $= x$

सारस पक्षियों की संख्या $= y$

चूँकि एक हिरण के 4 पैर होते हैं

अतः हिरणों के पैरों की संख्या $= 4x$

चूँकि एक सारस पक्षी के 2 पैर होते हैं

अतः सारस पक्षियों के पैरों की संख्या $= 2y$

कथन के अनुसार

हिरणों के पैरों की संख्या + सारस पक्षियों के पैरों की संख्या = 180

अर्थात् $4x + 2y = 180$

उदाहरणः–4. एक कॉपी और दो पेंसिलों की कीमत 45 रुपये हैं।

हलः– माना 1 कॉपी की कीमत $= x$ रुपये

1 पेंसिल की कीमत $= y$ रुपये

तब एक कॉपी की कीमत + दो पेंसिलों की कीमत = 45

$$x + 2y = 45$$

करके देखें

अब आप निम्नलिखित कथनों के समीकरण बनाकर हल पता करने की कोशिश करें–

1. किन्हीं दो संख्याओं का योग 8 है।
2. शशांक और उसके पिता की आयु का अंतर 30 वर्ष है।
3. एक थैले में 1 रुपये व 5 रुपये के 100 सिक्के रखे हैं।
4. एक दुकान में 3 पेन व 4 कॉपियों का मूल्य 105 रुपये हैं।
5. किसी स्थान पर कुछ मुर्गियाँ व कुछ गायें हैं, जिनके पैरों की संख्या 60 है।

ऊपर के उदाहरणों में हमने परिस्थितियों से समीकरण तो बना लिए लेकिन उनके हल नहीं बता पाए।

अब हम निम्नलिखित परिस्थितियों पर चर्चा करते हैं–

एक पिता ने अपने दो पुत्रों सौरभ और संतोष में 8 रुपये बाँटे। क्या हम यह जान पाएँगे कि सौरभ और संतोष को कितने–कितने रुपये मिले?

यदि सौरभ को x व संतोष को y रुपये मिले हों तब इसका समीकरण निम्नलिखित होगा–

$x + y = 8$ ....(1)

इस समीकरण के आधार पर हम कह सकते हैं कि जब सौरभ को 1 रुपये तब संतोष को 7 रुपये, जब सौरभ को 2 रुपये तब संतोष को 6 रुपये और इसी प्रकार आगे सोचने पर हम देखते हैं कि जब सौरभ को 7 रुपये तो संतोष को 1 रुपये मिले होंगे। सौरभ व संतोष को 8 रुपये को बाँटने के संभव तरीकों को नीचे दी गई सारणी के रूप में लिख सकते हैं–

	रुपये						
सौरभ	1	2	3	4	5	6	7
संतोष	7	6	5	4	3	2	1

आपने देखा कि हम यह बता नहीं पाए कि वास्तव में सौरभ व संतोष को कितने रुपये मिले? लेकिन अब यदि हमें पता हो कि पिता ने सौरभ को संतोष के तीन गुने रुपये दिये हों तब इसे निम्नलिखित समीकरण के रूप में लिखेंगे–

$x = 3y$ ....(2)

समीकरण (1) में $x = 3y$ रखने पर हमें एक चर का निम्नलिखित समीकरण मिलता है–

$$3y + y = 8$$
$$4y = 8$$
$$y = \frac{8}{4}$$
$$y = 2$$

y का मान समीकरण (2) में रखने पर–

$$x = 3\,y$$

तब $x = 3 \times 2$

$$x = 6$$

यानी संतोष को 2 रुपये और सौरभ को संतोष का 3 गुना 6 रुपये मिले।

इसी प्रकार उदाहरण–3 में हिरणों एवं सारस पक्षियों के पैरों की संख्या 180 होने पर हमारा समीकरण बना था– $4x + 2y = 180$ ....(1)

और अब हिरणों की आँखों की संख्या + सारस के आँखों की संख्या = 120

अतः $2x + 2y = 120$......................(2) (हिरण की 2 आँखें और सारस की 2 आँखें)

समीकरण (2) से

$2y = 120 - 2x$

इस मान को समीकरण (1) में रखने पर

$$\Rightarrow \quad 4x + 120 - 2x = 180$$
$$\Rightarrow \quad 2x = 60$$
$$\Rightarrow \quad x = \frac{60}{2}$$
$$\Rightarrow \quad x = 30$$

x अर्थात् हिरणों की संख्या 30 है। x के इस मान को समीकरण (1) में रखने पर

$$\Rightarrow \quad 4(30) + 2y = 180$$

$$\Rightarrow \quad 120 + 2y = 180$$
$$\Rightarrow \quad 2y = 180-120$$
$$\Rightarrow \quad 2y = 60$$
$$\Rightarrow \quad y = \frac{60}{2}$$
$$\Rightarrow \quad y = 30$$

y अर्थात् सारस पक्षियों की संख्या भी 30 है।

उपरोक्त उदाहरणों में हमने देखा कि परिस्थितियों को लेकर दो चरों का जब एक ही समीकरण बना तब हम प्रश्न का जवाब देने में अनुमान लगाए लेकिन जैसे ही दूसरी परिस्थिति पर दूसरा समीकरण बना तब हम सटीक और निश्चित जवाब दे पाए।

सोचें एवं चर्चा करें

क्या निम्नलिखित परिस्थितियों से बने समीकरणों से जवाब मिल सकते हैं? यदि नहीं तो क्यों नहीं?

1. किसी समान्तर चतुर्भुज में आसन्न कोणों के युग्म में से एक कोण का माप दूसरे कोण का $\frac{4}{5}$ गुना है। कोणों के माप पता करें।
2. एक वृक्ष पर बैठे हुए मैना और कोयलों की संख्या 15 है। यदि उनके पैरों की संख्याओं का योग 36 है तब मैना व कोयलों की संख्या बताइए।
3. एक टोकरी में सेब और आम की कुल संख्या 39 है। यदि दूसरी टोकरी में कुछ आम और कुछ संतरे हैं तब दूसरी टोकरी में कितने आम रखे हैं?

अलग–अलग संदर्भों में बने समीकरणों से जवाब कैसे जानें? समीकरणों से जवाब जानने हेतु उन्हें हल किया जाता है। समीकरणों को हल करने के अलग–अलग तरीके हैं। हम यहाँ कुछ तरीकों को जानेंगे।

आपने निर्देशांक ज्यामिति या ग्राफ में दो चरों वाले समीकरणों को ग्राफ में प्रदर्शित करना सीख लिया है। हम अलग–अलग संदर्भों से बने समीकरणों को भी ग्राफ पर दर्शा सकते हैं और उनके हल के बारे में जान सकते हैं।

अब हम हिरण और सारस के पैरों के संबंध पर बने समीकरण और उनकी आँखों के संबंध पर बने समीकरण को ग्राफ पर दर्शाकर देखते हैं कि उनके हल कैसे प्राप्त हो रहे हैं?

पैरों के समीकरण $4x + 2y = 180$ के लिए हम सारणी बनाते हैं।

$2y = 180 - 4x$

$$y = \frac{180 - 4x}{2}$$

$y = 90 - 2x$ ....(3)

समीकरण (3) में $x = 10, 20, 30.....$ इत्यादि रखने पर y के संगत मानों की सारणी बनाते हैं–

सारणी–1

x	10	20	30	40
y	70	50	30	10

इसी प्रकार आँखों के समीकरण $2x + 2y = 120$ के लिए

$2y = 120 - 2x$

$$y = \frac{120 - 2x}{2}$$

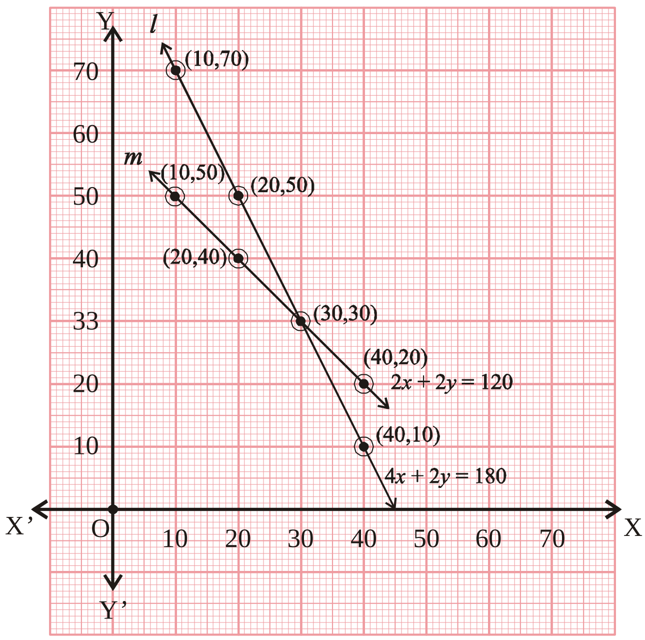
$y = 60 - x$ ....(4)

समीकरण (4) में $x = 10,20,30,40,.........$ इत्यादि रखने पर y के संगत मानों की सारणी नीचे दी गई है–

सारणी–2

x	10	20	30	40
y	50	40	30	20

अब दोनों सारणियों की सहायता से आलेख खींच लेते हैं ।



आलेख–1

आप देखते हैं कि ग्राफ में प्रदर्शित रेखाओं का कटान बिन्दु (30, 30) है। यही हिरण और सारस पक्षियों की संख्या भी है जो हमारे द्वारा पूर्व में निकाली गई है।

करके देखें

आप $x + y = 8$ व $x = 3y$ को ग्राफ पर दर्शाकर हल निकालें।

निम्नलिखित सवाल को भी इसी तरीके से हल किया गया है–

उदाहरण:–5. कक्षा दसवीं के 10 विद्यार्थियों ने एक विज्ञान क्विज में भाग लिया। क्विज में भाग लेने वाले विद्यार्थियों में लड़कियों की संख्या, लड़कों से 4 अधिक थी तब लड़के एवं लड़कियों की संख्या क्या रही होगी?

हल:– माना विज्ञान क्विज में भाग लेने वाले लड़कों की संख्या x व लड़कियों की संख्या y थी।

तब कुल विद्यार्थियों की संख्या = लड़कों की संख्या + लड़कियों की संख्या

$$10 = x + y$$

या $$x + y = 10 \quad \text{..............(1)}$$

चूँकि लड़कियों की संख्या, लड़कों से 4 अधिक थी अत: निम्नलिखित समीकरण और बनेगा।

$$y = x + 4 \quad \text{...............(2)}$$

अब हम हम समीकरण (1) व (2) का आलेख खींचने के लिए x और y के संगत मानों की सारणी बनाएँगे और सारणी की मदद से आलेख खीचेंगे।

समीकरण (1) में $x = 1, 2, 3,......$ इत्यादि रखने पर y के संगत मान मिलेंगे जो सारणी में प्रदर्शित हैं–

सारणी–1

($x + y = 10$ के लिए)

x	1	2	3	4	5	6
y	9	8	7	6	5	4

इसी प्रकार समीकरण (2) में $x = 1,2,3,.....$ इत्यादि रखने पर y के संगत मानों को सारणी में लिखेंगे।

सारणी–2

($y = x + 4$ के लिए)

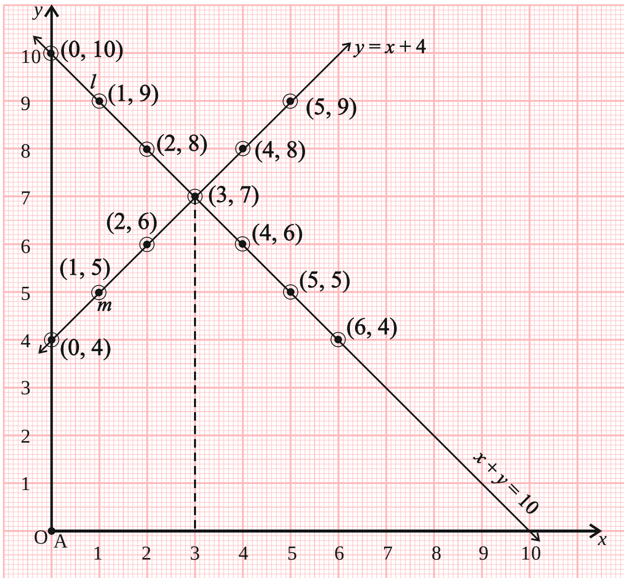
x	1	2	3	4	5	6
y	5	6	7	8	9	10

ग्राफ पेपर पर सारणी–1 व 2 से प्राप्त मानों को प्रदर्शित करते हैं तो दो सरल रेखाएँ l व m प्राप्त होती हैं। ग्राफ पेपर पर आप देखते हैं कि ये दोनों रेखाएँ l व m एक–दूसरे को बिन्दु (3, 7) पर काट रही हैं, यानी प्रतिच्छेद कर रही हैं।

यह बिन्दु दोनों समीकरणों से प्रदर्शित सरल रेखाओं पर स्थित है।

इस बिन्दु (3, 7) में $x = 3$, $y = 7$ है जो दोनों समीकरणों को संतुष्ट करते हैं। यही प्रश्न का हल भी है।

यानी लड़कों की संख्या 3 और लड़कियों की संख्या 7 है।

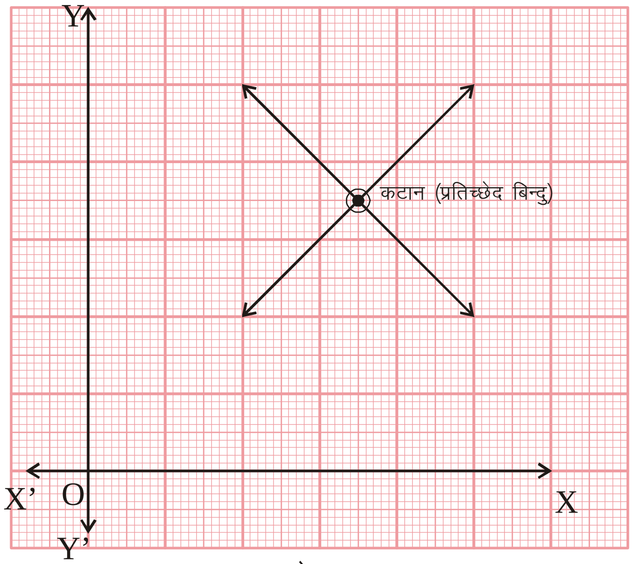


आलेख–2

समीकरणों के द्वारा प्रदर्शित सरल रेखाओं का कटान (प्रतिच्छेद) बिन्दु ही उन समीकरणों के हल होते हैं।

क्या प्रत्येक परिस्थिति में हम एक दूसरे को काटती हुई सरल रेखाएँ प्राप्त कर सकते हैं बल्कि अलग–अलग परिस्थितियों में बने समीकरणों के लिए आलेख पर प्राप्त सरल रेखाएँ अलग–अलग रूपों में दिखती हैं। आइए इन्हें समझें।

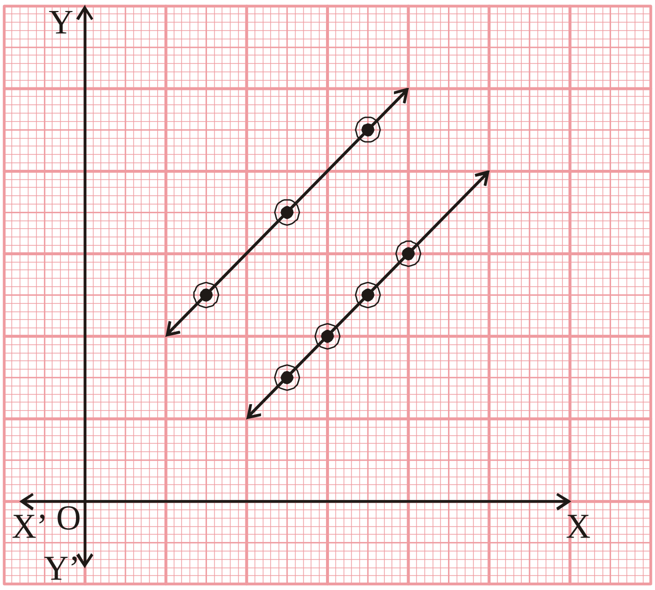
(1) जब समीकरणों से प्राप्त रेखाएँ एक दूसरे को किसी बिन्दु पर काटती हों तब समीकरण का अद्वितीय हल प्राप्त होता है। कटान बिन्दु के मान ही समीकरणों के हल होते हैं।



आलेख–3

(2) जब समीकरणों से प्राप्त रेखाएँ समान्तर हों तब समीकरण का कोई भी हल नहीं होता। क्योंकि कोई भी बिन्दु उभयनिष्ठ नहीं होता।

(3) जब समीकरणों से प्राप्त रेखाएँ संपाती हों अर्थात् एक–दूसरे पर स्थित हों तब समीकरण के अनंततः अनेक हल होते हैं। क्योंकि इस स्थिति में अनेक बिन्दु दोनों रेखाओं में उभयनिष्ठ होते हैं।



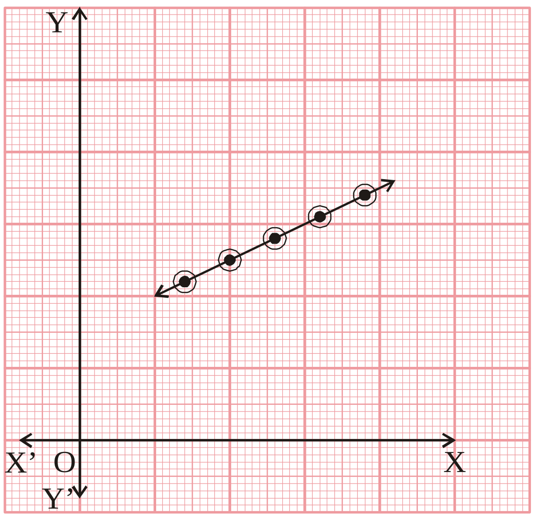
आलेख–4

समीकरणों द्वारा प्रदर्शित सरल रेखाओं की विशेषताएँ व्यावहारिक जीवन से संबंधित समस्याओं को समझने में मददगार साबित होती हैं।

समस्याओं के हल में उपर्युक्त परिस्थितियाँ किस प्रकार सहायक होती हैं इसे हम कुछ उदाहरणों से समझते हैं।

उदाहरणः–6. कविता ने 1 पेंसिल और 2 रबर, 4 रुपये में खरीदी तथा सविता ने 2 पेंसिल और 4 रबर, 16 रुपये में खरीदी तब क्या हम यह पता लगा सकते हैं, कि 1 पेंसिल व 1 रबर की कीमत कविता और सविता के लिए कितनी रही होगी?

हलः– माना कि 1 पेंसिल की कीमत x रुपये व 1 रबर की कीमत y रुपये है चूँकि कविता ने 1 पेंसिल व 2 रबर की कुल कीमत 4 रुपये चुकायी तब इसे निम्नलिखित समीकरण के रूप में लिख सकेंगे–



आलेख–5

$$1 \times x + 2 \times y = 4$$

$$x + 2y = 4 \quad ....(1)$$

इसी प्रकार सविता ने 2 पेंसिल व 4 रबर खरीदने के लिए कुल कीमत 16 रुपये चुकायी तब इसे भी निम्नलिखित समीकरण के रूप में लिख सकते हैं–

$$2 \times x + 4 \times y = 16$$

$$2x + 4y = 16 \quad ....(2)$$

समीकरण (1) से

$$x + 2y = 4$$

या $2y = 4 - x$

$$y = \frac{4-x}{2} \quad ....(3)$$

समीकरण (3) में $x = 0, 1, 2, 3, 4, ...$ रखने पर y के संगत मान प्राप्त होंगे इन्हें सारणी में लिखेंगे–

सारणी–1

x	0	1	2	3	4	5	6
y	2	1.5	1	0.5	0	–0.5	-1

अब समीकरण (2) से

$$\Rightarrow \quad 2x + 4y = 16$$

$$\Rightarrow \quad 2(x + 2y) = 16$$

$$\Rightarrow \quad x + 2y = 8$$

$$\Rightarrow \quad 2y = 8 - x$$

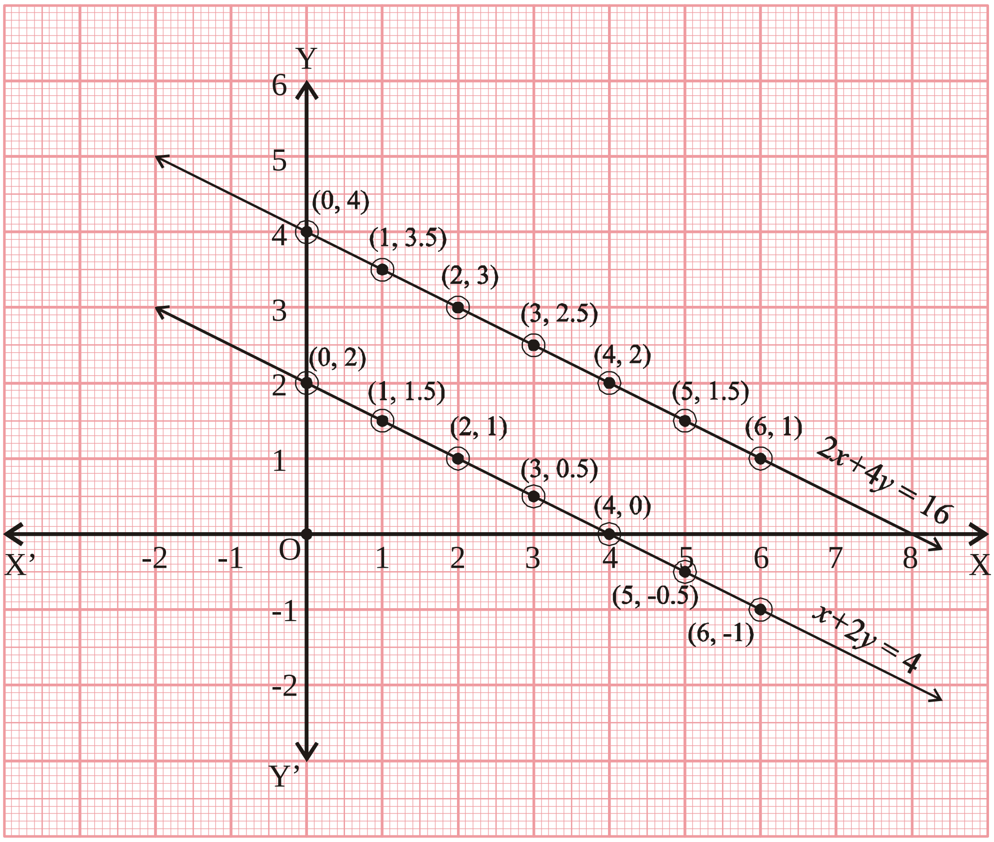
$$\Rightarrow \quad y = \frac{8-x}{2}$$

समीकरण (4) में $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ रखने पर y के क्रमशः संगत मान $y = 4, 3.5, 3, 2.5, 2, 1.5, 1$ प्राप्त होंगे इन्हें सारणी में लिखेंगे–

सारणी–2

x	0	1	2	3	4	5	6
y	4	3.5	3	2.5	2	1.5	1

समीकरण (1) व (2) के लिए प्राप्त सारणी से निम्नलिखित आलेख प्राप्त करेंगे–



आलेख–6

समीकरणों से दो समान्तर रेखाएँ मिल रही हैं तब 1 पेंसिल व 1 रबर की कीमत क्या होगी?

यहाँ दोनों रेखाओं में कोई प्रतिच्छेद बिन्दु नहीं है अतः समीकरणों का अद्वितीय हल नहीं होगा। कविता व सविता द्वारा खरीदे गए पेंसिल व रबर की कीमत अलग–अलग होगी।

उदाहरण:–7. एक व्यक्ति ने तीन कुर्सियों तथा दो मेजों को 1200 रुपये में खरीदा तथा छः कुर्सियों और चार मेजों की कीमत 2400 रुपये चुकायी तब एक कुर्सी व एक मेज की कीमत ज्ञात कीजिए।

हल:– माना कि एक कुर्सी की कीमत x रुपये

तथा एक मेज की कीमत y रुपये है।

तब तीन कुर्सियों व दो मेजों की कीमत $3x + 2y$

प्रश्नानुसार $3x + 2y = 1200$ ....(1)

इसी प्रकार 6 कुर्सियों व 4 मेजों की कीमत 2400 रुपये है।

$\Rightarrow$ $6x + 4y = 2400$

$$\Rightarrow \quad 2(3x + 2y) = 2400$$

$$\Rightarrow \quad (3x + 2y) = \frac{2400}{2}$$

$$\Rightarrow \quad 3x + 2y = 1200 \quad ....(2)$$

दोनों समीकरण एक जैसे हैं। यदि इन समीकरणों का ग्राफीय निरूपण किया जाए तो संपाती रेखाएँ प्राप्त होती हैं।

समीकरण (1) व (2) दोनों में ही–

यदि $x = 100$ तब $y = \frac{1200 - 3x}{2} = \frac{1200 - 3(100)}{2}$

$$y = \frac{900}{2} = 450$$

$x = 200$ तब $y = \frac{1200 - 3(200)}{2} = \frac{1200 - 600}{2}$

$$y = \frac{600}{2} = 300$$

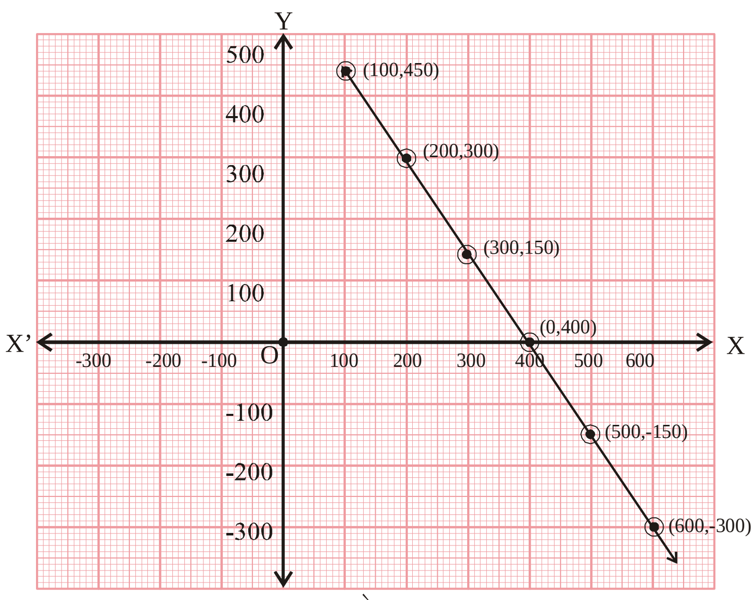
इसी प्रकार x के मानों के संगत y के और मान प्राप्त करते हैं और इन मानों को निम्नलिखित सारणी के रूप में लिखते हैं–

x	100	200	300	400	500	600
y	450	300	150	0	–150	–300

यह सारणी दोनों समीकरणों के लिए है, अतः इस सारणी से आलेख खींचने पर प्राप्त दोनों रेखाएँ संपाती होंगी।

स्पष्टतः x व y के जो मान दोनों समीकरणों में हैं उन मानों को समीकरण निकाय के हल कहेंगे। चूंकि x व y के अनंत मान हैं अतः दिए गए समीकरण निकाय के हल भी अनंततः अनेक होंगे।

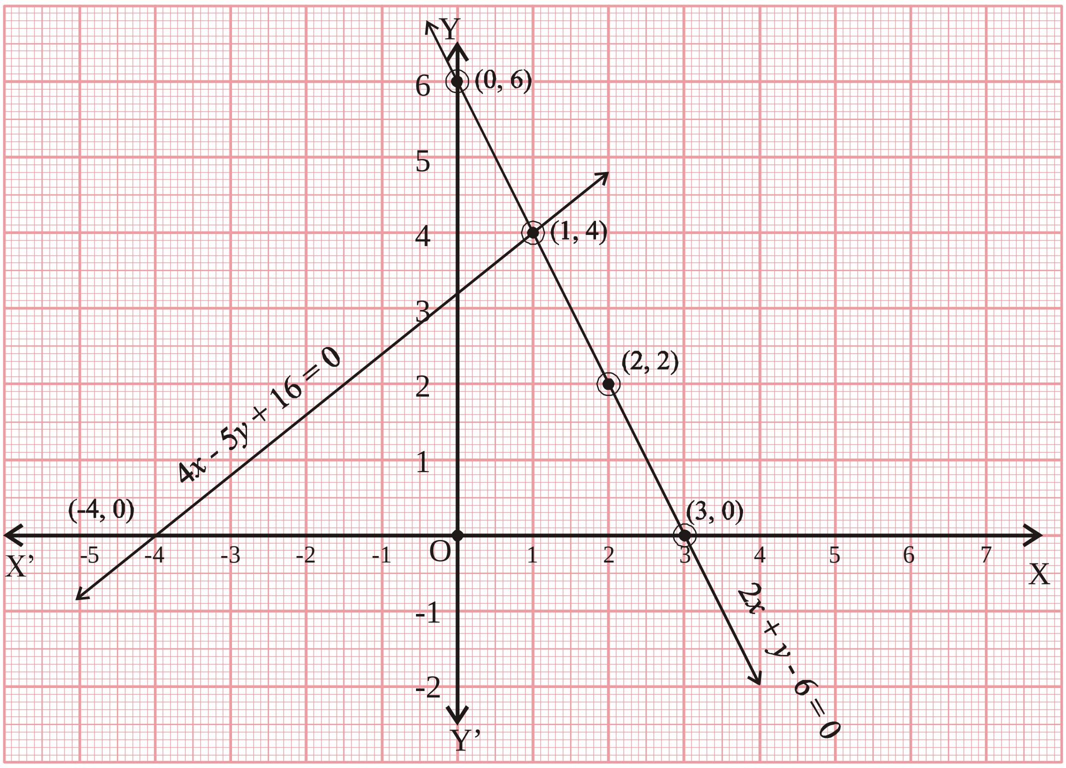
इन समीकरणों में x व y कुर्सी व मेज की कीमत को दर्शाते हैं अतः कुर्सी व मेज की कीमतों के लिए यह बात लागू होगी कि उनकी अनेक संभावित कीमतें हो सकती हैं।



आलेख–7

उदाहरणः–8. दिए गए आलेख चित्र में समीकरण निकाय के लिए x और y के मान ज्ञात कीजिए।

हलः–



आलेख–8

आलेख से स्पष्ट है कि समीकरणों को प्रदर्शित करने वाली दोनों रेखाएँ एक–दूसरे को बिन्दु (1, 4) पर प्रतिच्छेद कर रही हैं अतः समीकरण निकाय के लिए $x = 1, y = 4$ होंगे।

प्रश्नावली–1

1. निम्नलिखित कथनों को समीकरण के रूप में लिखिए–

(i) एक विद्यालय के क्रिकेट कोच ने 3 बल्ले और 6 गेंदें 3900 रुपये में खरीदी। वहीं से उन्होंने 1 बल्ला और 2 गेंदें 1300 रुपये में खरीदी।

(ii) दो संख्याओं का योग 16 तथा उनका अंतर 8 है।

(iii) एक फल की दुकान पर 2 किग्रा. सेब तथा 1 किग्रा. अंगूर का मूल्य 160 रुपये था। उसी दुकान पर 4 किग्रा. सेब व 2 किग्रा. अंगूर का मूल्य 300 रुपये था।

(iv) नरेश ने अपनी पुत्री से कहा कि 7 साल पहले मेरी आयु ,तुम्हारी आयु से 7 गुनी थी और अब से 3 साल बाद मेरी आयु तुम्हारी आयु की 3 गुनी हो जायेगी।

(v) एक व्यक्ति घर से कार्यालय तक जाने के लिए 90 किमी. दूरी तय करता है इसके लिए वह ट्रेन और टैक्सी का उपयोग करता है। व्यक्ति द्वारा टैक्सी से तय की गई दूरी ट्रेन से तय की गई दूरी की दुगुनी है।

2. निम्नलिखित समीकरणों के आलेख चित्रों को देखकर उनके हल के बारे में पता करें।

(अ) समीकरण

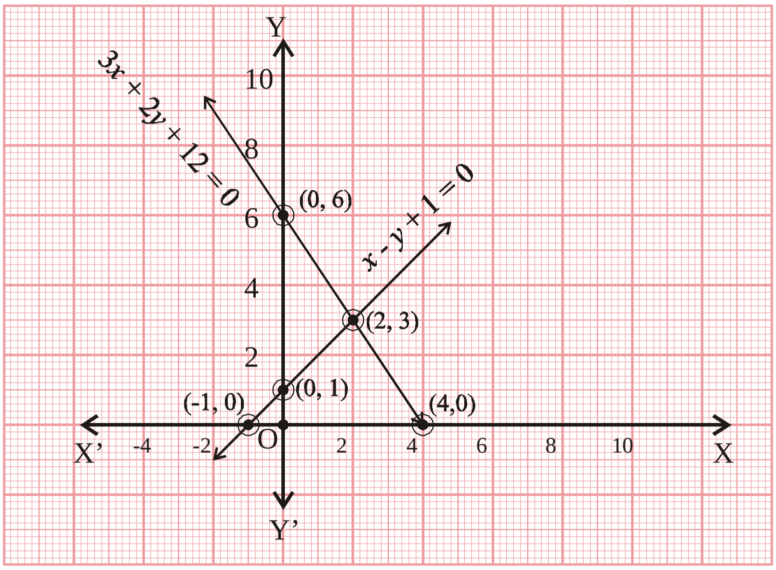
$3x + 2y - 12 = 0$

$x - y + 1 = 0$ में

.... हल है।

तब, x व y के मान होंगे–

.........................., ...



आलेख–9

(ब) समीकरण

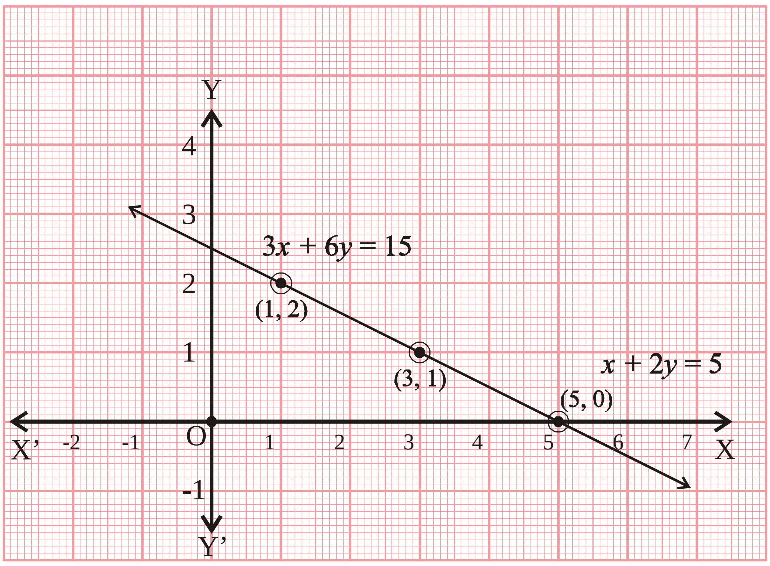
$3x + 6y = 15$

$x + 2y = 5$ में

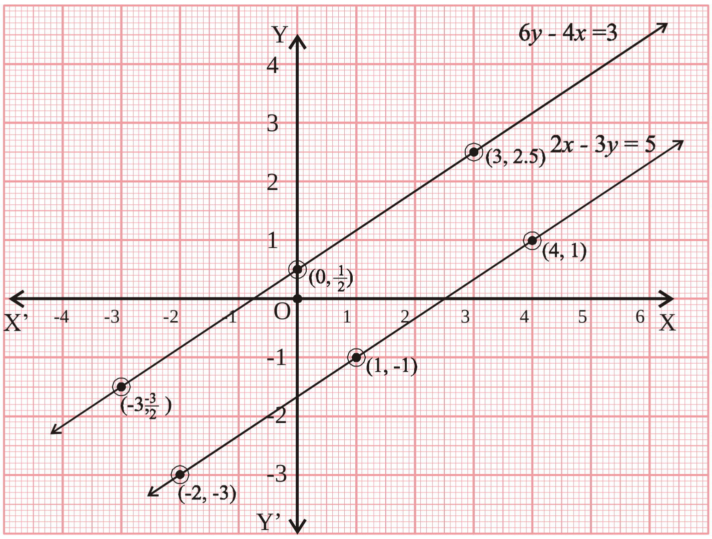
.... हल है।

तब, x व y के मान होंगे–

.........................., ...



आलेख–10



आलेख–11

(स) समीकरण

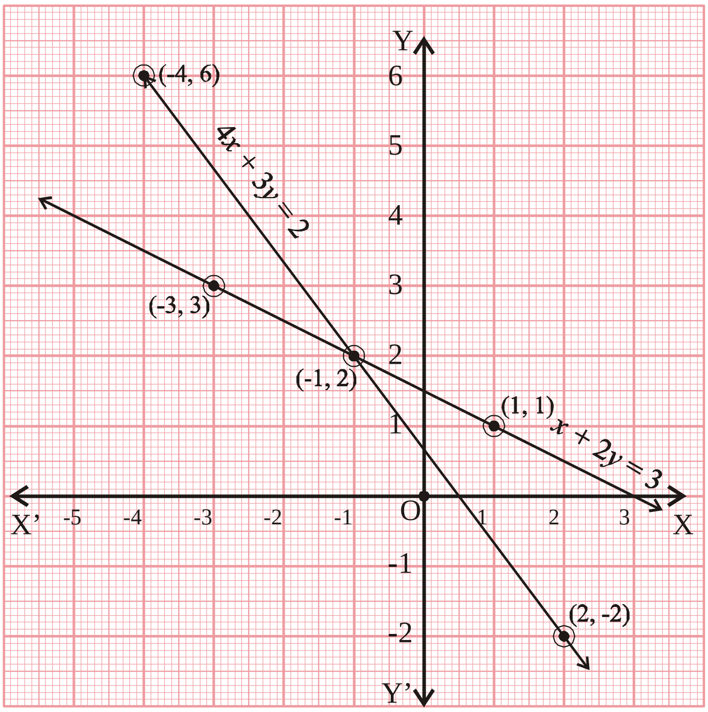
$-4x + 6y = 3$

$2x - 3y = 5$ में

.... हल है।

तब, x व y के मान होंगे–

.........................., ...



आलेख–12

(द) समीकरण

$x + 2y = 3$

$4x + 3y = 2$ में

.... हल है।

तब, x व y के मान होंगे–

.........................., ...

हमने दो चरों के रैखिक समीकरणों का हल आलेखों की सहायता से प्राप्त करना सीख लिया। अब हम दो चरों के रैखिक समीकरण को हल करने के कुछ और तरीकों पर चर्चा करेंगे। एक तरीका तो ये है जिसमें हम एक चर का मान दूसरे समीकरण में रखकर

उसे एक चर के रैखिक समीकरण में बदल लेते हैं और फिर उसका हल प्राप्त करते हैं। आगे के उदाहरण में इसे देख सकते हैं–

उदाहरणः–9. एक छोटी गुफा में कुछ खरगोश और कुछ पक्षी हैं जिनके कुल 35 सिर तथा 98 पैर हैं। तब पक्षियों व खरगोशों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हलः– माना खरगोशों की संख्या = x

तथा पक्षियों की संख्या = y

खरगोशों के सिरों की संख्या + पक्षियों के सिरों की संख्या = 35

$\therefore \quad x + y = 35 \quad ....(1)$

खरगोश के पैरों की संख्या + पक्षियों के पैरों की संख्या = 98

$\therefore \quad 4x + 2y = 98$

$2(2x + y) = 98$

$2x + y = \dfrac{98}{2}$

$2x + y = 49$

$y = 49 - 2x \quad ....(2)$

समीकरण (1) में $y = 49 - 2x$ रखने पर,

$x + 49 - 2x = 35$

$\Rightarrow \quad -x + 49 = 35$

$\Rightarrow \quad -x = 35 - 49$

$\Rightarrow \quad -x = -14$

$\Rightarrow \quad x = 14$

अब समीकरण (2) में $x = 14$ रखने पर

$\Rightarrow \quad y = 49 - 2x$

$\Rightarrow \quad y = 49 - 2(14)$

$\Rightarrow \quad y = 49 - 28$

$\Rightarrow \quad y = 21$

स्पष्टतः खरगोशों की संख्या 14 और पक्षियों की संख्या 21 है।

समीकरणों को हल करने के एक अन्य तरीके में कभी समीकरणों को जोड़कर तो कभी घटाकर उसे एक चर के समीकरणों के रूप में बदलने से हमें हल मिल जाता है। आइए, इसके कुछ उदाहरण देखें–

उदाहरणः–10. ऋचा और नैना के पास कुछ टॉफियाँ हैं। जब ऋचा, नैना को 30 टॉफियाँ देती है तब नैना के पास ऋचा से दुगुनी टॉफियाँ हो जाती हैं, परंतु जब नैना अपनी टॉफियों में से 10 टॉफियाँ ऋचा को देती हैं तब ऋचा के पास नैना से 3 गुनी टॉफियाँ हो जाती हैं। बताइए उन दोनों के पास कितनी टॉफियाँ हैं?

हलः– माना कि ऋचा के पास टॉफियों की संख्या = x

नैना के पास टॉफियों की संख्या = y

जब ऋचा 30 टॉफियाँ नैना को देती है

तब ऋचा के पास टॉफियों की संख्या = $x - 30$

तथा नैना के पास टॉफियों की संख्या = $y + 30$

तब प्रश्नानुसार $2(x - 30) = y + 30$

$$\Rightarrow \quad 2x - 60 = y + 30$$
$$\Rightarrow \quad 2x - y = 30 + 60$$
$$\Rightarrow \quad 2x - y = 90 \quad \text{..................(1)}$$

परंतु जब नैना ऋचा को 10 टॉफियाँ देती है,

तब ऋचा के पास टॉफियों की संख्या = $x + 10$

नैना के पास टॉफियों की संख्या = $y - 10$

तब प्रश्नानुसार $x + 10 = 3(y - 10)$

$$\Rightarrow \quad x + 10 = 3y - 30$$
$$\Rightarrow \quad x - 3y = -30 - 10$$
$$\Rightarrow \quad x - 3y = -40 \quad \text{.................(2)}$$

अब

$$2x - y = 90 \quad \text{..................(1)}$$
$$x - 3y = -40 \quad \text{..................(2)}$$

क्या समीकरण (1) व (2) में x या y के गुणांक समान हैं?

नहीं... x या y के गुणांक समान नहीं हैं तब क्या समीकरण (1) में (2) को घटाने पर या जोड़ने पर x या y निरस्त हो पाते हैं? x या y के गुणांक समान कर दिए जाएँ तो संभव है कि समीकरण (1) में (2) को घटाने या जोड़ने पर x या y निरस्त हो गए।

हम गुणांक समान करने के लिए समीकरण (2) के दोनों पक्षों में समीकरण (1)के x के गुणांक 2 से गुणा करते हैं।

$$2(x - 3y) = -40 \times 2$$
$$2x - 6y = -80 \quad \text{..................(3)}$$

समीकरण (1) में समीकरण (3) को घटाने पर

$$\Rightarrow \quad 2x - y - (2x - 6y) = 90 - (-80)$$
$$\Rightarrow \quad 2x - y - 2x + 6y = 90 + 80$$
$$\Rightarrow \quad 5y = 170$$
$$\Rightarrow \quad y = \frac{170}{5}$$
$$\Rightarrow \quad y = 34$$

y का मान समीकरण (1) में रखने पर

$$2x - 34 = 90$$
$$\Rightarrow \quad 2x = 90 + 34$$
$$\Rightarrow \quad 2x = 124$$
$$\Rightarrow \quad x = \frac{124}{2}$$
$$\Rightarrow \quad x = 62$$

स्पष्टतः ऋचा के पास 62 तथा नैना के पास 34 टॉफियाँ हैं।

उदाहरणः–11. एक कक्षा के विद्यार्थी पंक्तियों में खड़े हैं। जब प्रत्येक पंक्ति में 4 विद्यार्थी कम कर दिए जाते हैं तब 4 पंक्तियाँ अधिक बनती हैं लेकिन जब प्रत्येक पंक्ति में 4 विद्यार्थी और खड़े कर दिए जाते हैं तब 2 पंक्तियाँ कम हो जाती हैं। कक्षा के विद्यार्थियों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हलः– माना पंक्तियों की संख्या $= x$

तथा प्रत्येक पंक्ति में विद्यार्थियों की संख्या $= y$

तब कुल विद्यार्थियों की संख्या = पंक्तियों की संख्या × प्रत्येक पंक्ति में विद्यार्थियों की संख्या

$= xy$

जब प्रत्येक पंक्ति में 4 विद्यार्थी कम कर दिए जाते हैं

तब प्रत्येक पंक्ति में विद्यार्थियों की संख्या $= y - 4$

और पंक्तियों की संख्या $= (x + 4)$

$\therefore$ कुल विद्यार्थियों की संख्या $= (x + 4)(y - 4)$

$$\Rightarrow \quad xy = xy - 4x + 4y - 16$$
$$\Rightarrow \quad xy - xy = -4x + 4y - 16$$
$$\Rightarrow \quad 0 = 4(-x + y - 4)$$
$$\Rightarrow \quad -x + y - 4 = 0$$
$$\Rightarrow \quad -x + y = -4 \qquad \text{................(1)}$$

परंतु जब प्रत्येक पंक्ति में 4 विद्यार्थी और खड़े कर दिए जाते हैं

तब प्रत्येक पंक्ति में विद्यार्थियों की संख्या $= y + 4$

पंक्तियों की संख्या $= x - 2$

$\therefore$ कुल विद्यार्थियों की संख्या $= (x-2)(y+4)$

$$\Rightarrow \quad xy = (x-2)(y+4)$$
$$\Rightarrow \quad xy = xy + 4x - 2y - 8$$
$$\Rightarrow \quad xy - xy = 4x - 2y - 8$$
$$\Rightarrow \quad 0 = 4x - 2y - 8$$
$$\Rightarrow \quad 2(2x - y - 4) = 0$$
$$\Rightarrow \quad 2x - y - 4 = 0$$
$$\Rightarrow \quad 2x - y = 4 \quad \text{..............(2)}$$

समीकरण निकाय

$$-x + y = 4 \quad \text{................(1)}$$
$$2x - y = 4 \quad \text{................(2)}$$

$\because$ समीकरण निकाय में y के गुणांक समान हैं तथा चिह्न असमान हैं इसलिए समीकरण (1) और (2) को जोड़ने पर y निरस्त हो जाएगा।

$$-x + y + 2x - y = 4 + 4$$
$$\Rightarrow \quad x = 8$$

समीकरण (1) में x का मान रखने पर

$$\Rightarrow \quad -8 + y = 4$$
$$\Rightarrow \quad y = 4 + 8$$
$$\Rightarrow \quad y = 12$$

कुल विद्यार्थियों की संख्या $= xy = 8 \times 12 = 96$

अभी तक चर्चा किए सभी तरीकों में से जो भी आपको सुविधाजनक लगे, उसका इस्तेमाल सवालों का हल पता करने में कर सकते हैं।

उदाहरणः–12. दस साल पहले सुनील व विनय की आयु का योग उनके पिता की आयु के एक तिहाई थी। यदि सुनील, विनय से दो साल छोटा है तथा दोनों की आयु का योग उनके पिता की आयु से 14 साल कम है। सुनील, विनय व उनके पिता की वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।

हलः– माना कि विनय की वर्तमान आयु $= x$ वर्ष

सुनील की वर्तमान आयु $= x - 2$ वर्ष

और उनके पिता की वर्तमान आयु $= y$ वर्ष

दस साल पहले,

विनय की आयु $= x - 10$ वर्ष

सुनील की आयु = $(x - 2 - 10)$ वर्ष

पिता की आयु = $y - 10$ वर्ष

$$\therefore \quad (x - 10) + (x - 2 - 10) = \frac{1}{3} \times (y - 10)$$

$$\Rightarrow \quad x - 10 + x - 2 - 10 = \frac{1}{3}(y - 10)$$

$$\Rightarrow \quad 2x - 22 = \frac{1}{3}(y - 10)$$

$$\Rightarrow \quad 3(2x - 22) = y - 10$$

$$\Rightarrow \quad 6x - 66 = y - 10$$

$$\Rightarrow \quad 6x - y = -10 + 66$$

$$\Rightarrow \quad 6x - y = 56 \qquad \text{....................(1)}$$

सुनील व विनय की वर्तमान आयु का योग उनके पिता की आयु से 14 साल कम है।

$$\therefore \quad x + x - 2 = y - 14$$

$$\Rightarrow \quad 2x - 2 = y - 14$$

$$\Rightarrow \quad 2x - y = -14 + 2$$

$$\Rightarrow \quad 2x - y = -12 \qquad \text{..................(2)}$$

समीकरण (1) में समीकरण (2) को घटाने पर

$$6x - y - (2x - y) = 56 - (-12)$$

$$\Rightarrow \quad 6x - y - 2x + y = 68$$

$$\Rightarrow \quad 4x = 68$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{68}{4}$$

$$\Rightarrow \quad x = 17$$

x का मान समीकरण (1) में रखने पर

$$6 \times 17 - y = 56$$

$$102 - y = 56$$

$$y = 102 - 56$$

$$y = 46$$

$\therefore$ विनय की वर्तमान आयु $x = 17$ वर्ष

सुनील की वर्तमान आयु $x - 2 = 17 - 2 = 15$ वर्ष

पिता की वर्तमान आयु $y = 46$ वर्ष

नीचे कुछ विविध तरह के सवाल हैं जिनमें इन तरीकों का इस्तेमाल किया गया है।

उदाहरणः–13. दो अंकों वाली एक संख्या का 7 गुना, अंकों को पलटने पर बनने वाली संख्या के 4 गुने के बराबर है तथा संख्या के अंकों का योग 3 है।तो वह संख्या ज्ञात कीजिए।

हलः– माना दो अंकों वाली संख्या का इकाई का अंक y व दहाई का अंक x है। तब वह संख्या $= 10x + y$ होगी।

$\therefore$ प्रश्नानुसार $7(10x + y) = 4(10y + x)$

$$\Rightarrow 70x + 7y = 40y + 4x$$
$$\Rightarrow 70x - 4x - 40y + 7y = 0$$
$$\Rightarrow 66x - 33y = 0$$
$$\Rightarrow 33(2x - y) = 0$$
$$\Rightarrow 2x - y = 0 \qquad ....(1)$$

तथा $x + y = 3 \qquad ....(2)$

समीकरण (1) और (2) जोड़ने पर

$$2x - y + x + y = 0 + 3$$
$$\Rightarrow 3x = 3$$
$$\Rightarrow x = \frac{3}{3}$$
$$\Rightarrow x = 1$$

समीकरण (2) में x का मान रखने पर

$$\Rightarrow x + y = 3$$
$$\Rightarrow 1 + y = 3$$
$$\Rightarrow y = 3–1$$
$$\Rightarrow y = 2$$

अतः वह संख्या 12 है।

उदाहरणः–14. निम्नलिखित समीकरण में चरों के मान ज्ञात कीजिए।

$2x - 5y = -8$;

$x - 4y = -7$

हलः– समीकरण $2x - 5y = -8 \qquad ....(1)$

$x - 4y = -7$ ....(2)

समीकरण (2) से $x = -7 + 4y$ ....(3)

x के इस मान को समीकरण (1) में रखने पर

$\Rightarrow \quad 2(-7 + 4y) - 5y = -8$

$\Rightarrow \quad -14 + 8y - 5y = -8$

$\Rightarrow \quad 3y = -8 + 14$

$\Rightarrow \quad 3y = 6$

$\Rightarrow \quad y = \dfrac{6}{3} = 2$

y के इस मान को समीकरण (3) में रखने पर

$\Rightarrow \quad x = -7 + 4y$

$\Rightarrow \quad x = -7 + 4(2)$

$\Rightarrow \quad x = -7 + 8$

$\Rightarrow \quad x = 1$

अतः $x = 1, y = 2$

उदाहरणः–15. निम्नलिखित समीकरण को हल कीजिए–

$41x - 17y = 99$;

$17x - 41y = 75$.

हलः– समीकरण $41x - 17y = 99$ ....(1)

$17x - 41y = 75$ ....(2)

समीकरण (1) में समीकरण (2) को जोड़ने पर

$41x - 17y + 17x - 41y = 99 + 75$

$\Rightarrow \quad 58x - 58y = 174$

$\Rightarrow \quad 58(x - y) = 174$

$\Rightarrow \quad x - y = \dfrac{174}{58}$

$\Rightarrow \quad x - y = 3$ ....(3)

समीकरण (1) में (2) को घटाने पर

$41x - 17y - (17x - 41y) = 99 - 75$

$\Rightarrow \quad 41x - 17y - 17x + 41y = 24$

$\Rightarrow \quad 24x + 24y = 24$

$$\Rightarrow \quad x + y = \frac{24}{24}$$

$$\Rightarrow \quad x + y = 1 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

अब समीकरण (3) व (4) को जोड़ने पर

$$\Rightarrow \quad x - y + x + y = 3 + 1$$

$$\Rightarrow \quad 2x = 4$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{4}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x = 2$$

जब समीकरण निकाय के अलग–अलग चरों के गुणांक समान हो तो पहले दोनों समीकरणों को जोड़कर तथा दूसरी बार समीकरणों को घटाकर दो नये समीकरण प्राप्त किये जाते हैं।

समीकरण (3) में $x = 2$ रखने पर

$$\Rightarrow \quad x - y = 3$$

$$\Rightarrow \quad 2 - y = 3$$

$$\Rightarrow \quad 2 - 3 = y$$

$$\Rightarrow \quad y = -1$$

यहाँ $x = 2;\ y = -1$

उदाहरण:–16. एक त्रिभुज ABC में A = $x°$, B = $3x°$ और C = $y°$ है। यदि $3y° - 5x° = 30°$ हो तब सिद्ध कीजिए कि यह एक समकोण त्रिभुज है।

हल:– ABC के तीनों कोणों के मान क्रमशः A = $x°$, B = $3x°$ व C = $y°$ है।

$\because$ त्रिभुज के तीनों अंतःकोणों का योग 180° होता है।

$\therefore$ A + B + C = 180°

A, B, C के मान रखने पर

$$x° + 3x° + y° = 180°$$

$$4x° + y° = 180°$$

$$y° = 180° - 4x° \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

दिया है $3y° - 5x° = 30° \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$

समीकरण (1) से y का मान (2) में रखने पर

$$\Rightarrow \quad 3\,[180° - 4x°] - 5x° = 30°$$

$$\Rightarrow \quad 3 \times 180° - 3 \times 4x° - 5x° = 30°$$

$$\Rightarrow \quad 540° - 12x° - 5x° = 30°$$

$$\Rightarrow \quad -17x° = 30° - 540°$$

$$\Rightarrow \quad -17x^\circ = -510^\circ$$

$$\Rightarrow \quad x^\circ = \frac{510^\circ}{17^\circ}$$

$$x^\circ = 30^\circ$$

x के मान को (1) में रखने पर

$$y^\circ = 180^\circ - 4(30^\circ)$$

$$\Rightarrow \quad y^\circ = 180^\circ - 120^\circ$$

$$\Rightarrow \quad y^\circ = 60^\circ$$

$$\therefore \quad A = x^\circ = 30^\circ$$

$$B = 3x^\circ = 3 \times 30^\circ = 90^\circ$$

$$C = y^\circ = 60^\circ$$

स्पष्टतः ABC के तीनों कोणों में एक कोण का मान 90° तथा शेष दोनों कोण न्यूनकोण हैं जिनकी माप 30° व 60° हैं।

अतः दिया गया ABC एक समकोण त्रिभुज है।

उदाहरणः–17. एक नाव नदी की धारा के बहाव की दिशा में 44 किमी. तथा बहाव की विपरीत दिशा में 30 किमी. की दूरी 10 घण्टे में तय करती है। यही नाव धारा के बहाव की दिशा में 55 किमी. तथा बहाव की विपरीत दिशा में 40 किमी. की दूरी 13 घण्टे में तय करती है। धारा के बहाव की दिशा एवं विपरीत दिशा में नाव की चाल ज्ञात कीजिए।

हलः– माना धारा के बहाव की दिशा में नाव की चाल $= x$ किमी./घण्टा

तथा धारा के बहाव की विपरीत दिशा में नाव की चाल $= y$ किमी./घण्टा

बहाव की दिशा में 44 किमी. की दूरी तय करने में लगा समय $= \frac{\text{दूरी}}{\text{चाल}}$

$$= \frac{44}{x} \text{ घण्टे}$$

बहाव की विपरीत दिशा में 30 किमी. की दूरी तय करने में लगा समय $= \frac{30}{y}$ घण्टे

$\therefore$ प्रश्नानुसार

धारा के बहाव की दिशा व उसके विपरीत दिशा में दूरी तय करने में लगा समय = 10 घण्टे

$$\therefore \quad \frac{44}{x}+\frac{30}{y} = 10 \qquad \text{................(1)}$$

चूँकि बहाव की दिशा में 55 किमी. तथा विपरीत दिशा में 40 किमी. की दूरी तय करने में लगा समय = 13 घण्टे

$$\therefore \quad \frac{55}{x}+\frac{40}{y} = 13 \qquad \text{....................(2)}$$

अब समीकरण (1) और (2) में $\frac{1}{x} = u$, और $\frac{1}{y} = v$ रखने पर हमें निम्न दो समीकरण (3) व (4) मिलते हैं।

$$\left\{\because \text{चाल} = \frac{\text{दूरी}}{\text{समय}}\right\}$$

$$44u + 30v = 10$$

$$22u + 15v = 5 \qquad \text{..................(3)}$$

तथा $$55u + 40v = 13 \qquad \text{..................(4)}$$

समीकरण (3) में 55 व समीकरण (4) में 22 का गुणा करके घटाने पर

$$\begin{aligned} 1210u + 825v &= 275 \\ -1210u - 880v &= -286 \\ \hline -55v &= -11 \end{aligned}$$

$$v = \frac{11}{55}$$

$$v = \frac{1}{5} \qquad y = 5$$

v का मान समीकरण (3) में रखने पर

$$22u + 15\ \frac{1}{5} = 5$$

$$22u + 3 = 5$$

$$22u = 5 - 3$$

$$u = \frac{2}{22}$$

$$u = \frac{1}{11} \qquad x \quad 11$$

$$\Rightarrow \quad x = 11 \qquad \Rightarrow \quad y = 5$$

अतः धारा के बहाव की दिशा में नाव की चाल = 11 किमी./घंटा एवं धारा के बहाव की विपरीत दिशा में नाव की चाल = 5 किमी./घंटा

सोचें व चर्चा करें

दिए गए समीकरण निकाय

$2x + 5y = 1$

$2x + 3y = 3$ को विभिन्न समूहों में बँटकर अलग–अलग विधियों से हल करें प्राप्त मानों पर चर्चा करें कि क्या प्रत्येक विधि से प्राप्त मान समान हैं?

प्रश्नावली–2

1. जाँचिए कि (अ) व (ब) में कौन दिए गए समीकरणों के हल हैं?

(अ) $x = 2, y = 5$ (ब) $x = -1, y = 3$

(i) $x + y = 7$ (ii) $2x + 5y = 13$

(iii) $2x - 3y = -11$ (iv) $5x + 3y = 4$

2. जाँचिए कि (अ) व (ब) में कौन दिए गए समीकरणों के हल हैं?

(अ) $x = 3, y = -1$ (ब) $x = \frac{1}{2},\ y = \frac{1}{3}$

(i) $2x + 5y = 1;$ $2x + 3y = 3.$

(ii) $x + y = 5xy;$ $3x + 2y = 13xy.$

(iii) $2x - \frac{3}{y} = 9;$ $3x + \frac{7}{y} = 2$

(iv) $2x + 5y = \frac{8}{3};$ $3x - 2y = \frac{5}{6}$

3. निम्न समीकरणों को किसी भी विधि से हल कीजिए–

(i) $x - y = -1;$ $3x - 2y = 12.$

(ii) $x - 2y = 5;$ $2x - 4y = 6$

(iii) $x + y = 6;$ $x = y + 2.$

(iv) $5x - 8y = -1$ $3x - \frac{24}{5}y + \frac{3}{5} = 0$

(v) $3x - 4y - 1 = 0;$ $2x - \frac{8}{3}y + 5 = 0$ (vi) $x + 2y = 8;$ $2x + 4y = 16$

4. निम्नलिखित समीकरण निकायों को दिए गए चरों के लिए हल कीजिए–

(i) $x + y = 7;$ $x - y = -1.$ (ii) $2x + y = 8;$ $x - 2y = -1$

(iii) $4x + 3y = 5;$ $2x - y = 2$ (iv) $\sqrt{7}x + \sqrt{11}y = 0;$ $\sqrt{3}x - \sqrt{5}y = 0$

5. 15 किग्रा. चाय व 17 किग्रा. कॉफी का मूल्य 183 रुपये तथा 25 किग्रा. चाय व 13 किग्रा. कॉफी का मूल्य 213 रुपये है। 7 किग्रा. चाय और 1 किग्रा. कॉफी का मूल्य ज्ञात कीजिए।

6. एक व्यक्ति के पास कुछ कबूतर व कुछ गायें हैं जिनकी आँखों की कुल संख्या 120 तथा पैरों की कुल संख्या 180 है। बताइए व्यक्ति के पास कितनी गायें व कबूतर हैं?

7. एक थैले में 50 पैसे और 25 पैसे के कुल 94 सिक्के हैं। यदि थैले में कुल 29.75 रुपये हैं, तब बताइए कि थैले में 25 पैसे और 50 पैसे के सिक्कों की संख्या कितनी है?

8. दो संख्याओं का योग 25 तथा उनके व्युत्क्रमों का योग $\frac{1}{4}$ है। संख्याएँ ज्ञात कीजिए । [संकेत– $(x-y)^2 = (x + y)^2 - 4xy$)]

9. दो संख्याओं का अंतर 14 तथा उनके वर्गों का अंतर 448 है। संख्याएँ ज्ञात कीजिए।
[संकेत– $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$]

10. दो संख्याओं का गुणनफल 45 तथा उनका योग 14 है। संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

11. पाँच वर्ष पूर्व मेरी आयु मेरे पुत्र की आयु की तिगुनी थी। दस वर्ष पश्चात् मेरी आयु, मेरे पुत्र की आयु की दुगुनी हो जायेगी। मेरी व मेरे पुत्र की वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।

12. दो स्थानों A और B की दूरी 70 किमी. है। दो कारें A व B से चलना प्रारंभ करती हैं। यदि वे एक दिशा में चलती हैं तब 7 घंटे बाद एक–दूसरे से मिलती हैं और यदि वे एक–दूसरे की ओर चलती हैं तब 1 घंटे बाद मिलती हैं। कारों की चाल ज्ञात कीजिए।

13. एक विद्यालय के दो कमरों A और B में कुछ विद्यार्थी बैठे हैं। जब A से 10 विद्यार्थी B में भेज दिए जाते हैं तो दोनों कमरों में विद्यार्थियों की संख्या समान हो जाती है और जब 20 विद्यार्थी B से A में भेज दिए जाते हैं तब A के विद्यार्थियों की संख्या B से दुगुनी हो जाती है। प्रत्येक कमरे के विद्यार्थियों की संख्या ज्ञात कीजिए।

14. जब किसी आयत की लंबाई में 5 इकाई की कमी तथा चौड़ाई में 2 इकाई की वृद्धि कर दी जाती है तब उसका क्षेत्रफल 80 वर्ग इकाई कम हो जाता है। जब उसकी लंबाई में 10 इकाई की वृद्धि और चौड़ाई में 5 इकाई की कमी कर दी जाती है तो आयत का क्षेत्रफल 50 वर्ग इकाई बढ़ जाता है। आयत की लंबाई और चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

क्या किसी समीकरण निकाय के अवलोकन से ही आप उसके हल के बारे में बता पाएँगे कि उसके हल हैं अथवा नहीं।

हाँ, यह संभव है लेकिन इसके लिए हमें समीकरण निकाय के चरों एवं अचर पदों के गुणांकों के बीच के संबंधों को जानने की आवश्यकता होगी।

निम्नलिखित समीकरण निकाय को देखिए–

$$2x + 3y = 7 \quad \text{.................(1)}$$

$$6x + 9y = 11 \quad \text{.................(2)}$$

समीकरण (1) में x का गुणांक 2, y का गुणांक 3 व अचर पद 7 है। अब यदि 2, 3 व 7 को क्रमशः a_1, b_1 व c_1 लिखा जाए तथा समीकरण (2) के x, y के गुणांक व अचर पद को क्रमशः a_2, b_2 व c_2 लिखा जाए तब दिए गए समीकरण निकाय को निम्नलिखित रूप में लिखा जा सकता है–

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$

ऐसे ही हम अन्य समीकरण निकायों को भी लिख सकते हैं।

समीकरणों के समान चरों के गुणांकों व उनके अचर पदों के अनुपातों के बीच के संबंधों को तालिका में दर्शाया गया है जिनसे हम समीकरण निकाय के हल के बारे में जान पाते हैं।

क्र.	समान चरों के अनुपातों में संबंध (प्रतिबंध या शर्त)	समीकरण निकाय के हल	ज्यामितीय अर्थ
1.	$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$	अद्वितीय हल प्राप्त होता है	समीकरण निकाय दो प्रतिच्छेदी रेखाएँ प्रदर्शित करता है।
2.	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$	कोई भी हल प्राप्त नहीं होता है।	समीकरण निकाय दो समान्तर रेखाएँ प्रदर्शित करता है।
3.	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$	अनंततः अनेक हल प्राप्त होते हैं।	समीकरण निकाय संपाती रेखाएँ प्रदर्शित करता है।

आइए इन संबंधों के आधार पर समीकरण के हल के बारे में पता करते हैं–

उदाहरणः–18. दिए गए समीकरणों का हल किस प्रकार का है? पता करें।

$3x + 5y = 12$ ....(1)

$4x + 2y = 5$ ....(2)

हलः– समीकरण $3x + 5y = 12$ में $a_1 = 3,\ b_1 = 5, c_1 = 12$

$4x + 2y = 5$ $a_2 = 4, b_2 = 2, c_2 = 5$

$\because$ यहाँ $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ $\therefore$ समीकरण का अद्वितीय हल है।

उदाहरणः–19. समीकरण $5x + 3y = 12$

एवं $15x + 9y = 15$ का हल ज्ञात कीजिए।

हल : समीकरण $5x + 3y = 12$ में $a_1 = 5,\ b_1 = 3, c_1 = 12$

एवं समीकरण $5x + 9y = 15$ में $a_2 = 15, b_2 = 9, c_2 = 15$

$$\frac{a_1}{a_2}\quad \frac{5}{15}, \frac{b_1}{b_2}\quad \frac{3}{9}, \frac{c_1}{c_2}\quad \frac{12}{15}$$

$$\frac{a_1}{a_2}\quad \frac{1}{3}, \frac{b_1}{b_2}\quad \frac{1}{3}, \frac{c_1}{c_2}\quad \frac{4}{5}$$

हम देखते हैं कि $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

$\therefore$ समीकरण का कोई भी हल नहीं है।

उदाहरणः–20. समीकरण $15x - 3y = 14$

एवं $60x - 12y = 56$ का हल ज्ञात कीजिए।

हलः– समीकरण $15x - 3y = 14$ में $a_1 = 15,\ b_1 = -3, c_1 = 14$

एवं $60x - 12y = 56$ में $a_2 = 60, b_2 = -12, c_2 = 56$

यहाँ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{15}{60} = \frac{1}{4}$, $\frac{b_1}{b_2} = \frac{-3}{-12} = \frac{1}{4}$, $\frac{c_1}{c_2} = \frac{14}{56} = \frac{1}{4}$

स्पष्टतः $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

$\therefore$ समीकरण के अनंततः अनेक हल हैं।

करके देखें

निम्न तालिका को पूरा कीजिए–

क्र.	समीकरण निकाय	x के गुणांकों का अनुपात	y के गुणांकों का अनुपात	अचर पदों का अनुपात	अनुपातों में प्राप्त संबंध	समीकरण निकाय का हल	समी. निकाय का ज्यामितीय अर्थ
1.	$2x-3y=1$ $2x-4y=-4$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{2} = 1$	$\frac{b_1}{b_2} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$	$\frac{c_1}{c_2} = \frac{1}{-4} = -\frac{1}{4}$	$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$	अद्वितीय हल	दो प्रतिच्छेदी रेखाएं
2.	$x+2y=5$ $2x-3y=-4$	....	....	....	....	....	....
3.	$4x-5y=3$ $5x-4y=5$	....	....	....	....	....	....
4.	$2x+3y=5$ $-4x-6y=8$	....	....	....	....	....	....
5.	$3x-4y=1$ $6x-8y=-15$	....	....	....	....	....	....
6.	$x+y=4$ $2x+2y=8$	....	....	....	....	....	....
7.	$5x-6y=4$ $10x-12y=8$	....	....	....	....	....	....

E5K5Y5

आपने अब तक विभिन्न परिस्थितियों से निर्मित समीकरण निकाय को हल करके उनके चरों के मान प्राप्त करने के तरीकों को देखा जिसमें चरों के गुणांक हमें ज्ञात होते थे पर यदि समीकरण निकाय के किसी एक चर का गुणांक अज्ञात हो अर्थात् समीकरण निकाय निम्नलिखित रूप में हो–

$$2x + 3y - 5 = 0;$$

$$kx - 6y - 8 = 0.$$

तब भी हम समीकरण निकाय को हल करके उनके चरों x, y और k का मान ज्ञात कर सकते हैं?

उदाहरणः–21. k के किस मान के लिये दिए गए समीकरण निकाय का अद्वितीय हल होगा–

$$x - ky = 2,\ 3x + 2y = -5$$

हलः– दिया गया समीकरण निकाय

$$x - ky - 2 = 0,\ 3x + 2y + 5 = 0$$

यहाँ $a_1 = 1,\quad b_1 = -k,\quad c_1 = -2$

$a_2 = 3,\quad b_2 = 2,\quad c_2 = 5$

समीकरण निकाय का एक अद्वितीय हल है–

अतः $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$

$\Rightarrow \quad \dfrac{1}{3} \neq \dfrac{-k}{2}$

$\Rightarrow \quad \dfrac{2}{-3} \neq k$

$\Rightarrow \quad k \neq -\dfrac{2}{3}$

k के $\frac{-2}{3}$ के मान अतिरिक्त अन्य सभी वास्तविक मानों के लिए समीकरण निकाय का अद्वितीय हल होगा।

उदाहरणः—22. k का मान ज्ञात कीजिए जब दिए गए समीकरण निकाय के अनंततः अनेक हल होंगे।

$$(k-3)\,x + 3y = k; \qquad kx + ky = 12$$

हलः— समीकरण निकाय

$(k-3) + 3y = k; \qquad kx + ky = 12$ में

$a_1 = k-3, \qquad b_1 = 3, \qquad c_1 = k$

$a_2 = k \qquad b_2 = k \qquad c_2 = 12$

चूँकि समीकरण निकाय के अनंत अनेक हल हैं

अतः $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ से

$$\frac{k-3}{k} = \frac{3}{k} = \frac{+k}{+12}$$

$\Rightarrow \frac{k-3}{k} = \frac{3}{k}$ ....(1) $\quad \frac{3}{k} = \frac{k}{12}$ ....(2) $\quad \frac{k-3}{k} = \frac{k}{12}$ ....(3)

$\Rightarrow k-3 = 3 \qquad \Rightarrow k^2 = 36 \qquad \Rightarrow k^2 = 12k - 36$

$\Rightarrow k = 3 + 3 \qquad \Rightarrow k = \sqrt{36} \qquad \Rightarrow k^2 - 12k + 36 = 0$

$\Rightarrow k = 6 \qquad \Rightarrow k = \pm\ 6 \qquad \Rightarrow k - 6k - 6k + 36 = 0$

$\Rightarrow k(k-6) - 6(k-6) = 0$

$\Rightarrow (k-6)\,(k-6) = 0$

$k = 6$

k का वही मान सत्य होगा जो सभी समीकरणों को संतुष्ट करता है । यहाँ 6 ही तीनों समीकरणों को संतुष्ट करता है इसलिए k का मान 6 होगा ।

E5U1Z5

प्रश्नावली–3

1. दर्शाइए कि निम्नलिखित समीकरण निकाय का एक अद्वितीय हल है–

   $3x + 5y = 12$

   $5x + 3y = 4$

2. दर्शाइए कि निम्नलिखित समीकरण निकाय के अनंततः अनेक हल हैं–

   $2x - 3y = 5;$

   $6x - 9y = 15$

3. k के मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए निम्नलिखित समीकरण निकायों का कोई भी हल न हो–

   (i) $8x + 5y = 9;$ $kx + 10y = 15$

   (ii) $kx + 3y = 3;$ $12x + ky = 6$

   (iii) $kx - 5y = 2;$ $6x + 2y = 7$

4. निम्नलिखित समीकरण निकायों के एक अद्वितीय हल के लिए k का मान ज्ञात कीजिए–

   (i) $kx + 2y = 5;$ $3x + y = 1$

   (ii) $x - 2y = 3;$ $3x + ky = 1$

   (iii) $kx + 3y = k - 3;$ $12x + ky = k$

   (iv) $4x - 5y = k;$ $2x - 3y = 12$

5. निम्नलिखित समीकरण निकायों के लिए k का मान ज्ञात कीजिए जबकि समीकरण निकायों के अनंततः अनेक हल हों।

   (i) $2x + 3y = 7;$
   $(k - 1)\,x + (k + 2)\,y = 3k$

   (ii) $kx + 2y - 4 = 0;$ $5x - 3y + 6 = 0$

   (iii) $3x + ky = 7;$ $2x - 5y = 1$

   (iv) $4x - 6y = k;$ $2x - 3y = 12$

6. यदि $x = 2; y = 4$ है तो समीकरण $7x - 4y = p$ में p का मान ज्ञात कीजिए।

7. k का मान ज्ञात कीजिए यदि एक सरल रेखा $2x - ky = 9$ बिन्दु $(1,-1)$ से गुजरती है।

8. जाँचिए कि निम्नलिखित समीकरण निकाय अद्वितीय हल रखता है या कोई हल नहीं रखता अथवा अनंततः अनेक हल रखता है। यदि अद्वितीय हल रखता हो तब चरों के मान ज्ञात कीजिए–

   $4x + 7y = 18$

   $2x + y = 4$

अभी तक हमने विभिन्न परिस्थितियों पर आधारित कथनों को समीकरण निकाय के रूप में लिखकर उनके चरों के मान प्राप्त किये, क्या हम किसी समीकरण निकाय को कथन के रूप में लिख सकते हैं?

आइए, निम्नलिखित समीकरण निकाय को कथन के रूप में लिखकर देखते हैं–

$x + y = 45$ ....(1)

$x - y = 13$ ....(2)

यदि हम x को एक संख्या तथा y को दूसरी संख्या मान लें तो समीकरण (1) और (2) को कथन के रूप में निम्न तरीके से लिख सकते हैं।

दो संख्याओं का योग 45 है तथा उनका अंतर 13 है। तब संख्याएँ ज्ञात कीजिए। या x एक किताब का और y एक कॉपी का रूपये में मूल्य है । एक किताब और एक कॉपी के मूल्यों का योग 45 है और उनके मूल्यों का अंतर 13 है।

क्या इसी प्रश्न से और कथन बनाएँ जा सकते हैं? ऐसे दो कथन और बनाइए।

उदाहरणः–23. समीकरण निकाय $\frac{x-1}{y} = \frac{1}{2}$ ....(1)

$$\frac{x}{y+3} = \frac{3}{2} \text{ ....(2)}$$

को कथन के रूप में लिखिए।

हलः– यदि $\frac{x}{y}$ एक भिन्न है जिससे अंश x तथा हर y है। तब उपरोक्त समीकरणों को कथन के रूप में लिखा सकता है ।

''किसी भिन्न के अंश में 1 घटाने पर वह भिन्न $\frac{1}{2}$ के बराबर हो जाता है तथा यदि उसके हर में 3 जोड़ दिया जाए तो भिन्न $\frac{3}{2}$ के बराबर हो जाता है।''

समीकरण निकाय को कथन के रूप में लिखने के कई संभव तरीके हो सकते हैं। उपरोक्त समीकरणों को आप अन्य परिस्थितियों में भी कथन के रूप में लिख सकते हैं।

करके देखें

निम्नलिखित समीकरण निकाय को कथन के रूप में लिखिए।

(i) $x + y = 60$ (ii) $x + y = 5$

$x = 3y$ $xy = 6$

1. एक घात वाले दो चरों से बने समीकरणों के आलेख सदैव सरल रेखा होती है। इसीलिए एक घात वाले दो चरों के समीकरण को रैखिक समीकरण कहते हैं।
2. जब दो चरों के रैखिक समीकरणों का आलेख दो प्रतिच्छेदी रेखाएँ होती हैं तब समीकरणों का एक अद्वितीय हल होता है।
3. जब दो चरों के रैखिक समीकरणों का आलेख दो समांतर रेखाएँ होती हैं तब समीकरणों का कोई भी हल नहीं होता है।
4. जब दो चरों के रैखिक समीकरणों का आलेख संपाती रेखाएँ होती हैं तब समीकरणों के अनंततः अनेक हल होते हैं।
5. दो चरों के रैखिक समीकरण निकाय को निम्नलिखित रूप में लिखा जा सकता है–

$a_1x + b_1y = c_1$

$a_2x + b_2y = c_2$

उपरोक्त निकाय में यदि,

(i) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ हों तो रेखाएँ समान्तर होती हैं व समीकरण निकाय का कोई भी हल नहीं होता है।

(ii) $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ हो तो रेखाएँ प्रतिच्छेदी होती हैं व समीकरण निकाय का एक अद्वितीय हल होता है।

(iii) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ हो रेखाएँ संपाती होती हैं व समीकरण निकाय के अनंततः अनेक हल होते हैं। वास्तव में दिए गए दोनों समीकरण एक जैसे ही होते हैं।

उत्तरमाला–1

1. (i) $3x + 6y = 3900$, $x + 2y = 1300$ (ii) $x + y = 16$, $x - y = 8$
   (iii) $2x + y = 160$, $4x + 2y = 300$ (iv) $x - 7y + 42 = 0$, $x - 3y - 6 = 0$
   (v) $x + y = 90$, $x = 2y$
2. (अ) $x = 2, y = 3$ (ब) अनेक हल
   (स) कोई भी हल नहीं (द) $x = -1, y = 2$

उत्तरमाला–2

1. (i) (अ) (ii) (ब) (iii) (अ), (ब)
   (iv) (ब)
2. (i) (अ) (ii) (ब) (iii) (अ)
   (iv) (ब)
3. (i) $x = 14,\ y = 15$ एक अद्वितीय हल।
   (ii) कोई हल नहीं समांतर रेखाएँ
   (iii) $x = 4, y = 2$ एक अद्वितीय हल
   (iv) अनंततः अनेक हल, संपाती रेखाएँ।
   (v) कोई हल नहीं, समांतर रेखाएँ।
   (vi) अनंततः अनेक हल, संपाती रेखाएँ।
4. (i) $x = 3,\ y = 4$ (ii) $x = 3, y = 2$
   (iii) $x = 1.1, y = 0.2$ (iv) $x = 0,\ y = 0$
5. 43.80 रूपये
6. गायों की संख्या = 30, कबूतरों की संख्या = 30
7. 25 पैसे के सिक्कों की संख्या = 69, 50 पैसे के सिक्कों की संख्या = 25
8. संख्याएँ = 20, 5
9. संख्याएँ = 23, 9
10. संख्याएँ = 9, 5
11. मेरी आयु = 50 वर्ष, पुत्र की आयु = 20 वर्ष
12. 40 किमी./घण्टा, 30 किमी./घण्टा
13. 100, 40
14. 40 इकाई, 30 इकाई

उत्तरमाला–3

3.	(i) $k = 16$	(ii) $k = -6$	(iii) $k = -15$
4.	(i) $k \quad 6$	(ii) $k \quad -6$	(iii) $k \quad 6$
	(iv) $k \quad \frac{10}{3}$		
5.	(i) $k = 7$	(ii) $k = \frac{-10}{3}$	
	(iii) k का कोई मान नहीं	(iv) $k = 24$	
6.	$p = -2$	7. $k = 7$	
8.	अद्वितीय हल रखता है, $x = 1, y = 2$		

अध्याय

03

एक चर का द्विघात समीकरण

E63X2F

एक व्यक्ति अपनी जमीन के किसी भाग में 800 वर्गमीटर क्षेत्रफल का एक ऐसा आयताकार बगीचा बनाना चाहता है, जिसकी लंबाई उसकी चौड़ाई से दुगुनी हो। व्यक्ति को बगीचे की लंबाई और चौड़ाई कितनी रखनी चाहिए?

यदि बगीचे की चौड़ाई को x मीटर मान लिया जाए तब उसकी लंबाई $2x$ मीटर होगी।

चूँकि बगीचा आयताकार है,

अतः बगीचे का क्षेत्रफल = बगीचे की लंबाई   बगीचे की चौड़ाई

$$800 \quad 2x.x$$

या $$\frac{800}{2} \quad x^2$$

या $$x^2 \quad 400$$

या $$x^2 \quad 20^2$$

या $$x^2 \quad 20^2 \quad 0 \qquad ....\ (i)$$

x के जिन मानों के लिए (i) के दोनों पक्ष बराबर होंगे। वे मान ही बगीचे की चौड़ाई को दर्शाएँगे।

चौड़ाई पता होने पर बगीचे की लंबाई भी मालूम हो जायेगी।

सवाल को बीजीय रूप में लिखना

हमने उपर देखा कि $x^2 \quad 20^2 \quad 0$ से x का मान पता कर सकते हैं। यह समीकरण दरअसल दिए गए सवाल में दिखाई गई परिस्थिति का बीजीय निरूपण है।

आइए हम कुछ और परिस्थितियों की चर्चा करें और उनके बीजीय रूप का अवलोकन करें।

नरेश को अपने घर के सामने 500 वर्गमीटर क्षेत्रफल वाली एक समकोण त्रिभुजाकार क्यारी बनवानी है, जिसमें वह आधार भुजा की लंबाई, शीर्षलंब की लंबाई से 30 मीटर अधिक रखना चाहता है।

क्यारी का आकार क्या होना चाहिए यह जानने के लिए हम शीर्षलंब की लंबाई को x मीटर मानें तब आधार भुजा की लंबाई $x \quad 30$ मीटर होनी चाहिए।

चूँकि समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ शीर्षलंब की लंबाई आधार भुजा की लंबाई

$$500 \quad \frac{1}{2} \quad x \; x \quad 30$$

$$500 \quad 2 \quad x^2 \quad 30x$$

$$x^2 \quad 30x \quad 1000 \quad 0 \quad \text{............} \quad \text{(ii)}$$

समीकरण (ii) प्रश्न का बीजीय रूप है। x के जिन मानों के लिए (ii) के दोनों पक्ष बराबर होंगे वे मान ही त्रिभुजाकार क्यारी के शीर्षलंब की माप होंगे।

द्विघात समीकरण : ऊपर के दोनों बीजीय निरूपण में x की अधिकतम घात 2 है इस द्विघातीय बहुपद को शामिल करते हुए एक बीजीय समीकरण मिलता है जिससे हम हल ढूँढ सकते हैं।ऐसे ही कुछ उदाहरण हम आगे देखेंगे।

अब हम निम्नलिखित कथन पर विचार करते हैं –

दो क्रमागत संख्याओं का गुणनफल शून्य है।

यदि पहली संख्या x हो,तब दूसरी संख्या $x+1$ होगी।

$$x \; x \quad 1 \quad 0$$

$$x^2 \quad x \quad 0 \quad \text{..............} \quad \text{(iii)}$$

समीकरण (i), (ii), (iii) में आप देख रहे हैं कि इनमें से प्रत्येक में केवल एक चर है और उसकी अधिकतम घात दो है। प्रत्येक समीकरण में ऐसा एक पद अनिवार्य रूप से उपस्थित है जिसकी घात दो है। ये सभी एक चर के द्विघात समीकरण हैं।

आप जानते हैं कि बहुपद $ax^2 \quad bx \quad c$ घात 2 का एक चर का बहुपद है (जहाँ a, b, c वास्तविक संख्याएँ और $a \quad 0$) इसे द्विघातीय बहुपद कहते हैं। इस द्विघातीय बहुपद को शून्य के बराबर रखने पर यह एक समीकरण बन जाता है।

अर्थात $ax^2 \quad bx \quad c \quad 0$

चूँकि समीकरण में एक ही चर है तथा चर की अधिकतम घात दो है अतः इसे एक चर का द्विघात समीकरण कहा जाता है। यह द्विघात समीकरण या वर्ग समीकरण का मानक या व्यापक रूप है।

कुछ और द्विघात समीकरण नीचे दिए गए हैं –

(i) $x^2 \quad 2x \quad 0$	(ii) $x \quad 1 \quad x \quad 2 \quad 0$	(iii) $x^2 \quad 0$
(iv) $x^2 \quad 9 \quad 0$	(v) $z^2 \quad 3 \quad 0$	(vi) $x^2 \quad \sqrt{5}x \quad 6 \quad 0$
(vii) $3y^2 \quad 6y \quad 6 \quad 0$	(viii) $x \quad 2^{\;2} \quad 0$	(ix) $3m \quad 2m^2 \quad 5 \quad 0$

$x^2 \quad 5\sqrt{x} \quad 3 \quad 0$ द्विघात (वर्ग) समीकरण नहीं है क्योंकि समीकरण का बायाँ भाग बहुपद नहीं हैं।

करके देखें

निम्नलिखित में से एक चर का द्विघात (वर्ग) समीकरण चुनिए –

(i) $x^2 \quad 3x \quad 0$	(ii) $3x^2 \quad 2^2 \quad 0$	(iii) $x \quad 2 \quad 0$
(iv) $x^2 \quad y \quad 9$	(v) $x^2 \quad 9 \quad 0$	(vi) $x \quad 5y \quad 0$
(vii) $x \quad 1 \quad x \quad 2 \quad 0$	(viii) $x^2 \quad 2\sqrt{x} \quad 1 \quad 0$	(ix) $x \quad 3\ ^2 \quad 0$
(x) $x \ x \quad 5 \quad 0$	(xi) $x^2 \quad \sqrt{5}x \quad 3 \quad 0$	(xi) $y^2 \quad z^2 \quad 3 \quad 0$
(xiii) $x^2 \quad 3\sqrt{x} \quad 2 \quad 0$	(xiv) $x^2 \quad \sqrt{3}x \quad 2 \quad 0$	(xv) $x \quad 1 \quad x \quad 5 \quad 0$

प्रश्नावली 1

1. निम्नलिखित में से वर्ग समीकरण चुनिए –

(i) $x^2 \quad 3x \quad 2 \quad 0$	(ii) $x^2 \quad \frac{1}{x} \quad 1$
(iii) $9x^2 \quad 100x \quad 20 \quad 0$	(iv) $x^2 \quad 3\sqrt{x} \quad 2 \quad 0$
(v) $x \quad \frac{2}{x} \quad x$	(vi) $\sqrt{5}x^2 \quad 3x \quad \frac{1}{2} \quad 0$
(vii) $x^2 \quad 10x \quad 0$	(viii) $x \quad y \quad 10$
(ix) $x \quad 5 \quad 7$	(x) $x \ x \quad 8 \quad 0$

द्विघात समीकरण के मूल (Roots of Quadratic Equation)

$p(x) \quad x^2 \quad 3x \quad 2$ एक द्विघातीय बहुपद है। इस बहुपद के शून्यक x के वे मान होंगे जिनके लिए $p \ x$ शून्य होगा। शून्यक ज्ञात करने के लिए पहले $x^2 \quad 3x \quad 2$ के गुणनखण्ड प्राप्त कर लेते हैं।

$$x^2 \quad 3x \quad 2 \quad x^2 \quad 2x \quad x \quad 2$$
$$x^2 \quad 2x \quad 1 \ x \quad 2$$
$$x \ x \quad 2 \quad 1 \ x \quad 2$$
$$x \quad 2 \quad x \quad 1$$

बहुपद $x^2 \quad 3x \quad 2$ का मान शून्य होगा यदि $x \quad 2 \quad x \quad 1 \quad 0$

$$x \quad 2 \quad 0 \qquad \text{या} \qquad x \quad 1 \quad 0$$

$x \quad 2 \quad 0$ या $x \quad 1 \quad 0$

$x \quad 2$ या $x \quad 1$

अर्थात् $x^2 \quad 3x \quad 2$ के शून्यक 2 व 1 हैं।

अब वर्ग समीकरण $x^2 \quad 3x \quad 2 \quad 0$ में x के ऐसे मान पता करते हैं जिनके लिए समीकरण के दोनों पक्ष बराबर हों। हम इन मानों को मूल कहते हैं।

$x^2 \quad 3x \quad 2 \quad 0$

$x \quad 2 \quad x \quad 1 \quad 0$

$x \quad 2 \quad 0$ या $x \quad 1 \quad 0$

$x \quad 2 \quad 0$ या $x \quad 1 \quad 0$

$x \quad 2$ या $x \quad 1$

यहाँ हम पाते हैं कि समीकरण $x \quad 2,1$ के लिए संतुष्ट हो रहा है। x के यही मान बहुपद $x^2 \quad 3x \quad 2$ के शून्यक भी हैं अतः हम कह सकते हैं कि द्विघातीय बहुपद के शून्यक उस बहुपद से बनाए गए समीकरण के मूल होते हैं।

कैसे पता करें कि दिए गए मान द्विघातीय समीकरण के मूल हैं अथवा नहीं?

कोई मान किसी वर्ग समीकरण का मूल है अथवा नहीं यह जानना बहुत आसान होता है। जिन मानों को वर्ग समीकरण में रखने पर समीकरण के दोनों पक्ष बराबर हों वे मान समीकरण के मूल होते हैं।

आइए, कुछ उदाहरणों से मूल जाँचने के तरीके सीखते हैं।

उदाहरणः–1. जाँचिए कि $x \quad 1$ तथा $x \quad 1$ वर्ग समीकरण $x^2 \quad x \quad 1 \quad 0$ के मूल हैं अथवा नहीं?

हलः– दिए गए समीकरण $x^2 \quad x \quad 1 \quad 0$ में बायाँ पक्ष $x^2 \quad x \quad 1$ व दायाँ पक्ष 0 है । बायें पक्ष में $x \quad 1$ रखने पर,

$1^2 \quad 1 \quad 1$

1

स्पष्टतः बायाँ पक्ष दायाँ पक्ष

अतः $x \quad 1$, दिए गए वर्ग समीकरण का मूल नहीं है।

इसी प्रकार $x \quad 1$ रखने पर

$1^{\;2} \quad 1 \quad 1$

$1 \quad 1 \quad 1$

3

स्पष्टतः बायाँ पक्ष दायाँ पक्ष

अतः $x \quad 1$ वर्ग समीकरण $x^2 \quad x \quad 1 \quad 0$ का मूल नहीं है।

उदाहरणः–2. जाँचिए कि $x \quad 2, x \quad 3$ वर्ग समीकरण $x^2 \quad 5x \quad 6 \quad 0$ के मूल हैं अथवा नहीं?

हलः– दिए गए समीकरण $x^2 \quad 5x \quad 6 \quad 0$ में बायाँ पक्ष $x^2 \quad 5x \quad 6$ व दायाँ पक्ष 0 है । बायें पक्ष में $x \quad 2$ रखने पर

$x^2 \quad 5x \quad 6$

$2^{\;2} \quad 5 \; 2 \quad 6$

$4 \quad 10 \quad 6$

0

स्पष्टतः बायाँ पक्ष दायाँ पक्ष

इसी प्रकार $x \quad 3$ रखने पर

$3^{\;2} \quad 5 \; 3 \quad 6$

$9 \quad 15 \quad 6$

0

स्पष्टतः बायाँ पक्ष दायाँ पक्ष

अतः $x \quad 2, x \quad 3$ समीकरण $x^2 \quad 5x \quad 6 \quad 0$ के मूल हैं।

करके देखें

जाँचिए कि x के दिए गए मान समीकरण के मूल हैं अथवा नहीं

(i) $x^2 \quad 6x \quad 5 \quad 0$; $x \quad 5, x \quad 1$

(ii) $9x^2 \quad 3x \quad 2 \quad 0$; $x \quad \frac{2}{3}, x \quad \frac{1}{3}$

(iii) $x^2 \quad x \quad 1 \quad 0$; $x \quad 0, x \quad 1$

द्विघात समीकरण को हल करने के तरीके

अब तक हमने देखा कि वर्ग समीकरण कैसे बनते हैं। अब हम उनके हल करने के तरीकों पर चर्चा करेंगे।

$x^2 \quad 7x \quad 0$ एक वर्ग समीकरण है।

क्या हम यहाँ x के मान पता कर सकते हैं ?

$\because \quad x^2 \quad 7x \quad 0$

$$x \; x \quad 7 \quad 0$$

$$x \quad 0 \quad \text{या} \quad x \quad 7 \quad 0$$

तब $\quad x \quad 0 \quad$ या $\quad x \quad 7$

चूँकि x के मान समीकरण को संतुष्ट करते हैं अतः ये इस समीकरण $x^2 \quad 7x \quad 0$ के हल होंगे।

इसी प्रकार $\; x \quad 1 \quad x \quad 2 \quad 0$ को हल करके देखते हैं –

$$x \quad 1 \quad 0 \qquad \text{या} \qquad x \quad 2 \quad 0$$

$$x \qquad 1 \qquad \text{या} \qquad x \quad 2$$

चूँकि x के मान समीकरण को संतुष्ट करते हैं।

अतः $x \quad 1$ व $x \quad 2$ समीकरण $x \quad 1 \quad x \quad 2 \quad 0$ के मूल होंगे।

करके देखें

निम्नलिखित समीकरणों के हल ज्ञात कीजिए –

(i) $x^2 \quad 11x \quad 0$ (ii) $x \quad 1^{\;2} \quad 0$ (iii) $x \quad 3^{\;2} \quad 0$

(iv) $x \quad 2 \quad x \quad 3 \quad 0$ (v) $x \; x \quad 1 \quad 0$

गुणनखंडन करके द्विघात समीकरण को हल करना –

अब हम पाठ के शुरू में विभिन्न परिस्थितियों से बने समीकरणों (i), (ii) तथा (iii) को हल करके उनके चर के मान प्राप्त करेंगे।

समीकरण (i): $x^2 \quad 20^2 \quad 0$ को हल करने के लिए इसकी तुलना सर्वसमिका $a^2 \quad b^2 \quad a \quad b \quad a \quad b$ से करने पर –

$$x^2 \quad 20^2 \quad x \quad 20 \quad x \quad 20$$

$$x \quad 20 \quad x \quad 20 \quad 0$$

$$x \quad 20 \quad 0 \quad \text{या} \quad x \quad 20 \quad 0$$

$$x \quad 20 \quad 0 \quad \text{या} \quad x \quad 20 \quad 0$$

$$x \quad 20 \quad \text{या} \quad x \quad 20$$

चूँकि लंबाई और चौड़ाई ऋणात्मक नहीं हो सकती इसलिए x का मान –20 नहीं हो सकता। इस सन्दर्भ में x को आयताकार बगीचे की चौड़ाई माना गया था।

आयताकार बगीचे की चौड़ाई = 20 मीटर

तथा लंबाई $2x \quad 2 \quad 20 \quad 40$ मीटर होगी।

समीकरण (ii): $x^2 \quad 30x \quad 1000 \quad 0$ में हमें समकोण त्रिभुजाकार क्यारी के शीर्षलंब व आधार भुजा की लंबाई की माप ज्ञात करनी है।

चूँकि समीकरण (ii) का बायाँ भाग एक द्विघातीय बहुपद है, इसका गुणनखंडन करेंगे।

$$x^2 - 50x + 20x - 1000 = 0$$
$$x(x - 50) + 20(x - 50) = 0$$
$$(x - 50)(x + 20) = 0 \qquad \because -50x + 20x = -30x$$
$$(x - 50) = 0 \quad \text{या} \quad (x + 20) = 0$$
$$x - 50 = 0 \quad \text{या} \quad x + 20 = 0$$
$$x = 50 \quad \text{या} \quad x = -20$$

अतः समकोण त्रिभुजाकार क्यारी के शीर्षलंब की लंबाई = 20 मीटर तथा आधार भुजा की लंबाई $x = 30 + 20 = 30 + 20 = 50$ मीटर होनी चाहिए।

इसी तरह से समीकरण (iii) का गुणनखंडन करके संख्याएँ प्राप्त की जा सकती हैं।

नीचे दिए गए उदाहरणों में हम द्विघात समीकरणों का गुणनखंडन कर हल प्राप्त करेंगे।

उदाहरणः—3. गुणनखंडन करके निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिए —

(i) $8x^2 - 22x - 21 = 0$ (ii) $x^2 - 2\sqrt{2}x - 6 = 0$

(iii) $\sqrt{3}x^2 + 10x + 7\sqrt{3} = 0$ (iv) $\frac{x+3}{x-2} - \frac{1-x}{x} = \frac{17}{4}, x \neq 0$

हलः— (i)
$$8x^2 - 22x - 21 = 0$$
$$8x^2 - 28x + 6x - 21 = 0$$
$$4x(2x - 7) + 3(2x - 7) = 0$$
$$(2x - 7)(4x + 3) = 0$$
$$(2x - 7) = 0 \quad \text{या} \quad (4x + 3) = 0$$
$$2x - 7 = 0 \quad \text{या} \quad 4x + 3 = 0$$
$$2x = 7 \quad \text{या} \quad 4x = -3$$
$$x = \frac{7}{2} \quad \text{या} \quad x = -\frac{3}{4}$$

अतः $x = \frac{7}{2}, -\frac{3}{4}$ समीकरण के दो मूल हैं।

हलः— (ii)
$$x^2 - 2\sqrt{2}x - 6 = 0$$
$$x^2 - 3\sqrt{2}x + \sqrt{2}x - 6 = 0$$
$$x(x - 3\sqrt{2}) + \sqrt{2}(x - 3\sqrt{2}) = 0$$
$$(x - 3\sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = 0$$
$$(x - 3\sqrt{2}) = 0 \quad \text{या} \quad (x + \sqrt{2}) = 0$$

$x \quad 3\sqrt{2} \quad 0$ या $x \quad \sqrt{2} \quad 0$

$x \quad 3\sqrt{2}$ या $x \quad \sqrt{2}$

अतः $x \quad 3\sqrt{2}, \sqrt{2}$ समीकरण के दो मूल हैं।

हलः– (iii) $\sqrt{3}x^2 \quad 10x \quad 7\sqrt{3} \quad 0$

$\sqrt{3}x^2 \quad 3x \quad 7x \quad 7\sqrt{3} \quad 0$

$\sqrt{3}x \; x \quad \sqrt{3} \quad 7 \; x \quad \sqrt{3} \quad 0$

$x \quad \sqrt{3} \quad \sqrt{3}x \quad 7 \quad 0$

$x \quad \sqrt{3} \quad 0$ या $\sqrt{3}x \quad 7 \quad 0$

$x \quad \sqrt{3} \quad 0$ या $\sqrt{3}x \quad 7 \quad 0$

$x \quad \sqrt{3}$ या $x \quad \dfrac{7}{\sqrt{3}}$

अतः $x \quad \sqrt{3}, \dfrac{7}{\sqrt{3}}$ समीकरण के दो मूल हैं।

हलः– (iv) $\dfrac{x \quad 3}{x \quad 2} \quad \dfrac{1 \quad x}{x} \quad \dfrac{17}{4}$ $, x \quad 0$

$\dfrac{x \; x \quad 3 \quad 1 \quad x \quad x \quad 2}{x \; x \quad 2} \quad \dfrac{17}{4}$

$\dfrac{x^2 \quad 3x \quad x \quad x^2 \quad 2 \quad 2x}{x^2 \quad 2x} \quad \dfrac{17}{4}$

$\dfrac{x^2 \quad 3x \quad x \quad x^2 \quad 2 \quad 2x}{x^2 \quad 2x} \quad \dfrac{17}{4}$

$\dfrac{2x^2 \quad 2}{x^2 \quad 2x} \quad \dfrac{17}{4}$

$4 \; 2x^2 \quad 2 \quad 17 \; x^2 \quad 2x$

$8x^2 \quad 8 \quad 17x^2 \quad 34x$

$17x^2 \quad 8x^2 \quad 34x \quad 8 \quad 0$

$9x^2 \quad 34x \quad 8 \quad 0$

$9x^2 \quad 36x \quad 2x \quad 8 \quad 0$

$9x \; x \quad 4 \quad 2 \; x \quad 4 \quad 0$

$$x \quad 4 \quad 9x \quad 2 \quad 0$$

$x \quad 4 \quad 0$ या $9x \quad 2 \quad 0$

$x \quad 4 \quad 0$ या $9x \quad 2 \quad 0$

$x \quad 4$ या $x \quad \dfrac{2}{9}$

अतः $x \quad 4, \dfrac{2}{9}$ समीकरण के दो मूल हैं।

प्रश्नावली 2

1. जाँचिए कि दिए गए मान समीकरण के मूल हैं अथवा नहीं –

   (i) $2x^2 \quad x \quad 6 \quad 0;$ $\quad x \quad 2, x \quad \dfrac{3}{2}$

   (ii) $x^2 \quad 4x \quad 4 \quad 0;$ $\quad x \quad 2, x \quad 3$

   (iii) $6x^2 \quad 6x \quad 12 \quad 0;$ $\quad x \quad 3, x \quad 4$

   (iv) $4x^2 \quad 9x \quad 0;$ $\quad x \quad 0, x \quad \dfrac{9}{4}$

   (v) $x^2 \quad 3\sqrt{3}x \quad 6 \quad 0;$ $\quad x \quad \sqrt{3}, x \quad 2\sqrt{3}$

2. निम्नलिखित द्विघात समीकरणों के मूल ज्ञात कीजिए –

   (i) $x \quad 4 \quad x \quad 2 \quad 0$ (ii) $2x \quad 3 \quad 3x \quad 7 \quad 0$

   (iii) $x \quad 7 \quad ^2 \quad 0$ (iv) $x^2 \quad 11x \quad 0$

   (v) $x \quad 12 \quad ^2 \quad 0$ (vi) $x \quad x \quad 1 \quad 0$

3. क्या $\sqrt{2}$ समीकरण $x^2 \quad 2x \quad 4 \quad 0$ का एक मूल है?

4. निम्नलिखित वर्ग समीकरणों का गुणनखंडन करके उनके मूल ज्ञात कीजिए –

   (i) $9x^2 \quad 3x \quad 2 \quad 0$ (ii) $4x^2 \quad 5x \quad 0$

   (iii) $3x^2 \quad 11x \quad 10 \quad 0$ (iv) $5x^2 \quad 3x \quad 2 \quad 0$

   (v) $6x^2 \quad 7x \quad 2 \quad 0$ (vi) $4\sqrt{3}x^2 \quad 5x \quad 2\sqrt{3} \quad 0$

   (vii) $10x \quad \dfrac{1}{x} \quad 3$ (viii) $x^2 \quad 4\sqrt{2}x \quad 6 \quad 0$

   (ix) $abx^2 \quad b^2 \quad ac \quad x \quad bc \quad 0$

   (x) $\dfrac{x \quad 1}{x \quad 1} \quad \dfrac{x \quad 1}{x \quad 1} \quad \dfrac{5}{6};$ $\quad x \quad 1, \quad 1$

द्विघात समीकरण के अनुप्रयोग

हमारे जीवन में अनेक ऐसी परिस्थितियाँ होती हैं, जिन पर आधारित कथनों को हम वर्ग समीकरण के रूप में लिख कर उनका समाधान ढूँढते हैं। अब हम ऐसी ही कुछ परिस्थितियों के लिए कथनों को वर्ग समीकरण के रूप में लिखकर उनको हल करेंगे।

उदाहरणः–4. यदि एक संख्या और उसके व्युत्क्रम का योग $2\frac{1}{30}$ है, तो संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हलः– माना कि वह संख्या x है, तब x का व्युत्क्रम $\frac{1}{x}$ होगा।

$$x \quad \frac{1}{x} \quad 2\frac{1}{30}$$

$$\frac{x^2 \quad 1}{x} \quad \frac{61}{30}$$

$$30 \quad x^2 \quad 1 \quad 61x$$

$$30x^2 \quad 61x \quad 30 \quad 0$$

$$30x^2 \quad 36x \quad 25x \quad 30 \quad 0$$

$$6x \; 5x \quad 6 \quad 5 \; 5x \quad 6 \quad 0$$

$$5x \quad 6 \quad 6x \quad 5 \quad 0$$

$5x \quad 6 \quad 0$ या $6x \quad 5 \quad 0$

$x \quad \frac{6}{5}$ या $x \quad \frac{5}{6}$

अतः वे संख्याएँ $x \quad \frac{6}{5}$ तथा $x \quad \frac{5}{6}$ होंगी।

उदाहरणः–5. एक शतरंज के बोर्ड के 64 वर्गाकार खानों में प्रत्येक खाने का क्षेत्रफल 6.25 वर्ग सेमी. है। इस बोर्ड के चारों तरफ 2 सेमी. चौड़ाई के बार्डर बने हैं। शतरंज के बोर्ड की एक भुजा की माप ज्ञात कीजिए।

हलः– माना कि शतरंज के बोर्ड की बॉर्डर सहित माप x सेमी. है,
तब बॉर्डर की माप =2+2 =4 सेमी.
बॉर्डर के बिना शतरंज के बोर्ड का क्षेत्रफल $x \quad 4 \;^2$
शतरंज के बोर्ड में 64 वर्गाकार खाने हैं,
जिनमें से प्रत्येक का क्षेत्रफल 6.25 वर्गसेमी. है।

$$x \quad 4 \;^2 \quad 64$$

$$x^2 \quad 8x \quad 16 \quad 400$$

$$x^2 \quad 8x \quad 16 \quad 400 \quad 0$$

$$x^2 \quad 8x \quad 384 \quad 0$$
$$x^2 \quad 24x \quad 16x \quad 384 \quad 0$$
$$x \; x \quad 24 \quad 16 \; x \quad 24 \quad 0$$
$$x \quad 24 \quad x \quad 16 \quad 0$$
$$x \quad 24 \quad 0 \qquad \text{या} \qquad x \quad 16 \quad 0$$
$$x \quad 24 \qquad \text{या} \qquad x \quad 16$$

शतरंज बोर्ड की माप ऋणात्मक नहीं हो सकती,
अतः शतरंज के बोर्ड की एक भुजा की माप 24 सेमी. होगी।

उदाहरणः–6. कक्षा 10 की टेस्ट परीक्षा में मोहन के गणित और विज्ञान विषयों में प्राप्तांकों का योग 28 है। यदि उसका गणित का प्राप्तांक पहले से 3 अधिक और विज्ञान का प्राप्तांक पहले से 4 कम हो जाए तो उसके दोनों विषयों के प्राप्तांकों का गुणनफल 180 हो जाता है। गणित और विज्ञान विषयों में मोहन के प्राप्तांक ज्ञात कीजिए।

हलः– यदि मोहन को गणित में x अंक मिले हों, तब उसके विज्ञान विषय के अंक $28 \quad x$ होंगे।

जब मोहन को गणित में पहले से 3 अंक अधिक मिले.

तब उसके गणित के अंक $x \quad 3$

और विज्ञान में पहले से 4 अंक कम मिले तब उसके विज्ञान के अंक $28 \quad x \quad 4$

$\because$ उसके गणित और विज्ञान के इन अंकों का गुणनफल = 180 (दिया है।)

$$x \quad 3 \quad 28 \quad x \quad 4 \quad 180$$
$$x \quad 3 \quad 24 \quad x \quad 180$$
$$x^2 \quad 3x \quad 24x \quad 72 \quad 180$$
$$x^2 \quad 21x \quad 72 \quad 180 \quad 0$$
$$x^2 \quad 21x \quad 108 \quad 0$$
$$x^2 \quad 12x \quad 9x \quad 108 \quad 0$$
$$x \; x \quad 12 \quad 9 \; x \quad 12 \quad 0$$
$$x \quad 12 \quad x \quad 9 \quad 0$$
$$x \quad 12 \quad 0 \qquad \text{या} \qquad x \quad 9 \quad 0$$
$$x \quad 12 \qquad \text{या} \qquad x \quad 9$$

जब $x \quad 12 \qquad 28 \quad x \quad 28 \quad 12 \quad 16$

जब $x \quad 9 \qquad 28 \quad x \quad 28 \quad 9 \quad 19$

इसलिए जब मोहन को गणित में 12 अंक मिले हों तब विज्ञान में उसके प्राप्तांक 16 होंगे। या उसे गणित में 9 अंक मिले हों तब उसके विज्ञान के प्राप्तांक 19 होंगे।

उदाहरणः–7. एक व्यक्ति की वर्तमान आयु, उसके पुत्र की वर्तमान आयु के वर्ग के बराबर है। यदि 1 वर्ष पहले उस व्यक्ति की आयु उसके पुत्र की आयु की 8 गुनी थी तो दोनों की वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।

हलः– माना कि पुत्र की वर्तमान आयु = x वर्ष

तब व्यक्ति की वर्तमान आयु x^2 वर्ष

1 वर्ष पहले पुत्र की आयु = $x \quad 1$ वर्ष

तथा 1 वर्ष पहले व्यक्ति की आयु = $x^2 \quad 1$ वर्ष

$\because$ 1 वर्ष पहले व्यक्ति की आयु, पुत्र की आयु की 8 गुनी थी,

$x^2 \quad 1 \quad 8 \; x \quad 1$

$x^2 \quad 1 \quad 8x \quad 8$

$x^2 \quad 8x \quad 7 \quad 0$

$x^2 \quad 7x \quad x \quad 7 \quad 0$

$x \; x \quad 7 \quad 1 \; x \quad 7 \quad 0$

$x \quad 7 \quad x \quad 1 \quad 0$

$x \quad 7 \quad 0$ या $x \quad 1 \quad 0$

$x \quad 7$ या $x \quad 1$

$x \quad 1$ के लिए पिता व पुत्र की आयु 1 वर्ष है, जो कि संभव नहीं है।

अतः $x \quad 7$ लेने पर

पुत्र की वर्तमान आयु $x \quad 7$ वर्ष एवं

पिता की वर्तमान आयु $x^2 \quad 7^2 \quad 49$ वर्ष

उदाहरणः–8. एक आयताकार खेत का परिमाप 82 मीटर है तथा उसका क्षेत्रफल 400 वर्गमीटर है। खेत की चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

हलः– माना कि आयताकार खेत की चौड़ाई x मीटर है।

आयताकार खेत का परिमाप = 82 मीटर

2(लंबाई+चौड़ाई) = 82 मीटर

(लंबाई+चौड़ाई) = 41 मीटर

लंबाई + x = 41 मीटर

लंबाई = $41 \quad x$ मीटर

$\because$ आयताकार खेत का क्षेत्रफल = 400 वर्ग मीटर

लंबाई   चौड़ाई = 400 वर्ग मीटर

$41 \quad x \; x \quad 400$

$41x \quad x^2 \quad 400$

$x^2 \quad 41x \quad 400 \quad 0$

$x^2 \quad 41x \quad 400 \quad 0$

$x^2 \quad 25x \quad 16x \quad 400 \quad 0$

$x \; x \quad 25 \quad 16 \; x \quad 25 \quad 0$

$x \quad 25 \quad x \quad 16 \quad 0$

$x \quad 25 \quad 0$ या $x \quad 16 \quad 0$

$x \quad 25$ या $x \quad 16$

अतः आयताकार खेत की चौड़ाई 16 मीटर और लंबाई 25 मीटर होगी। x के दोनों मानों में एक लंबाई और दूसरी चौड़ाई को व्यक्त करेगा।

उदाहरणः—9. कुछ विद्यार्थियों ने पिकनिक में जाने की योजना बनाई। उन्होंने भोजन पर व्यय के लिए 500 रुपये इकट्ठे किये, लेकिन उनमें से 5 विद्यार्थी पिकनिक में नहीं जा पाए, जिससे प्रत्येक विद्यार्थी को भोजन पर व्यय के लिए 5 रुपये अधिक देने पड़े। बताइए कि पिकनिक पर कितने विद्यार्थी गए?

हलः— माना कि पिकनिक की योजना बनाने वाले विद्यार्थियों की संख्या x है।

$\because$ x विद्यार्थियों द्वारा भोजन व्यय हेतु दी गई राशि = 500 रुपये

एक विद्यार्थी द्वारा भोजन व्यय हेतु दी गई राशि = $\frac{500}{x}$ रुपये

परंतु 5 विद्यार्थियों की संख्या कम हो गई,

तब पिकनिक में जाने वाले विद्यार्थियों की संख्या = $x \quad 5$

अब $x \quad 5$ विद्यार्थियों द्वारा भोजन पर व्यय हेतु दी गई राशि = 500 रुपये

अतः एक विद्यार्थी द्वारा भोजन व्यय हेतु दी गई राशि = $\frac{500}{x \quad 5}$ रुपये

प्रश्न के अनुसार, 5 विद्यार्थियों के पिकनिक में नहीं जाने से प्रत्येक विद्यार्थी को भोजन व्यय के लिए 5 रुपये अधिक देने पड़े।

$$\frac{500}{x \quad 5} \quad \frac{500}{x} \quad 5$$

$$\frac{500x \quad 500 \; x \quad 5}{x \; x \quad 5} \quad 5$$

$$\frac{500 \; x \quad x \quad 5}{x \; x \quad 5} \quad 5$$

$$\frac{500\ x \quad x \quad 5}{x\ x \quad 5} \quad 5$$

$$\frac{500}{5} \quad x^2 \quad 5x$$

$$x^2 \quad 5x \quad 500 \quad 0$$

$$x^2 \quad 25x \quad 20x \quad 500 \quad 0$$

$$x\ x \quad 25 \quad 20\ x \quad 25 \quad 0$$

$$x \quad 25 \quad x \quad 20 \quad 0$$

$x \quad 25 \quad 0$ या $x \quad 20 \quad 0$

$x \quad 25$ या $x \quad 20$

$\because$ विद्यार्थियों की संख्या ऋणात्मक नहीं हो सकती,अतः $x \quad 25$ होगा।

पिकनिक पर जाने वाले विद्यार्थियों की संख्या $x \quad 5 \quad 25 \quad 5 \quad 20$ होगी।

उदाहरणः–10. एक व्यक्ति ने 80 रुपये में कुछ किताबें खरीदीं। यदि उसे इतने ही रुपयों में खरीदी हुई किताबों से 4 किताबें ज्यादा मिली होती, तो प्रत्येक किताब की कीमत पहले से एक रुपये कम हो जाती। बताइए उसने कितनी किताबें खरीदी?

हलः– माना कि खरीदी गई किताबों की संख्या x है,

$\because$ x किताबों की कीमत = 80 रुपये

1 किताब की कीमत = $\frac{80}{x}$ रुपये

यदि उसे 4 किताबें और मिली होतीं तब किताबों की संख्या $x \quad 4$ हो जाती

$\because$ $x \quad 4$ किताबों की कीमत = 80 रुपये

1 किताब की कीमत = $\frac{80}{x \quad 4}$ रुपये

प्रश्न के अनुसार $\frac{80}{x \quad 4}$ रुपये, $\frac{80}{x}$ रुपये से 1 रुपये कम है–

$$\frac{80}{x} \quad 1 \quad \frac{80}{x \quad 4}$$

$$\frac{80}{x} \quad \frac{80}{x \quad 4} \quad 1$$

$$80 \ \frac{1}{x} \quad \frac{1}{x \quad 4} \quad 1$$

$$80 \frac{x \quad 4 \quad x}{x \; x \quad 4} \quad 1$$

$$\frac{80 \quad 4}{x^2 \quad 4x} \quad 1$$

$$320 \quad x^2 \quad 4x$$

$$x^2 \quad 4x \quad 320 \quad 0$$

$$x^2 \quad 20x \quad 16x \quad 320 \quad 0$$

$$x \; x \quad 20 \quad 16 \; x \quad 20 \quad 0$$

$$x \quad 20 \quad x \quad 16 \quad 0$$

$x \quad 20 \quad 0$ या $x \quad 16 \quad 0$

$x \quad 20$ (अग्राह्य) या $x \quad 16$

अतः किताबों की संख्या = 16

द्विघात (वर्ग) समीकरण को पूर्ण वर्ग बनाकर हल करना

अब तक हमने द्विघात (वर्ग) समीकरणों को गुणनखंड विधि से हल करना सीखा है। यहाँ हम एक अन्य विधि की चर्चा करेंगे। इस विधि में समीकरण को $x \quad a^{\;2}$ या $x \quad a^{\;2}$ के रूप में परिवर्तित करते हैं। ऐसा करने के लिए हमें समीकरण के दोनों पक्षों में कुछ विशेष पदों को जोड़ने की आवश्यकता होती है।

निम्नलिखित उदाहरणों में इस विधि का उपयोग किया गया है–

उदाहरण :–11. वर्ग समीकरण $x^2 \quad 6x \quad 0$ को पूर्ण वर्ग विधि से हल कीजिए ।

हल:–

$$x^2 \quad 6x \quad 0$$

$$x^2 \quad 2x \quad 3 \quad 0$$

समीकरण को पूर्ण वर्ग बनाने के लिए $2x$ के गुणांक 3 के वर्ग को दोनों पक्षों में जोड़ने पर

$$x^2 \quad 2x \quad 3 \quad 3^2 \quad 3^2$$

$$x^2 \quad 2 \quad x \quad 3 \quad 3^2 \quad 9$$

$x \quad 3^{\;2} \quad 9$ (सर्वसमिका $x^2 \quad 2xa \quad a^2 \quad x \quad a^{\;2}$ के द्वारा)

$$x \quad 3 \quad \sqrt{9}$$

$$x \quad 3 \quad 3$$

(+) चिह्न लेने पर	(–) चिह्न लेने पर
$x \;\; 3 \quad 3$ $x \;\; 3 \;\; 3$ $x \quad 0$	$x \;\; 3 \quad 3$ $x \quad 3 \;\; 3$ $x \quad 6$

हम देख सकते हैं कि $x^2 \quad 6x$ में उभयनिष्ठ होने से हम समीकरण को $x(x \quad 6) \quad 0$ लिख सकते हैं। इसमें स्पष्ट है $x \quad 0$ अथवा $x \quad 6$ अतः कोई भी तरीका उपयोग करें सवाल का हल नहीं बदलेगा।

उदाहरणः–12. वर्ग समीकरण $x^2 \quad 6x \quad 5 \quad 0$ को पूर्ण वर्ग विधि से हल कीजिए ।

हलः–

$$x^2 \quad 6x \quad 5 \quad 0$$

$$x^2 \quad 2x \;\; 3 \;\; 5 \quad 0$$

$$x^2 \quad 2x \;\; 3 \quad 5$$

समीकरण के दोनों पक्षों में $2x$ के गुणांक 3 का वर्ग जोड़ने पर

$$x^2 \quad 2x \;\; 3 \;\; 3^2 \quad 5 \;\; 3^2$$

$$x \;\; 3^{\;2} \quad 5 \;\; 9 \qquad\qquad \because x^2 \quad 2xa \quad a^2 \quad x \quad a^{\;2}$$

$$x \;\; 3^{\;2} \quad 4$$

$$x \;\; 3 \quad \sqrt{4}$$

$$x \;\; 3 \quad 2$$

(+) चिह्न लेने पर	(–) चिह्न लेने पर
$x \;\; 3 \quad 2$ $x \;\; 2 \;\; 3$ $x \;\; 5$	$x \;\; 3 \quad 2$ $x \quad 2 \;\; 3$ $x \;\; 1$

इसमें बहुपद $x^2 \quad 6x \quad 5$ के मध्य पद को तोड़कर हम देखते हैं कि $x \quad 5 \quad x \quad 1 \quad 0$ समीकरण है अतः $x \quad 5$ व $x \quad 1$ मूल हैं। किन्तु यहाँ उभयनिष्ठ नहीं मिलता।

उदाहरणः–13. वर्ग समीकरण $x^2 \quad \frac{5}{2}x \quad 3 \quad 0$ को हल कीजिए।

हलः–

$$x^2 \quad \frac{5}{2}x \quad 3 \quad 0$$

$$x^2 \quad \frac{5}{2}x \quad 3$$

$$x^2 \quad 2x \;\; \frac{1}{2} \;\; \frac{5}{2} \quad 3$$

$$x^2 \quad 2x \; \frac{5}{4} \quad 3$$

$2x$ के गुणांक $\frac{5}{4}$ का वर्ग दोनों पक्षों में जोड़ने पर

$$x^2 \quad 2x \; \frac{5}{4} \quad \frac{5}{4}^{\;2} \quad 3 \quad \frac{5}{4}^{\;2}$$

$$x \quad \frac{5}{4}^{\;2} \quad \frac{25}{16} \quad 3$$

$$x \quad \frac{5}{4}^{\;2} \quad \frac{25 \quad 48}{16}$$

$$x \quad \frac{5}{4}^{\;2} \quad \frac{73}{16}$$

$$x \quad \frac{5}{4} \qquad \sqrt{\frac{73}{16}}$$

$$x \quad \frac{5}{4} \quad \sqrt{\frac{73}{16}}$$

(+) चिह्न लेने पर	(–) चिह्न लेने पर
$x \quad \frac{5}{4} \quad \sqrt{\frac{73}{16}}$	$x \quad \frac{5}{4} \quad \sqrt{\frac{73}{16}}$
$x \quad \frac{5}{4} \quad \frac{\sqrt{73}}{4}$	$x \quad \frac{5}{4} \quad \frac{\sqrt{73}}{4}$
$x \quad \frac{5 \quad \sqrt{73}}{4}$	$x \quad \frac{5 \quad \sqrt{73}}{4}$

क्या इस समीकरण का हल बहुपद में से उभयनिष्ठ बहुपद ढूँढकर अथवा मध्यपद को तोड़कर निकाल सकते हैं?

उदाहरण:–14. वर्ग समीकरण $2x^2 \quad 7x \quad 3 \quad 0$ को हल कीजिए।

हल:– $2x^2 \quad 7x \quad 3 \quad 0$

$$2x^2 \quad 7x \qquad 3$$

समीकरण के दोनों पक्षों में 2 का भाग देने पर

$$x^2 \quad \frac{7}{2}x \qquad \frac{3}{2}$$

$$x^2 \quad 2x \quad \frac{1}{2} \quad \frac{7}{2} \qquad \frac{3}{2}$$ $\because \frac{7}{2} \quad 2 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{7}{2} \quad 2 \quad \frac{7}{4}$

$$x^2 \quad 2x \quad \frac{7}{4} \quad \frac{7}{4}^{\;2} \qquad \frac{3}{2} \quad \frac{7}{4}^{\;2}$$ ($2x$ के गुणांक $\frac{7}{4}$ का वर्ग दोनों पक्षों में जोड़ने पर)

$$x \quad \frac{7}{4}^{\;2} \qquad \frac{3}{2} \quad \frac{49}{16}$$ $\because x^2 \quad 2xa \quad a^2 \qquad x \quad a^{\;2}$

$$x \quad \frac{7}{4}^{\;2} \qquad \frac{24 \quad 49}{16}$$

$$x \quad \frac{7}{4}^{\;2} \qquad \frac{25}{16}$$

$$x \quad \frac{7}{4} \qquad \sqrt{\frac{25}{16}}$$

$$x \quad \frac{7}{4} \qquad \frac{5}{4}$$

(+) चिह्न लेने पर	(–) चिह्न लेने पर
$x \quad \frac{7}{4} \quad \frac{5}{4}$	$x \quad \frac{7}{4} \quad \frac{5}{4}$
$x \quad \frac{5}{4} \quad \frac{7}{4}$	$x \quad \frac{5}{4} \quad \frac{7}{4}$
$x \quad \frac{12}{4}$	$x \quad \frac{2}{4}$
$x \quad 3$	$x \quad \frac{1}{2}$

क्या इसे मध्य पद को तोड़कर हल कर सकते हैं? करके देखें।

करके देखें

निम्नलिखित वर्ग समीकरणों को पूर्ण वर्ग विधि से हल कीजिए–

i $\quad x^2 \quad \frac{3}{4}x \quad 3 \quad 0$ $\qquad$ *ii* $\quad 2x^2 \quad 5x \quad 3 \quad 0$

iii $\quad 9x^2 \quad 15x \quad 6 \quad 0$

उदाहरणः—15. $\sqrt{6 \quad \sqrt{6 \quad \sqrt{6 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}}}$ को हल कीजिए।

हलः— माना कि $x \quad \sqrt{6 \quad \sqrt{6 \quad \sqrt{6 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}}}$

$x \quad \sqrt{6 \quad x}$ (दोनों पक्षों का वर्ग करने पर)

$x^2 \quad \sqrt{6 \quad x}^{\;2}$

$x^2 \quad 6 \quad x$

$x^2 \quad x \quad 6 \quad 0$

$x^2 \quad 3x \quad 2x \quad 6 \quad 0$

$x \; x \quad 3 \quad 2 \; x \quad 3 \quad 0$

$x \quad 3 \; x \quad 2 \quad 0$

$x \quad 3 \quad 0$ या $x \quad 2 \quad 0$

$x \quad 3$ या $x \quad 2$

अतः $x \quad 3, \; 2$

प्रश्नावली – 3

1. निम्नलिखित समीकरणों को पूर्ण वर्ग विधि से हल कीजिए—

i	$2x^2 \quad x \quad 4 \quad 0$	ii	$3x^2 \quad 11x \quad 10 \quad 0$
iii	$5x^2 \quad 6x \quad 2 \quad 0$	iv	$x^2 \quad 4\sqrt{2}x \quad 6 \quad 0$
v	$3x^2 \quad 2x \quad 1 \quad 0$	vi	$x^2 \quad 4x \quad 3 \quad 0$

2. $\sqrt{7 \quad \sqrt{7 \quad \sqrt{7 \quad \sqrt{7 \ldots\ldots\ldots}}}}$ को हल कीजिए।
3. दो क्रमागत प्राकृत संख्याओं के वर्गों का योग 85 है, संख्याएँ ज्ञात कीजिए।
4. दो क्रमागत प्राकृत संख्याओं का गुणनफल 20 है, संख्याएँ ज्ञात कीजिए।
5. दो संख्याओं का योग 48 तथा उनका गुणनफल 432 है, संख्याएँ ज्ञात कीजिए।
6. एक समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल 165 वर्ग मीटर है। यदि समकोण त्रिभुज के शीर्षलंब की लंबाई उसकी आधार भुजा से 7 मीटर अधिक हो तो शीर्षलंब की लंबाई ज्ञात कीजिए।
7. फलों की आयताकार क्यारी का परिमाप 76 मीटर तथा क्षेत्रफल 357 वर्गमीटर है। क्यारी की लंबाई तथा चौड़ाई ज्ञात कीजिए।
8. एक आयताकार पार्क का क्षेत्रफल 100 वर्गमीटर है। पार्क की लंबाई उसकी चौड़ाई से 15 मीटर अधिक है। पार्क के चारों ओर तार की जाली का घेरा लगवाया जाना है। यदि एक वर्गमीटर तार की जाली की कीमत 5 रुपये है, तब पार्क के चारों ओर तार की जाली लगाने की लागत ज्ञात कीजिए।

9. एक व्यक्ति और उसके पुत्र की वर्तमान आयु का योग 45 वर्ष है। 5 वर्ष पूर्व दोनों की आयु का गुणनफल उस व्यक्ति की आयु का 4 गुना था। दोनों की वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।
10. नीलमणि की 5 वर्ष पूर्व की आयु तथा 8 वर्ष पूर्व की आयु का गुणनफल 40 है। नीलमणि की वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।
11. कुछ विद्यार्थियों ने पिकनिक में जाने की योजना बनाई। उन्होंने भोजन पर व्यय के लिए 480 रुपये इकट्ठे किये, लेकिन उनमें से 8 विद्यार्थी पिकनिक में नहीं जा पाए, जिससे प्रत्येक विद्यार्थी को भोजन पर व्यय के लिए 10 रुपये अधिक देने पड़े। बताइए कि पिकनिक पर कितने विद्यार्थी गए?
12. कक्षा 10 की टेस्ट परीक्षा में कमल के अंग्रेजी और गणित विषयों के प्राप्तांकों का योग 40 है। यदि गणित विषय में उसके प्राप्तांक पहले की तुलना में 3 अधिक और अंग्रेजी विषय में प्राप्तांक पहले की तुलना में 4 कम हो जाए तो उसके दोनों विषयों के प्राप्तांकों का गुणनफल 360 हो जाता है। गणित और अंग्रेजी में कमल के प्राप्तांक ज्ञात कीजिए।

भारतीय गणितज्ञ श्रीधराचार्य

श्रीधराचार्य एक चर वाले द्विघातीय (वर्ग) समीकरण को हल करने वाले प्रथम भारतीय गणितज्ञ थे। इन्होंने अंकगणित, ज्यामिति, वर्गमूल तथा घनमूल इत्यादि क्षेत्रों में भी कार्य किया था। ब्रह्मगुप्त (628 ई.) एवं भास्कराचार्य (1150 ई.) के बीच के काल में श्रीधराचार्य (750 ई.) सर्वमान्य गणितज्ञ थे। श्रीधराचार्य के बारे में कहा गया है कि उत्तर में हिमालय से दक्षिण के मलयपर्वत तक और पूर्व तथा पश्चिमी समुद्र की सीमा तक श्रीधराचार्य की तुलना का कोई गणितज्ञ नहीं रहा है। इन्होने वर्ग समीकरण के लिए
निम्न सूत्र दिया :–

चतुराहत वर्ग समै रूपैः पक्ष द्वयं गुणयेत्।
अव्यक्त वर्ग रूपैर्युक्तौ पक्षौततो मूलम्।।

– पाटी गणित एवं गणित के इतिहास से
लेखक – वेणुगोपाल एवं डॉ. हेरर

E6CT43

वर्ग समीकरण हल करने का सूत्र :–

द्विघात (वर्ग) समीकरण का मानक रूप $ax^2 \quad bx \quad c \quad 0$ होता है, जहाँ a, b, c वास्तविक संख्याएँ और $a \quad 0$

x^2 के गुणांक से समीकरण में भाग करने पर

$$x^2 \quad \frac{b}{a}x \quad \frac{c}{a} \quad 0$$

$$x^2 \quad \frac{b}{a}x \qquad \frac{c}{a}$$

$$x^2 \quad 2.\frac{b}{2a}x \qquad \frac{c}{a}$$ ($2x$ के गुणांक का वर्ग करके दोनों पक्षों में जोड़ने पर)

$$x^2 \quad 2.\frac{b}{2a}x \qquad \frac{b}{2a}^{\ 2} \qquad \frac{c}{a} \qquad \frac{b}{2a}^{\ 2}$$

$$x \quad \frac{b}{2a}^{\ 2} \qquad \frac{c}{a} \quad \frac{b^2}{4a^2}$$

$$x \quad \frac{b}{2a}^{\ 2} \qquad \frac{4ac \quad b^2}{4a^2}$$

$$x \quad \frac{b}{2a}^{\ 2} \qquad \frac{b^2 \quad 4ac}{4a^2}$$

$$x \quad \frac{b}{2a} \qquad \sqrt{\frac{b^2 \quad 4ac}{4a^2}}$$ (वर्गमूल लेने पर)

$$x \quad \frac{b}{2a} \qquad \frac{\sqrt{b^2 \quad 4ac}}{2a}$$

$$x \qquad \frac{b}{2a} \quad \frac{\sqrt{b^2 \quad 4ac}}{2a}$$

$$x \quad \frac{b \quad \sqrt{b^2 \quad 4ac}}{2a}$$

सोचें एवं चर्चा करें

$3x^2 \quad 7x \quad 1 \quad 0$ को किस–किस विधि से हल किया जा सकता है? क्या सबसे हल एक जैसे आएगा? पूर्ण वर्ग विधि व मध्य पद तोड़ने की विधि क्यों आसान नहीं है?

आइए अब वर्ग समीकरण हल करते हैं

उदाहरणः–16. वर्ग समीकरण $x \quad 1 \quad 2x \quad 1 \qquad 2$ को हल कीजिए।

हलः– $x \quad 1 \quad 2x \quad 1 \qquad 2$

$2x^2 \quad 2x \quad x \quad 1 \quad 0$

$2x^2 \quad 3x \quad 1 \quad 0$

समीकरण की तुलना मानक समीकरण $ax^2 \quad bx \quad c \quad 0$ से करने पर

$a \quad 2, b \quad 3, c \quad 1$

सूत्र $x \quad \dfrac{b \quad \sqrt{b^2 \quad 4ac}}{2a}$ में मान रखने पर

$$x \quad \frac{3 \quad \sqrt{\;3^{\;2} \quad 4 \;\; 2 \;\; 1}}{2 \;\; 2}$$

$$x \quad \frac{3 \quad \sqrt{9 \quad 8}}{4}$$

$$x \quad \frac{3 \quad 1}{4}$$

(+) चिह्न लेने पर	(–) चिह्न लेने पर
$x \quad \dfrac{3 \quad 1}{4} \quad \dfrac{4}{4}$ $x \quad 1$	$x \quad \dfrac{3 \quad 1}{4} \quad \dfrac{2}{4}$ $x \quad \dfrac{1}{2}$

अतः $x \quad 1, \dfrac{1}{2}$ समीकरण के मूल हैं।

करके देखें

निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिए:–

$i \qquad 3x^2 \quad 2x \quad 2 \quad 0 \qquad\qquad ii \qquad x^2 \quad 2x \quad 1 \quad 0$

द्विघात (वर्ग) समीकरण के विभेदक (विविक्तकर) (Discriminant of Quadratic Equation)

द्विघात समीकरण $ax^2 \quad bx \quad c \quad 0$ में $x \quad \dfrac{b \quad \sqrt{b^2 \quad 4ac}}{2a}$ होता है। सूत्र में $b^2 \quad 4ac$ को ही द्विघात (वर्ग) समीकरण का विभेदक (विविक्तकर) कहा जाता है। इसे $D \quad b^2 \quad 4ac$ लिखा जाता है। इसे विभेदक इसलिए कहते हैं कि यह द्विघातीय समीकरण के दोनों हलों के बीच विभेद करता है। यह शून्य हो तो दोनों हल बराबर होते हैं।

आइए कुछ द्विघात समीकरणों के विभेदक ज्ञात करना सीखते हैं–

उदाहरणः–17. वर्ग समीकरण $4x^2 \quad 4x \quad 1 \quad 0$ का विभेदक ज्ञात कीजिए।

हलः– समीकरण $4x^2 \quad 4x \quad 1 \quad 0$ की तुलना मानक वर्ग समीकरण $ax^2 \quad bx \quad c \quad 0$ से करने पर

यहाँ $a \quad 4, b \quad 4, c \quad 1$

विभेदक $D \quad b^2 \quad 4ac$

$D \quad 4^{\ 2} \quad 4$

$D \quad 16 \quad 16$

$D \quad 0$

उदाहरणः–18. वर्ग समीकरण $2x^2 \quad 5x \quad 5 \quad 0$ का विभेदक ज्ञात कीजिए।

हलः– $2x^2 \quad 5x \quad 5 \quad 0$ की तुलना मानक वर्ग समीकरण $ax^2 \quad bx \quad c \quad 0$ से करने पर

यहाँ $a \quad 2, b \quad 5, c \quad 5$

$\because \quad D \quad b^2 \quad 4ac$

$D \quad 5^2 \quad 4 \qquad 5$

$D \quad 25 \quad 40$

$D \quad 15$

उदाहरणः–19. वर्ग समीकरण $3x^2 \quad 2\sqrt{8}x \quad 2 \quad 0$ का विभेदक ज्ञात कीजिए।

हलः– समीकरण $3x^2 \quad 2\sqrt{8}x \quad 2 \quad 0$ की तुलना मानक वर्ग समीकरण $ax^2 \quad bx \quad c \quad 0$ से करने पर $a \quad 3, b \quad 2\sqrt{8}, c \quad 2$

$\because \quad D \quad b^2 \quad 4ac$

$D \quad 2\sqrt{8}^{\ 2} \quad 4$

$D \quad 4 \quad 8 \quad 24$

$D \quad 32 \quad 24$

$D \quad 8$

करके देखें

निम्नलिखित वर्ग समीकरणों के विभेदक ज्ञात कीजिए–

i	$2x^2 \quad 2\sqrt{2}x \quad 1 \quad 0$	ii	$16x^2 \quad 24x \quad 9 \quad 0$
iii	$9x^2 \quad 10x \quad 15 \quad 0$	iv	$x^2 \quad 16x \quad 64 \quad 0$

वर्ग समीकरण के मूलों की प्रकृति (Nature of Roots of Quadratic Equation):–

ऊपर के उदाहरणों में हमने विभिन्न वर्ग समीकरणों के विभेदक सूत्र $D \quad b^2 \quad 4ac$ की सहायता से प्राप्त किए। उदाहरणों में D के मान क्रमशः 0, –15, 8 प्राप्त हुए। D के ये मान शून्य, ऋणात्मक एवं धनात्मक संख्या के रूप में प्राप्त हुए हैं। इसका अर्थ है कि विभेदक शून्य, ऋणात्मक या धनात्मक हो सकते हैं। क्या ऐसा होने से वर्ग समीकरण के मूलों के बारे में कोई खास जानकारी मिलती है? आइए इसका पता लगाते हैं।

$\because \quad ax^2 \quad bx \quad c \quad 0$ जहाँ a,b,c वास्तविक संख्याएँ हैं और $a \quad 0$ के मूल ज्ञात करने का सूत्र निम्न है–

$$x \quad \frac{b \quad \sqrt{b^2 \quad 4ac}}{2a}$$

यहाँ $b^2 \quad 4ac \quad D$ है,

अर्थात

$$x \quad \frac{b \quad \sqrt{D}}{2a}$$

$D \quad b^2 \quad 4ac$ मूलों की प्रकृति में विभेद (अन्तर) करता है। इसलिए इसे विभेदक या विविक्तकर कहा जाता है।

अब निम्न तीन स्थितियों की चर्चा करते हैं:–

स्थिति–1 यदि $D \quad 0$ तब

$$x \quad \frac{b \quad \sqrt{0}}{2a}$$

$$x \quad \frac{b \quad 0}{2a}$$

(+) चिह्न लेने पर	(–) चिह्न लेने पर
$x \quad \frac{b \quad 0}{2a} \quad \frac{b}{2a}$	$x \quad \frac{b \quad 0}{2a} \quad \frac{b}{2a}$

यहाँ x के दोनों मान अर्थात मूल वास्तविक संख्याएँ हैं और समान भी हैं।

निष्कर्ष :– यदि D=0 हो तब वर्ग समीकरण के दोनों मूल वास्तविक व समान होते हैं।

स्थिति–2 यदि D कोई धनात्मक संख्या हो, तब

माना $D \quad 49$

$$x \quad \frac{b \quad \sqrt{49}}{2a}$$

$$x \quad \frac{b \quad 7}{2a}$$

(+) चिह्न लेने पर	(–) चिह्न लेने पर
$x \quad \frac{b \quad 7}{2a}$	$x \quad \frac{b \quad 7}{2a}$

यहाँ x के दोनों मान अर्थात मूल वास्तविक संख्याएँ हैं और असमान हैं।

निष्कर्ष :– यदि D>0 अर्थात धनात्मक हो तब वर्ग समीकरण के दोनों मूल वास्तविक व असमान होते हैं।

स्थिति–3 यदि D कोई ऋणात्मक संख्या हो , तब

जैसे $D \quad 81$

$$x \quad \frac{b \quad \sqrt{\quad 81}}{2a}$$

ऋणात्मक संख्याओं का वर्गमूल अधिकल्पित या काल्पनिक होता है।

(+) चिह्न लेने पर	(–) चिह्न लेने पर
$x \quad \frac{b \quad \sqrt{\quad 81}}{2a}$	$x \quad \frac{b \quad \sqrt{\quad 81}}{2a}$

यहाँ x के दोनों मान अर्थात मूल असमान हैं लेकिन ऋणात्मक संख्या के वर्गमूल होने के कारण काल्पनिक हैं।

निष्कर्ष :– यदि D<0 अर्थात ऋणात्मक हो तब वर्ग काल्पनिक एवं असमान होते हैं।

मूलों की प्रकृति पहचानना

अब हम कुछ उदाहरणों से वर्ग समीकरण के मूलों की प्रकृति की पहचान करना सीखेंगे–

उदाहरणः–20. $x^2 \quad 4x \quad 4 \quad 0$ के मूलों की प्रकृति बताइए।

हलः– $x^2 \quad 4x \quad 4 \quad 0$ की तुलना $ax^2 \quad bx \quad c \quad 0$ से करने पर

$a \quad 1, b \quad 4, c \quad 4$

विभेदक $D \quad b^2 \quad 4ac$ में मान रखने पर

$$D \quad 4^{\;2} \quad 4$$

$$D \quad 16 \quad 16$$

$$D \quad 0$$

$\because$ दिए गए वर्ग समीकरण का विभेदक शून्य है, अतः इस समीकरण के दोनों मूल समान हैं।

उदाहरणः–21. वर्ग समीकरण $x^2 \quad 5x \quad 6 \quad 0$ के मूलों की प्रकृति बताइए।

हलः– वर्ग समीकरण $x^2 \quad 5x \quad 6 \quad 0$ की तुलना $ax^2 \quad bx \quad c \quad 0$ से करने पर

$a \quad 1, b \quad 5, c \quad 6$

विभेदक $D \quad b^2 \quad 4ac$ में मान रखने पर

$D \quad 5^{2} \quad 4$

$D \quad 25 \quad 24$

$D \quad 1$

$D \quad 0$ (धनात्मक)

चूँकि दिए गए वर्ग समीकरण का विभेदक धनात्मक है अतः इस समीकरण के दोनों मूल वास्तविक एवं असमान होंगे।

उदाहरणः–22. वर्ग समीकरण $4x^2 \quad x \quad 1 \quad 0$ के मूलों की प्रकृति बताइए।

हलः– वर्ग समीकरण $4x^2 \quad x \quad 1 \quad 0$ की तुलना $ax^2 \quad bx \quad c \quad 0$ से करने पर–

$a \quad 4, b \quad 1, c \quad 1$

विभेदक $D \quad b^2 \quad 4ac$ में मान रखने पर

$D \quad 1^{2} \quad 4$

$D \quad 1 \quad 16$

$D \quad 15$ (ऋणात्मक)

चूँकि दिए गए वर्ग समीकरण का विभेदक ऋणात्मक है अतः इस समीकरण के दोनों मूल काल्पनिक एवं असमान होंगे।

करके देखें

निम्नलिखित समीकरणों के मूलों की प्रकृति ज्ञात कीजिए–

$i \quad x^2 \quad x \quad 2 \quad 0$ $ii \quad 2x^2 \quad x \quad 1 \quad 0$

$iii \quad 2x^2 \quad 5x \quad 5 \quad 0$ $iv \quad 2y^2 \quad 2\sqrt{6}y \quad 3 \quad 0$

द्विघात समीकरण के अचर गुणांक पता करना

मूलों की प्रकृति के आधार पर किसी द्विघात समीकरण में चर के अचर गुणांक का मान ज्ञात कर सकते हैं। इसे निम्नलिखित उदाहरण से समझते हैं–

उदाहरणः–23. द्विघात समीकरण $9x^2 \quad 3kx \quad 4 \quad 0$ में k का मान ज्ञात कीजिए। यदि वर्ग समीकरण के मूल समान हैं।

हलः– द्विघात समीकरण $9x^2 \quad 3kx \quad 4 \quad 0$ की तुलना द्विघात(वर्ग) समीकरण के मानक रूप

$ax^2 \quad bx \quad c \quad 0$ से करने पर $a \quad 9, b \quad 3k, c \quad 4$

$D \quad b^2 \quad 4ac$ में मान रखने पर

$D \quad 3k \;^2 \quad 4$

$D \quad 9k^2 \quad 144$

मूल समान होने पर $D \quad 0$ होता है।

अर्थात $9k^2 \quad 144 \quad 0$

$9k^2 \quad 144$

$$k^2 \quad \frac{144}{9}$$

$k^2 \quad 16$

$k \quad 4$

यदि मूल असमान व वास्तविक हों तो k के मान के बारे में हम क्या कह सकते हैं?

करके देखें

निम्नलिखित वर्ग समीकरणों में k का मान ज्ञात कीजिए जिससे वर्ग समीकरण के मूल वास्तविक एवं समान हों :–

i $\quad 16x^2 \quad kx \quad 9 \quad 0$ $\qquad ii$ $\quad 3x^2 \quad 2\sqrt{8}x \quad k \quad 0$

iii यदि इन दोनों सवालों में मूल काल्पनिक हों तो k के बारे में हम क्या कह सकते हैं?

प्रश्नावली – 4

1. निम्नलिखित समीकरणों के विभेदक ज्ञात कीजिए–

i $\quad x^2 \quad 4x \quad 2 \quad 0$ $\qquad ii$ $\quad x \quad 1 \quad 2x \quad 1 \quad 0$

iii $\quad \sqrt{3}x^2 \quad 2\sqrt{2}x \quad 2\sqrt{3} \quad 0$ $\qquad iv$ $\quad x^2 \quad 4x \quad a \quad 0$

v $\quad x^2 \quad px \quad qx \quad 0$

2. निम्नलिखित वर्ग समीकरणों के मूलों की प्रकृति ज्ञात कीजिए–

i $\quad x^2 \quad 4x \quad 4 \quad 0$ $\qquad ii$ $\quad 2x^2 \quad 2x \quad 2 \quad 0$

iii $\quad 3x^2 \quad 2\sqrt{6}x \quad 2 \quad 0$ $\qquad iv$ $\quad x^2 \quad 2\sqrt{5}x \quad 1 \quad 0$

v $\quad \frac{3}{5}x^2 \quad \frac{2}{3}x \quad 1 \quad 0$

3. k का मान ज्ञात कीजिए जबकि दिए गए समीकरण के मूल वास्तविक व समान हों–

$i \quad 2x^2 \quad 10x \quad k \quad 0$ $\qquad ii \quad kx^2 \quad 5x \quad k \quad 0$

$iii \quad 2x^2 \quad kx \quad \frac{9}{8} \quad 0$ $\qquad iv \quad 9x^2 \quad kx \quad 16 \quad 0$

$vi \quad kx^2 \quad 4x \quad 1 \quad 0$

4. निम्नलिखित वर्ग समीकरणों को सूत्र की सहायता से हल कीजिए –

$i \quad 9x^2 \quad 7x \quad 2 \quad 0$ $\qquad ii \quad 6x^2 \quad x \quad 2 \quad 0$

$iii \quad 6x^2 \quad 7x \quad 10 \quad 0$ $\qquad iv \quad 2x^2 \quad 9x \quad 7 \quad 0$

$v \quad x^2 \quad 7x \quad 5 \quad 0$ $\qquad vi \quad 4 \quad 11x \quad 3x^2$

$vii \quad 9x^2 \quad 4 \quad 0$ $\qquad viii \quad \sqrt{3}x^2 \quad 10x \quad 8\sqrt{3} \quad 0$

$ix \quad 2x^2 \quad x \quad 6 \quad 0$ $\qquad x \quad 2x^2 \quad 2\sqrt{6}x \quad 3 \quad 0$

E6LP5Q

द्विघात समीकरण के मूल एवं गुणांकों में संबंध –

द्विघातीय बहुपद में हमने बहुपद के शून्यक एवं गुणांकों में संबंध देखा था, वही संबंध द्विघातीय समीकरणों के मूलों एवं गुणांकों में भी होता है।

माना समीकरण $ax^2 \quad bx \quad c \quad 0$ के मूल एवं हैं ,जहाँ $a \quad 0; a, b, c$ वास्तविक संख्या है। तब $x \qquad x \qquad 0$ या $x^2 \qquad x \qquad 0$ वर्ग समीकरण होगा।..................

......(1) वर्ग समीकरण $ax^2 \quad bx \quad c \quad 0$ को निम्नलिखित रूप में भी लिखा जा सकता है–

$$x^2 \quad \frac{b}{a}x \quad \frac{c}{a} \quad 0 \text{.........................(2)}$$

हम देखते हैं कि समीकरण (1) व (2) दोनों ही एक ही समीकरण के दो रूप हैं अतः इनकी तुलना करने पर हम पातें हैं ,

मूलों का योगफल $\quad \frac{b}{a}$

तथा मूलों का गुणनफल $\quad \frac{c}{a}$

उदाहरण:–24. $x^2 \quad 5x \quad 24 \quad 0$ के मूलों का योगफल एवं गुणनफल ज्ञात कीजिए।

हल:– समीकरण $x^2 \quad 5x \quad 24 \quad 0$ की तुलना $ax^2 \quad bx \quad c \quad 0$ से करने पर

$$a \quad 1, b \quad 5, c \quad 24$$

$\because$ मूलों का योगफल $\quad \frac{b}{a}$

मूलों का योगफल $\frac{5}{1}$

$\frac{5}{1}$

5

∵ मूलों का गुणनफल $\frac{c}{a}$

मूलों का गुणनफल $\frac{24}{1}$

24

उदाहरणः—25. $3x^2 \quad 2x \quad 7 \quad 0$ के मूलों का योगफल एवं गुणनफल ज्ञात कीजिए।

हलः— समीकरण $3x^2 \quad 2x \quad 7 \quad 0$ की तुलना $ax^2 \quad bx \quad c \quad 0$ से करने पर

$a \quad 3, b \quad 2, c \quad 7$

∵ मूलों का योगफल $\frac{b}{a}$

मूलों का योगफल $\frac{2}{3}$

∵ मूलों का गुणनफल $\frac{c}{a}$

मूलों का गुणनफल $\frac{7}{3}$

सोचें एवं चर्चा करें

मूल ज्ञात होने पर क्या वर्ग समीकरण बनाया जा सकता है? "बहुपद" अध्याय की अवधारणाओं एवं मूल व गुणांकों के संबंधों के आधार पर वर्ग समीकरण के बनाए जा सकने की संभावनाओं की चर्चा अपने साथियों से करें।

मूल ज्ञात होने पर द्विघात समीकरण बनानाः—

हमने इस अध्याय में अब तक द्विघात समीकरण दिए होने पर उसके मूल ज्ञात करना सीखा है। यदि किसी द्विघात समीकरण के मूल पता हों तब क्या यह संभव है कि हम उस द्विघात समीकरण को ज्ञात कर सकें।

हाँ, हम द्विघात समीकरण के मूलों के योगफल एवं गुणनफल की सहायता से द्विघात समीकरण को ज्ञात कर सकते हैं अर्थात मूल दिए होने पर हम द्विघात समीकरण भी बना सकते हैं।

यदि किसी द्विघात समीकरण के मूल एवं हों तब वह द्विघात समीकरण निम्नलिखित होगा –

$$x^2 \quad x \quad 0$$

अर्थात् x^2 (मूलों का योग) x मूलों का गुणनफल 0

उदाहरणः–26. वह द्विघात समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके मूल 3 व –8 हैं।

हलः– मूल ज्ञात होने पर बनने वाला द्विघात समीकरण

x^2 (मूलों का योग) x मूलों का गुणनफल 0

$$x^2 \quad 3 \quad 8 \quad x \quad 3 \quad 8 \quad 0$$

$$x^2 \quad 5 \; x \quad 24 \quad 0$$

$$x^2 \quad 5x \quad 24 \quad 0$$

उदाहरणः–27. वह द्विघात समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके मूल $\frac{4}{3}$ व $\frac{7}{3}$ हों।

हलः– मूल ज्ञात होने पर बनने वाला द्विघात समीकरण

x^2 (मूलों का योग) x मूलों का गुणनफल 0

$$x^2 \quad \frac{4}{3} \quad \frac{7}{3} \quad x \quad \frac{4}{3} \quad \frac{7}{3} \quad 0$$

$$x^2 \quad \frac{11}{3}x \quad \frac{28}{9} \quad 0$$

$$9x^2 \quad 33x \quad 28 \quad 0$$

उदाहरणः–28. वह द्विघात समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके मूल $2 \quad \sqrt{7}$ व $2 \quad \sqrt{7}$ हैं।

हलः– मूल ज्ञात होने पर बनने वाला द्विघात समीकरण

x^2 (मूलों का योग) x मूलों का गुणनफल 0

$$x^2 \quad 2 \quad \sqrt{7} \quad 2 \quad \sqrt{7} \quad x \quad 2 \quad \sqrt{7} \quad 2 \quad \sqrt{7} \quad 0$$

$$x^2 \quad 4x \quad 4 \quad 7 \quad 0 \qquad \because 2^2 \quad \sqrt{7}^{\,2} \quad 4 \quad 7$$

$$x^2 \quad 4x \quad 3 \quad 0$$

उदाहरणः–29. यदि किसी वर्ग समीकरण के मूलों का योगफल = – 8 तथा गुणनफल = 4 हों तो वर्ग समीकरण बनाइए।

हलः– मूल ज्ञात होने पर बनने वाला द्विघात समीकरण

x^2 (मूलों का योग) x मूलों का गुणनफल 0

$$x^2 \quad 8 \; x \quad 4 \quad 0$$

$$x^2 \quad 8x \quad 4 \quad 0$$

करके देखें

वर्ग (द्विघात) समीकरण बनाइए जिनके मूल निम्नलिखित हैं –

(i) $2, 3$ (ii) $5,\ 3$ (iii) $\sqrt{5}, \sqrt{3}$

प्रश्नावली – 5

1. वर्ग समीकरण बनाइए जिनके मूलों के योगफल व गुणनफल निम्नलिखित हैं –

(i) मूलों का योगफल 4 मूलों का गुणनफल 12

(ii) मूलों का योगफल 6 मूलों का गुणनफल 9

(iii) मूलों का योगफल $2\sqrt{7}$ मूलों का गुणनफल 8

(iv) मूलों का योगफल $\frac{4}{9}$ मूलों का गुणनफल 1

E6VK7D

2. वर्ग समीकरण बनाइए जिनके मूल निम्नलिखित हैं–

(i) $7, 4$ (ii) $5,\ 11$ (iii) $2, 4$ (iv) $12,\ 24$

(v) $\frac{4}{5}, \frac{3}{5}$ (vi) $4, 4$ (vii) $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}$ (viii) $8, 3$

(ix) $\sqrt{3} \quad 7, \sqrt{3} \quad 7$ (x) $6 \quad \sqrt{5}, 6 \quad \sqrt{5}$

3. निम्नलिखित वर्ग (द्विघात) समीकरणों के मूलों के योगफल व गुणनफल ज्ञात कीजिए –

(i) $3x^2 \quad 7x \quad 1 \quad 0$ (ii) $2x^2 \quad 2x \quad 3 \quad 0$

(iii) $3x^2 \quad 5x \quad 2 \quad 0$ (iv) $2x^2 \quad 2\sqrt{6}x \quad 3 \quad 0$

(v) $x^2 \quad 6x \quad 6 \quad 0$

हमने सीखा

1. cgqn ax^2+bx+c, घात 2 का एक चर का बहुपद है, जहाँ a, b, c वास्तविक संख्याएँ और $a \quad 0$ है। इसे द्विघातीय बहुपद कहते हैं। इस द्विघातीय बहुपद को शून्य के बराबर रखने पर यह समीकरण $ax^2 \quad bx \quad c \quad 0$ बन जाता है। चूँकि समीकरण में एक ही चर है और चर की अधिकतम घात 2 है अतः इसे एक चर का द्विघात समीकरण कहते हैं।
2. द्विघात समीकरण को वर्ग समीकरण भी कहते हैं।
3. चर x में किसी द्विघात समीकरण का मानक रूप $ax^2 \quad bx \quad c \quad 0$ है जहाँ a, b, c वास्तविक संख्याएँ तथा $a \quad 0$ है।

4. $ax^2 \quad bx \quad c \quad 0$ के रूप के द्विघात समीकरण के दो ही मूल होते हैं।

5. , d pj x में द्विघात समीकरण के मूल गुणनखंडन से तथा द्विघात समीकरण के सूत्र $x \quad \dfrac{b \quad \sqrt{b^2 \quad 4ac}}{2a}$ में a,b,c के मान रखकर भी x के मान प्राप्त किए जा सकते हैं।

6. किसी द्विघात समीकरण के मूल व हों तब वह द्विघात समीकरण चर x में $x^2 \qquad x \qquad 0$ होता है।
(यहाँ कोई भी चर y, z आदि ले सकते हैं।)

7. यदि वर्ग समीकरण $ax^2 \quad bx \quad c \quad 0$ के मूल व हों तो उनके मूलों एवं गुणांकों में निम्नलिखित संबंध होता है –

मूलों का योगफल $\dfrac{b}{a}$

तथा मूलों का गुणनफल $\dfrac{c}{a}$ होता है।

8. द्विघात समीकरण के सूत्र में $D \quad b^2 \quad 4ac$ विभेदक है जिससे हम मूलों की प्रकृति के बारे में जान पाते हैं।

9. जब $D \quad b^2 \quad 4ac > 0$ अर्थात D का मान धनात्मक हो तो वर्ग समीकरण के दोनों मूल वास्तविक व असमान होते हैं।

10. जब $D \quad b^2 \quad 4ac \quad 0$ अर्थात D का मान 0 हो तो वर्ग समीकरण के दोनों मूल वास्तविक और समान होते हैं।

11. जब $D \quad b^2 \quad 4ac < 0$ अर्थात D का मान ऋणात्मक हो तो वर्ग समीकरण के दोनों मूल काल्पनिक और असमान होते हैं।

उत्तरमाला – 1

1. (i), (iii), (v), (vi), (vii), (x) वर्ग समीकरण हैं।

उत्तरमाला – 2

1. (i) $x \quad 2, x \quad \dfrac{3}{2}$ समीकरण के मूल नहीं हैं।

(ii) $x \quad 2$ समीकरण का मूल है परन्तु $x \quad 3$ समीकरण का मूल नहीं हैं।

(iii) $x \quad 3, x \quad 4$ समीकरण के मूल नहीं हैं।

(iv) $x \quad 0, x \quad \dfrac{9}{4}$ समीकरण के मूल हैं।

(v) $x \quad \sqrt{3}$ समीकरण का मूल है परन्तु $x \quad 2\sqrt{3}$ समीकरण का मूल नहीं हैं।

2. (i) $x \quad 4, x \quad 2$ (ii) $x \quad \frac{3}{2}, x \quad \frac{7}{3}$ (iii) $x \quad 7, x \quad 7$

(iv) $x \quad 0, x \quad 11$ (v) $x \quad 12, x \quad 12$ (vi) $x \quad 0, x \quad 1$

3. $x \quad \sqrt{2}$ समीकरण का एक मूल नहीं है।

4. (i) $x \quad \frac{2}{3}, x \quad \frac{1}{3}$ (ii) $x \quad 0, x \quad \frac{5}{4}$ (iii) $x \quad \frac{5}{3}, x \quad 2$

(iv) $x \quad \frac{2}{5}, x \quad 1$ (v) $x \quad \frac{2}{3}, x \quad \frac{1}{2}$ (vi) $x \quad \frac{2}{\sqrt{3}}, x \quad \frac{\sqrt{3}}{4}$

(vii) $x \quad \frac{1}{2}, x \quad \frac{1}{5}$ (viii) $x \quad 3\sqrt{2}, x \quad \sqrt{2}$

(ix) $x \quad \frac{b}{a}, x \quad \frac{c}{b}$ (x) $x \quad 5, x \quad \frac{1}{5}$

उत्तरमाला – 3

1. $i \quad \frac{1 \quad \sqrt{33}}{4}, \frac{1 \quad \sqrt{33}}{4}$ $ii \quad \frac{5}{3}, \ 2$ $iii \quad \frac{3 \quad \sqrt{19}}{5}, \frac{3 \quad \sqrt{19}}{5}$

$iv \quad \sqrt{2}, 3\sqrt{2}$ $v \quad \frac{1}{3}, \ 1$ $vi \quad 3,1$

2. $\frac{1 \quad \sqrt{29}}{2}, \frac{1 \quad \sqrt{29}}{2}$ 3. क्रमागत प्राकृत संख्याएँ 6,7

4. क्रमागत प्राकृत संख्याए 4,5 5. संख्याएँ 36,12

6. आधार भुजा की लंबाई = 15 मीटर, शीर्षलंब की लंबाई = 22 मीटर

7. 21मीटर, 17मीटर 8. 250 रुपये,

9. 36 वर्ष, 9 वर्ष 10. 13 वर्ष

11. 16 विद्यार्थी 12. 12, 28 या 21, 19

उत्तरमाला – 4

1. $i \quad 8$ $ii \quad 1$ $iii \quad 32$ $iv \quad 16 \quad 4a$ $v \quad p^2 \quad 4q$

2. i वास्तविक और समान मूल ii मूल वास्तविक नहीं

iii वास्तविक और समान मूल iv मूल वास्तविक तथा असमान

v मूल वास्तविक नहीं

3. i $k \quad \frac{25}{2}$ ii $k \quad \frac{5}{2}$ iii $k \quad 3$

iv $k \quad 24$ vi $k \quad 4$

4. i $\frac{2}{9}, \; 1$ ii $\frac{1}{2}, \; \frac{2}{3}$ iii $2, \frac{5}{6}$ iv $\frac{7}{2}, 1$

v $\frac{1}{2} \; 7 \quad \sqrt{69} \;, \frac{1}{2} \; 7 \quad \sqrt{69}$ vi $4, \frac{1}{3}$ vii $\frac{2}{3}, \frac{2}{3}$

$viii$ $\frac{12}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}$ ix $2, \frac{3}{2}$ x $\frac{\sqrt{6}}{2}$

उत्तरमाला – 5

1. (i) $x^2 \quad 4x \quad 12 \quad 0$ (ii) $x^2 \quad 6x \quad 9 \quad 0$

(iii) $x^2 \quad 2\sqrt{7}x \quad 8 \quad 0$ (iv) $9x^2 \quad 4x \quad 9 \quad 0$

2. (i) $x^2 \quad 11x \quad 28 \quad 0$ (ii) $x^2 \quad 16x \quad 55 \quad 0$

(iii) $x^2 \quad 2x \quad 8 \quad 0$ (iv) $x^2 \quad 12x \quad 288 \quad 0$

(v) $x^2 \quad \frac{1}{5}x \quad \frac{12}{25} \quad 0$ (vi) $x^2 \quad 8x \quad 16 \quad 0$

(vii) $15x^2 \quad x \quad 2 \quad 0$ (viii) $x^2 \quad 11x \quad 24 \quad 0$

(ix) $x^2 \quad 2\sqrt{3}x \quad 46 \quad 0$ (x) $x^2 \quad 12x \quad 31 \quad 0$

3. (i) $\frac{7}{3}, \frac{1}{3}$ (ii) $1, \frac{3}{2}$ (iii) $\frac{5}{3}, \frac{2}{3}$

(iv) $\sqrt{6}, \frac{3}{2}$ (v) $6, \; 6$

अध्याय 04

समान्तर श्रेढ़ी

[ARITHMETIC PROGRESSION]

संख्याओं के पैटर्न

नीचे दी गई संख्याओं को देखिए–

2, 4, 6, 8, 10, ...

क्या आपको इसमें कुछ निश्चित क्रम अथवा पैटर्न दिखाई देता है?

सलमा – इसमें प्रत्येक संख्या अपने से बाद की संख्या से 2 कम है।

मोहन – इसमें प्रत्येक संख्या 2 की क्रमवार गुणज है। 2 को 1 से गुणा करने पर 2, 2 को 2 से गुणा करने पर 4, 2 को 3 से गुणा करने पर 6 और इसी तरह आगे ....

जॉन – इसमें पहली संख्या 2 को दो गुना करने पर दूसरी संख्या 4, दूसरी संख्या 4 का डेढ़ गुना करने पर तीसरी संख्या 6 मिलती है।

आप देख सकते हैं कि जॉन के पैटर्न में प्रत्येक संख्या के लिए अलग–अलग नियम होगा जबकि सलमा और मोहन के पैटर्न में एक ही नियम से सभी संख्याएँ बनेंगी।

अब आप नीचे दी गई संख्याओं को देखिए–

6, 11, 16, 21, ...

आप कह सकते हैं कि इसमें पहली संख्या को छोड़कर प्रत्येक संख्या अपनी पिछली संख्या में 5 जोड़ने पर मिलती है।

क्या इनमें कोई और भी पैटर्न मिल सकता है? (चर्चा करें)।

नीचे संख्याओं के कुछ और उदाहरण दिए जा रहे हैं–

1. –5, –7, –9, –11, –13, ...
2. 4, 9, 14, 19, ...
3. 3, 7, 11, 15, ...

श्रेढ़ी क्या है?

इनमें आप देख सकते हैं कि प्रत्येक श्रृंखला की संख्याएँ अपने से पिछली संख्या से एक निश्चित मात्रा में घटती या बढ़ती है, पहली श्रृंखला में संख्या दो–दो से कम हो रही है जबकि

दूसरी में 5 से और तीसरी में 4 से बढ़ रही है। ऐसी संख्या शृंखलाएँ जिनमें क्रमिक संख्याओं के बीच एक निश्चित संबंध हो श्रेढ़ी कहलाती है।

करके देखें

नीचे दी गई सख्याओं की प्रत्येक श्रेढ़ी में क्या पैटर्न है? पहचान कीजिए–

(1) 4, 10, 16, 22, ...

(2) 0, 3, 6, 9, ...

(3) –1, –3, –5, –7, ...

समांतर श्रेढ़ी

आपने देखा कि ऊपर दी गई श्रेढ़ी में पहले पद के बाद प्रत्येक पद, अपने पिछले पद में एक निश्चित संख्या जोड़कर प्राप्त किया जाता है। संख्याओं की ऐसी शृंखला समांतर श्रेढ़ी (Arithmetic Progression या A.P.) कहलाती है और यह निश्चित संख्या समांतर श्रेढ़ी का सार्व अंतर (common difference) कहलाती है। सार्व अंतर धनात्मक, ऋणात्मक या शून्य हो सकता है।

आइए इस समांतर श्रेढ़ी पर विचार करें–

8, 13, 18, 23, ...

इस श्रेढ़ी का प्रथम पद 8 और दूसरा पद 13 है, तीसरा पद 18 और चौथा पद 23 है। प्रत्येक पद में 5 जोड़ने पर अगला पद मिलता है, इसलिए इस समांतर श्रेढ़ी का सार्व अंतर 5 है।

उदाहरण:–1. समांतर श्रेढ़ी –7, –11, –15, –19, ... के लिए प्रथम पद, चौथा पद और सार्व अंतर ज्ञात कीजिए।

हल:– प्रथम पद = –7, चौथा पद = –19

सार्व अंतर = द्वितीय पद–प्रथम पद

$= -11 - (-7)$

$= -4$

करके देखें

1. नीचे दी हुई संख्याओं की शृंखला में से समांतर श्रेढ़ी छाँटिए

(i) 9, 16, 23, 30, -----------------

(ii) 11, 15, 18, 20, -----------------

(iii) 4, 13, 19, 28, -----------------

(iv) 0, -3, -6, -9, -----------------

(v) 2, 2, 2, 2, -----------------

(vi) $9\frac{1}{7}, \frac{7}{7}, \frac{9}{7}, \frac{13}{7}, \ldots\ldots\ldots\ldots$

2. दी हुई समांतर श्रेढ़ी के लिए प्रथम पद और सार्व अंतर लिखिए—

(i) 9, 12, 15, 18, -----------------

(ii) 2, 8, 14, 20, ------------------

(iii) 3, -2, -7, -12, ----------------

(iv) -5, 2, 9, 16, -----------------

(v) 0.4, 0.9, 1.4, 1.9, --------------

(vi) 5, 5, 5, 5, ---------------------

(vii) $\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{9}{3}, \frac{13}{3}$,...........

आगे के पद ज्ञात करना

नीचे एक समांतर श्रेढ़ी दी गई है—

3, 10, 17, ...

क्या हम इसके आगे के पद पता कर सकते हैं? सोचें इस समांतर श्रेढ़ी का अगला यानी चौथा पद कैसे ज्ञात करें।

अजीता — तीसरे पद यानी 17 में 7 सार्व अंतर जोड़ने पर 24 मिलता है, यही इस श्रेढ़ी का चौथा पद है।

अब आप इस श्रेढ़ी के अगले चार पद यानी पाँचवे, छठे, सातवें, आठवें पद लिखिए—

पाँचवाँ पद		सातवाँ पद	
छठवाँ पद		आठवाँ पद	

करके देखें

1. नीचे दी गई समांतर श्रेढ़ियों के अगले तीन पद ज्ञात कीजिए।

(i) 5, 11, 17, 23, -----------------

(ii) -11, -8, -5, -2, -----------------

(iii) $\frac{4}{9}, \frac{7}{9}, \frac{10}{9}, \frac{13}{9}$,......................

(iv) 0, 9, 18, 27, -----------------

हमने यहाँ कई समांतर श्रेढ़ियाँ देखीं। प्रत्येक में प्रथम पद और एक सार्व अंतर है। यदि हम समांतर श्रेढ़ी के पहले पद या प्रथम पद को a और सार्व अंतर को d से व्यक्त करें, तो हम आगे के सभी पद a और d के आधार पर बता सकते हैं। समांतर श्रेढ़ी का दूसरा पद, पहले पद में सार्व अंतर d जोड़ने पर मिलेगा यानी दूसरा पद a+d होगा। इसी तरह दूसरे पद a+d में d जोड़ने पर तीसरा पद a+d+d प्राप्त होगा। आप समांतर श्रेढ़ी को इस तरह लिख सकते हैं–

$a, a + d, a + d + d, a + d + d + d, ...$

या

$a, a + d, a + 2d, a + 3d, ...$

इसे समांतर श्रेढ़ी का व्यापक रूप कहते हैं। पदों की संख्या परिमित होने पर इसे परिमित समांतर श्रेढ़ी कहते हैं और पदों की संख्या अपरिमित होने पर यह अपरिमित समांतर श्रेढ़ी कहलाती है।

आप देख सकते हैं कि उदाहरण (1) में दी गई समांतर श्रेढ़ी 7, 11, 15, 19, ... में पदों की संख्या अपरिमित है, इसलिए यह अपरिमित समांतर श्रेढ़ी है।

करके देखें

1. एक अपरिमित समांतर श्रेढ़ी बनाइए, जिसका प्रथम पद 5 और सार्व अंतर 3 हो।
2. 5 पदों वाली दो परिमित समांतर श्रेढ़ियाँ बनाइए।
3. 10 पदों वाली किसी परिमित समांतर श्रेढ़ी की सबसे बड़ी सदस्य संख्या कौनसी होगी यदि $a=11$ और $d=6$?

नोट :– सार्व अंतर का हमेशा प्राकृत संख्या होना आवश्यक नहीं है। सार्व अंतर कोई भी वास्तविक संख्या हो सकती है।

उदाहरणः–2. किसी समांतर श्रेढ़ी का प्रथम पद $a=10$, सार्व अंतर $d= -3$ हो, तो श्रेढ़ी के प्रथम तीन पद लिखिए।

हलः–

प्रथम पद $a=10$

सार्व अंतर $d= -3$

द्वितीय पद $= a+d$

$= 10 + (-3)$

$= 7$

तृतीय पद $= a+2d$

$= 10+2(-3)$

$= 10-6$

$= 4$

अतः श्रेढ़ी के प्रथम तीन पद 10, 7, 4 है।

समांतर श्रेढ़ी के पहले पद या प्रथम पद को a_1 से, द्वितीय पद को a_2 से, तृतीय पद को a_3 से,.............., n वें पद को a_n से तथा सार्व अंतर (common difference) को d से व्यक्त करें, तो समांतर श्रेढ़ी को $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots a_n$ से व्यक्त कर सकते हैं

इस स्थिति में सार्व अंतर $d=a_2-a_1=a_3-a_2=\ldots\ldots a_n-a_{n-1}$।

उदाहरणः–3. संख्याओं की निम्नलिखित श्रृंखलाओं में से कौन–कौन सी समांतर श्रेढ़ी में है? समांतर श्रेढ़ी के अगले दो पद लिखिए।

(i) 9, 27, 81, ...

(ii) $4, 4 \quad \sqrt{3}, 4 \quad 2\sqrt{3}, 4 \quad 3\sqrt{3}, \ldots\ldots\ldots\ldots$

(iii) 1, -1, -3, -5, ...

(iv) 0.2, 0.22, 0.222, 0.2222, ...

हलः–

(i) $a_1=9, a_2=27, a_3=81$

$a_2-a_1 = 27 - 9 = 18$

$a_3-a_2 = 81-27 = 54$

चूँकि, $a_3 \quad a_2 \quad a_2 \quad a_1$, इसलिए दी गई संख्याओं की श्रृंखला एक समांतर श्रेढ़ी नहीं है।

(ii) $a_1 \quad 4, a_2 \quad 4 \quad \sqrt{3}, a_3 \quad 4 \quad 2\sqrt{3}, a_4 \quad 4 \quad 3\sqrt{3},$

$a_2 \quad a_1 \quad 4 \quad \sqrt{3} \quad 4 \quad \sqrt{3}$

$a_3 \quad a_2 \quad 4 \quad 2\sqrt{3} \quad (4 \quad \sqrt{3}) \quad \sqrt{3}$

$a_4 \quad a_3 \quad 4 \quad 3\sqrt{3} \quad (4 \quad 2\sqrt{3}) \quad \sqrt{3}$

चूँकि प्रत्येक बार $a_{k\ 1} \quad a_k$ (जहाँ k=1,2,3......) समान ही है, इसलिए दी गई संख्याओं की श्रृंखला एक समांतर श्रेढ़ी है, जिसका सार्व अंतर $d \quad \sqrt{3}$ है। इस श्रेढ़ी के अगले दो पद

$(4 \quad 3\sqrt{3}) \quad (\sqrt{3}) \quad 4 \quad 4\sqrt{3}$ और

$(4 \quad 4\sqrt{3}) \quad (\sqrt{3}) \quad 4 \quad 5\sqrt{3}$ हैं।

(iii) $a_1 \quad 1, a_2 \quad 1, a_3 \quad 3, a_4 \quad 5$

$a_2 \quad a_1 \quad 1 \quad 1 \quad 2$

$a_3 \quad a_2 \quad 3 \quad (\quad 1) \quad 2$

$a_4 \quad a_3 \quad 5 \quad (\quad 3) \quad 2$

चूँकि प्रत्येक बार $a_{k\ 1} \quad a_k$ (जहाँ k=1,2,3......) समान ही है, इसलिए दी गई संख्याओं की श्रृंखला एक समांतर श्रेढ़ी है, जिसका सार्व अंतर d= 2 है। इस श्रेढ़ी के अगले दो पद

$5 \quad (\quad 2) \quad 7$ और $7 \quad (\quad 2) \quad 9$ हैं।

(iv) $a_1 \quad 0.2, a_2 \quad 0.22, a_3 \quad 0.222, a_4 \quad 0.2222$

$a_2 \quad a_1 \quad 0.22 \quad 0.2 \quad 0.02$

$a_3 \quad a_2 \quad 0.222 \quad 0.22 \quad 0.002$

चूँकि $a_3 \quad a_2 \quad a_2 \quad a_1$ इसलिए दी गई संख्याओं की श्रृंखला एक समांतर श्रेढ़ी नहीं है।

समांतर श्रेढ़ी का n वाँ पद

मान लीजिए कि $a_1, a_2, a_3,$.......... एक समांतर श्रेढ़ी है, जिसका प्रथम पद a है और सार्व अंतर d है, तब

प्रथम पद $\quad a_1 \quad a$

द्वितीय पद $\quad a_2 \quad a \quad d \quad a \quad (2 \quad 1)d$

तृतीय पद $\quad a_3 \quad a \quad 2d \quad a \quad (3 \quad 1)d$

चौथा पद $\quad a_4 \quad a \quad 3d \quad a \quad (4 \quad 1)d$

पाँचवाँ पद $\quad a_5 \quad a \quad 4d \quad a \quad (5 \quad 1)d$

उपर्युक्त पैटर्न को देखकर आप कह सकते हैं कि

n वाँ पद $a_n \quad a \quad (n \quad 1)d$

यदि किसी समांतर श्रेढ़ी में m पद हैं, तो a_m इसके अंतिम पद को व्यक्त करता है। अंतिम पद को l से भी व्यक्त किया जाता है।

आइए, इसे कुछ उदाहरणों से समझें–

उदाहरण:–4. समांतर श्रेढ़ी 4,7,10,13 .... का 10 वाँ पद ज्ञात कीजिए–

हल:–

यहाँ $a \quad 4, \ d \quad 7 \quad 4 \quad 3$ और $n \quad 10$

$a_{10} \quad a \quad (10 \quad 1)d$ $\qquad$ [$\because$ n वाँ पद $a_n \quad a \quad (n \quad 1)d$]

$= 4 + 9 \quad 3$

$= 4 + 27$

$= 31$

उदाहरणः–5. समांतर श्रेढ़ी 2,6,10,......... में m पद हैं। अंतिम पद ज्ञात कीजिए।

हलः– यहाँ प्रथम पद a=2, सार्व अंतर d=6-2=4 और पदों की संख्या m है। इसलिए अंतिम पद m होगा। अतः n=m

m वाँ पद $a_m = a+(m-1)d$ $\quad [\because$ n वाँ पद $a_n = a + (n-1)d]$

$a_m = 2+(m-1)4$

$= 2+4m-4$

$= 4m-2$

करके देखें

1. समांतर श्रेढ़ी 3,5,7,................ में 15 पद हैं। अंतिम पद ज्ञात कीजिए।
2. समांतर श्रेढ़ी –9,–5,–1,............ का अंतिम पद 67 है तो श्रेढ़ी में कितने पद हैं?
3. समांतर श्रेढ़ी 10, 15, 20, ... का m वाँ और p वाँ पद ज्ञात कीजिए।

आइए, ऐसे कुछ और उदाहरणों को समझें–

उदाहरणः–6. क्या समांतर श्रेढ़ी 5,11,17,23,.............. का कोई पद 301 है? कारण सहित लिखिए।

हलः–

यहाँ a=5, d=11-5=6,

माना n वाँ पद 301 है अर्थात् $a_n = 301$

हमें n का मान ज्ञात करना है।

$a_n = a + (n-1)d$

$301 = 5 + (n-1)6$

$301 = 5+6n-6$

$301 = 6n-1$

$6n = 302$

$$n = \frac{302}{6}$$

$$n = \frac{151}{3}$$

चूँकि n पदों की संख्या है, अतः एक धनात्मक पूर्णांक होना चाहिए। इसलिए 301 दी गई समांतर श्रेढ़ी का कोई पद नहीं है।

उदाहरणः–7. एक समांतर श्रेढ़ी में 50 पद हैं, जिसका तीसरा पद 12 है और अंतिम पद 106 है। इसका 29 वाँ पद ज्ञात कीजिए।

हलः–

माना समांतर श्रेढ़ी का प्रथम पद a और सार्व अंतर d है।

तीसरा पद = 12

$a_3 = 12$

या, $a + (3-1)\,d = 12$

या, $a + 2d = 12$ .... (1)

और अंतिम पचासवाँ पद = 106

50 वाँ पद = 106

$a_{50}\quad 106$

$a + (50-1)\,d = 106$

$a + 49d = 106$ .... (2)

समीकरण (2) में से समीकरण (1) को घटाने पर

$a + 49d = 106$

$a + 2d = 12$

$47d = 94$

$d \quad \frac{94}{47}$

$d = 2$ ....(3)

समीकरण (3) से d का मान समीकरण (1) में रखने पर

$a + 2\,(2) = 12$

$a + 4 = 12$

$a = 12 \quad 4$

$a = 8$ ....(4)

समांतर श्रेढ़ी का 29 वाँ पद $= a + (29-1)d$

$= 8 + (28)(2)$

$= 8 + 56$

$= 64$

इसलिए समांतर श्रेढ़ी का 29वाँ पद 64 है।

करके देखें

1. एक समांतर श्रेढ़ी में 50 पद हैं, जिसका तीसरा पद 12 है और अंतिम पद 106 है। इस श्रेढ़ी का 21 वाँ पद ज्ञात कीजिए।
2. एक समांतर श्रेढ़ी का प्रथम पद 10 और सार्व अंतर –3 है। 11 वाँ पद ज्ञात कीजिए।

समांतर श्रेढ़ियाँ कई तरह के सवाल हल करने में भी मदद कर सकती हैं। आइए, इसे भी कुछ उदाहरणों से समझें–

उदाहरणः–8. दो अंकों वाली कितनी संख्याएँ 5 से विभाज्य हैं?

हलः–

5 से विभाज्य होने वाली दो अंकों की संख्याओं की श्रृंखला निम्नानुसार है–

10, 15, 20, ..., 95

यह एक समांतर श्रेढ़ी है, जिसका प्रथम पद $a=10$, सार्व अंतर $d=5$ और n वाँ पद $a_n=95$

चूँकि n वाँ पद $a_n = a + (n-1)d$

$95 = 10 + (n-1) \times 5$

$95 = 10 + 5n - 5$

$95 = 5 + 5n$

$5n = 95 - 5$

$n = \frac{90}{5}$

$n = 18$

इसलिए 5 से विभाज्य दो अंकों वाली 18 संख्याएँ हैं।

उदाहरणः–9. ज्योति ने 1997 में 5000 रुपये के मासिक वेतन वाले पद पर कार्य आरंभ किया और प्रत्येक वर्ष 200 रुपये की वेतन वृद्धि प्राप्त की। किस वर्ष में उसका वेतन 7000 रुपये हो गया?

हलः–

वर्ष 1997, 1998, 1999, 2000, ... में मासिक वेतन (रुपये में) है

5000, 5200, 5400, 5600 ....

यह एक समांतर श्रेढ़ी है, क्योंकि किन्हीं दो क्रमागत पदों का अंतर 200 है, इसलिए सार्व अंतर $d=200$ और प्रथम पद $a=5000$

माना n वर्षों में ज्योति का वेतन 7000 रुपये हो गया।

तब

$$\begin{aligned}
a_n &= 7000 \\
a + (n-1)d &= 7000 \\
5000 + (n-1)\,200 &= 7000 \\
(n-1)\,200 &= 7000 - 5000 \\
(n-1)\,200 &= 2000 \\
n-1 &= \frac{2000}{200} \\
n-1 &= 10 \\
n &= 11
\end{aligned}$$

इसलिए ग्यारहवें वर्ष में अर्थात् 2007 में ज्योति का वेतन 7000 रुपये हो गया।

अभी तक आपने ऐसे उदाहरण हल किए जिनमें संख्याओं से बनी श्रृंखलाएँ समांतर श्रेढ़ी बनाती हैं। अब कुछ ऐसे उदाहरण हल करेंगे जिनमें अक्षर संख्याओं (जैसे p,q,r इत्यादि) से बनी श्रृंखलाएँ समांतर श्रेढ़ी बनाती हैं।

उदाहरणः–10. एक समांतर श्रेढ़ी का p वाँ पद q और q वाँ पद p है, तो श्रेढ़ी का m वाँ पद ज्ञात कीजिए।

हलः–

मान लीजिए समांतर श्रेढ़ी का प्रथम पद a और सार्व अंतर d है।

यहाँ,समांतर श्रेढ़ी का p वाँ पद = q

$$a+(p-1)d = q \;.............(1)$$

समांतर श्रेढ़ी का q वाँ पद = p

$$a+(q-1)d = p \;.............(2)$$

समीकरण (1) में समीकरण (2) को घटाने पर

$$\begin{aligned}
a + (p-1)d &= q \\
a + (q-1)d &= p
\end{aligned}$$

घटाने पर

$$\begin{aligned}
[(p-1)-(q-1)]d &= q-p \\
[p-1-q+1]d &= q-p \\
(p-q)\,d &= q-p
\end{aligned}$$

$$d = \frac{(p \quad q)}{(p \quad q)}$$

$$d = -1 \qquad .....(3)$$

समीकरण (3) से d का मान समीकरण (1) में रखने पर

$$a + (p-1)(-1) = q$$
$$a = q + (p-1)$$
$$a = q + p - 1 \quad \text{.....(4)}$$

श्रेढ़ी का m वाँ पद $a_m = a + (m-1)d$

$$= (p+q-1) + (m-1)(-1)$$
$$= p + q - 1 - m + 1$$
$$= p + q - m$$

इसलिए श्रेढ़ी का m वाँ पद $= p + q - m$

प्रश्नावली 1

1. सही विकल्प चुनकर कारण सहित लिखिए–

(i) दी गई समांतर श्रेढ़ी का प्रथम पद और सार्व अंतर है–

$\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \ldots\ldots\ldots$

(a) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ (b) $\frac{3}{2}, 1$ (c) $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$ (d) $\frac{3}{2}, 1$

(ii) किसी समांतर श्रेढ़ी का प्रथम पद –2 और सार्व अंतर –2 है तो चौथा पद होगा–

(a) 0 (b) –2 (c) –4 (d) –8

(iii) समांतर श्रेढ़ी 7,13,19,.... का 15 वाँ पद होगा–

(a) 91 (b) 97 (c) 112 (d) 90

(iv) किसी समांतर श्रेढ़ी का प्रथम पद 4 और सार्व अंतर –4 है तो n वाँ पद होगा–

(a) 8 – 2n (b) 4 – 2n (c) 8 – 4n (d) 8 – 8n

(v) समांतर श्रेढ़ी 3, 8, 13, 18.... का कौन–सा पद 78 है?

(a) 15 वाँ (b) 16 वाँ (c) 17 वाँ (d) 18 वाँ

2. निम्नलिखित श्रेढ़ियों में कौन–सी समांतर श्रेढ़ी है कारण भी बताइए–

(a) $a, a^2, a^3, a^4, \ldots..$

(b) $\sqrt{2}, \sqrt{8}, \sqrt{18}, \sqrt{32}, \ldots.$

(c) $1^2, 3^2, 5^2, 7^2, 9^2, ...$

(d) $0, \ 4, \ 8, \ 12, ...$

(e) $16, 18\frac{1}{2}, 20\frac{1}{2}, 23, ...$

3. समांतर श्रेढ़ी 9,5,1,–3,............ का 10 वाँ पद ज्ञात कीजिए।
4. समांतर श्रेढ़ी 100, 70, 40,........ का 40वाँ पद ज्ञात कीजिए।
5. समांतर श्रेढ़ी $\frac{1}{9}, \frac{4}{9}, \frac{7}{9}, ...$ का n वाँ पद ज्ञात कीजिए।
6. समांतर श्रेढ़ी 950, 900, 850, ... का m वाँ पद ज्ञात कीजिए।
7. समांतर श्रेढ़ी 8,15,22, ... का अंतिम पद 218 है। पदों की संख्या ज्ञात कीजिए।
8. 27, 24, 21, ... का कौन–सा पद शून्य है?
9. यदि दो समांतर श्रेढ़ियों का सार्व अंतर समान है और इनके 99 वें पदों का अंतर 99 है, तो इनके 999 वें पदों का अंतर क्या होगा? कारण भी बताइए।
10. फूलों की एक क्यारी की पहली पंक्ति में 23 पौधे हैं, दूसरी पंक्ति में 21 पौधे हैं, तीसरी पंक्ति में 19 पौधे हैं, इत्यादि। इस क्यारी की अंतिम पंक्ति में 5 पौधे हैं। क्यारी में कुल कितनी पंक्तियाँ हैं?
11. संजय ने वर्ष के प्रथम सप्ताह में 5 रुपये की बचत की और फिर अपनी साप्ताहिक बचत 1.75 रुपये बढ़ाता गया। यदि n वें सप्ताह में उसकी साप्ताहिक बचत 20.75 रुपये हो जाती है, तो n का मान ज्ञात कीजिए।
12. क्या समांतर श्रेढ़ी $18, 15\frac{1}{2}, 13, ...$ का एक पद –47 है? यदि हाँ तो कौनसा पद है?
13. यदि किसी समांतर श्रेढ़ी का 11 वाँ पद 38 और 16 वाँ पद 73 है, तो इस श्रेढ़ी का 31 वाँ पद ज्ञात कीजिए।
14. किसी समांतर श्रेढ़ी का 12 वाँ पद उसके 5 वें पद से 14 अधिक है और दोनों पदों का योग 36 है, तो इस श्रेढ़ी का m वाँ पद ज्ञात कीजिए।
15. समांतर श्रेढ़ी 3,15,27,39, ... का कौनसा पद उसके 54 वें पद से 132 अधिक होगा?
16. किसी समांतर श्रेढ़ी के चौथे और आठवें पदों का योग 24 है तथा छठे और दसवें पदों का योग 44 है। इस समांतर श्रेढ़ी के प्रथम तीन पद ज्ञात कीजिए।
17. तीन अंकों वाली कितनी संख्याएँ 3 से विभाज्य हैं?
18. समांतर श्रेढ़ी 3,8,13, ..., 253 में अंतिम से 10 वाँ पद ज्ञात कीजिए।

19. एक समांतर श्रेढ़ी का p वाँ पद $\frac{1}{q}$ और q वाँ पद $\frac{1}{p}$ है, तो सिद्ध कीजिए कि श्रेढ़ी के (pq) वें पद का मान 1 है।

20. यदि किसी समांतर श्रेढ़ी का p वाँ पद q, q वाँ पद p हो तो सिद्ध कीजिए कि $(p \quad q)$ वाँ पद शून्य है।

21. यदि a,b,c किसी समांतर श्रेढ़ी के क्रमशः p वें, q वें और r वें पद हैं, तो सिद्ध कीजिए कि–

$$a(q \quad r) \quad b(r \quad p) \quad c(p \quad q) \quad 0$$

22. n के किस मान के लिए, समांतर श्रेढ़ियों 63,65,67,...... और 3,10,17.... के n वें पद बराबर होंगे?

समांतर माध्य

E7ECAN

मान लीजिए तीन राशियाँ a, A, b समांतर श्रेढ़ी में है, तो बीच की राशि A को दो राशियों a और b का समांतर माध्य (Arithmetic Mean) कहते हैं।

चूँकि a, A, b समांतर श्रेढ़ी में हैं, इसलिए

$$A - a = b - A$$
$$A + A = b + a$$
$$2A = a + b$$
$$A = \frac{a \quad b}{2}$$

इसलिए आप कह सकते हैं कि दो राशियों का समांतर माध्य, उन दोनों राशियों के योगफल का आधा होता है। आइए एक उदाहरण से इसे समझें।

उदाहरणः–11. $\sqrt{2} \quad 1$ और $\sqrt{2} \quad 1$ का समांतर माध्य ज्ञात कीजिए।

हलः–

समांतर माध्य $\dfrac{(\sqrt{2} \quad 1) \quad (\sqrt{2} \quad 1)}{2}$

$$\frac{(\sqrt{2} \quad 1) \quad (\sqrt{2} \quad 1)}{2}$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{2}$$

$$\sqrt{2}$$

दो राशियों a और b के बीच समांतर श्रेढ़ी का निर्माण

हम चाहें तो किन्हीं भी दो राशियों के बीच नयी संख्याएँ डालकर समांतर श्रेढ़ी बना सकते हैं। इसके लिए हमें बीच में पदों की संख्या के हिसाब से सार्व अंतर d लेना होगा। मान लीजिए दो राशियों a और b के बीच n पद $A_1, A_2, A_3, ...A_n$ प्रविष्ट करने हैं। तब $a, A_1, A_2, A_3, ...A_n, b$ समांतर श्रेढ़ी में होंगे और इस समांतर श्रेढ़ी का प्रथम पद a, अंतिम पद b और पदों की संख्या (n+2) होगी।

मान लीजिए इस समांतर श्रेढ़ी का सार्व अंतर d है,

तो अंतिम पद $b \quad a \quad (\overline{n \quad 2} \quad 1)d$ [$\because$ n वाँ पद $a_n \quad a \quad (n \quad 1)d$]

$$b \quad a \quad (n \quad 1)d$$

$$b \quad a \quad (n \quad 1)d$$

$$d \quad \frac{b \quad a}{n \quad 1}$$

इसलिए $A_1 \quad a \quad d \quad a \quad \frac{b \quad a}{n \quad 1}$

$$A_2 \quad a \quad 2d \quad a \quad 2 \quad \frac{b \quad a}{n \quad 1}$$

$$A_3 \quad a \quad 3d \quad a \quad 3 \quad \frac{b \quad a}{n \quad 1}$$

उपर्युक्त पैटर्न को देखकर कह सकते हैं कि

n वाँ पद $A_n \quad a \quad nd \quad a \quad n \quad \frac{b \quad a}{n \quad 1}$

आइए, इसे कुछ उदाहरणों से समझें।

उदाहरणः–12. 11 और –5 के बीच 3 पदों का निवेश करते हुए समांतर श्रेढ़ी का निर्माण कीजिए।

हलः–

माना 11 और –5 के बीच 3 पद A_1, A_2, A_3 हैं। इसलिए 11, A_1, A_2, A_3, -5 समांतर श्रेढ़ी में हैं। इस समांतर श्रेढ़ी का प्रथम पद a=11, 5 वाँ पद = -5 है। मान लीजिए इस समांतर श्रेढ़ी का सार्व अंतर d है।

5 वाँ पद = a + 4d [∵ n वाँ पद $a_n \quad a \quad (n \quad 1)d$]

$-5 = 11 + 4d$

$-5-11 = 4d$

$4d = -16$

$$d = \frac{16}{4}$$

$d = -4$

अतः $A_1 = a + d$

$= 11 + (-4)$

$= 7$

$A_2 = a + 2d$

$= 11 + 2(-4)$

$= 11 - 8$

$= 3$

$A_3 = a + 3d$

$= 11 + 3(-4)$

$= 11 - 12$

$= -1$

इसलिए 11 और –5 के बीच तीन पद 7,3,–1 हैं और जिनसे निम्नलिखित समांतर श्रेढ़ी बनती है–

11, 7, 3, –1, –5

उदाहरणः–13. 2 और 41 के बीच n पद हैं। 2 और 41 के बीच के चौथे व (n-1) वें पदों का अनुपात 2:5 है। तो n का मान बताइए।

हलः–

मान लीजिए 2 और 41 के बीच n पद $A_1, A_2, A_3 .....A_n$ हैं तब 2, $A_1, A_2, A_3 .....A_n$, 41 समांतर श्रेढ़ी में हैं, जिसका प्रथम पद a=2 और (n+2) वाँ पद 41 है।

मान लीजिए श्रेढ़ी का सार्व अंतर d है। तब

(n+2) वाँ पद = 41

$2 \quad (\overline{n \quad 2} \quad 1)d \quad 41$ [∵ n वाँ पद $a_n = a + (n-1)d$]

$2 + (n + 1)d = 41$

$(n+1)d = 41-2$

$$d = \frac{39}{n \quad 1}$$

प्रश्नानुसार,

$$\frac{\text{श्रेढ़ी का चौथा पद} A_4}{\text{श्रेढ़ी का nवाँ पद} A_{n \quad 1}} \quad \frac{2}{5}$$

$$\frac{a \quad 4d}{a \quad (n \quad 1)d} \quad \frac{2}{5}$$

$$5a+20d = 2a+2(n \quad 1)d$$

$$5a \quad 2a = 2(n \quad 1)d \quad 20d$$

$$3a = (2n \quad 2)d \quad 20d$$

$$3a = (2n \quad 2 \quad 20)d$$

$$3a = (2n \quad 22)d$$

$$3(2) = (2n\text{-}22) \quad \frac{39}{n \quad 1}$$

(a और d का मान रखने पर)

$$6(n+1) = 39(2n\text{-}22)$$

$$6n+6 = 78n\text{-}858$$

$$6+858 = 78n\text{-}6n$$

$$864 = 72n$$

$$n = \frac{864}{72}$$

$$n = 12$$

प्रश्नावली 2

1. $\frac{1}{2}$ और $\frac{1}{2}$ का समांतर माध्य ज्ञात कीजिए।
2. x^2+3xy और $y^2\text{-}3xy$ का समांतर माध्य ज्ञात कीजिए।
3. दो संख्याओं का समांतर माध्य 7 और गुणनफल 45 है। संख्याएँ ज्ञात कीजिए।
4. दो संख्याओं का समांतर माध्य 6 और उनके वर्गों का योग 90 है। संख्याएँ ज्ञात कीजिए।
5. –4 और 10 के बीच 6 पद निवेश करते हुए समांतर श्रेढ़ी का निर्माण कीजिए।
6. 11 और –7 के बीच 5 पद निवेश करते हुए समांतर श्रेढ़ी का निर्माण कीजिए।

7. यदि किसी समांतर श्रेढ़ी के p वें व q वें पदों का माध्य, r वें व s वें पदों के माध्य के बराबर हो, तो सिद्ध कीजिए कि $p+q = r+s$

8. 7 और 49 के बीच n पद हैं। यदि पाँचवें और (n-1) वें पदों का अनुपात 5:4 हो, तो n का मान ज्ञात कीजिए।

समांतर श्रेढ़ी का योग

समांतर श्रेढ़ी 5,7,9,11,13,.......... के प्रथम तीन पदों का योग S_3 से व्यक्त करें तो

$S_3 = 5+7+9=21$

इस समांतर श्रेढ़ी के पहले चार पदों का योग पता करने के लिए आप इसके पहले चार पद यानी 5, 7, 9 और 11 का योग करेंगे। इस तरह से पहले चार पदों का योग 32 प्राप्त होगा। परन्तु यदि आपको इस श्रेढ़ी के पहले 90 पदों का योग पता करना हो तो श्रेढ़ी के पहले 90 पदों को जोड़ना पड़ेगा। यह बहुत लंबा होगा। किन्तु आप इस श्रेढ़ी के प्रथम पद a, सार्व अंतर d और पदों की संख्या n पता करके पहले n पदों का योग ज्ञात कर सकते है–

मान लीजिए समांतर श्रेढ़ी का प्रथम पद a और सार्व अंतर d है, इसलिए

$$a, a+d, a+2d, ...$$

समांतर श्रेढी है।

माना समांतर श्रेढ़ी के प्रथम तीन पदों का योग S_3 है, तो

$S_3 = a+(a+d)+(a+2d)$ .....(1)

पदों का योग विपरीत क्रम में लिखने पर

$S_3 = (a+2d)+(a+d)+a$ .....(2)

समीकरण (1) और (2) को पदों के अनुसार जोड़ने पर

$$2S_3 = [a+(a+2d)]+[(a+d)+(a+d)]+[(a+2d)+a]$$

$$2S_3 = [2a+2d]+[2a+2d]+[2a+2d]$$

$$2S_3 = 3[2a+2d]$$

$$S_3 = \frac{3}{2}[2a+(3-1)d] \quad .....(3)$$

माना समांतर श्रेढ़ी के प्रथम चार पदों का योग S_4 है, तो

$S_4 = a+(a+d)+(a+2d)+(a+3d)$ .....(4)

पदों का योग विपरीत क्रम में लिखने पर

$S_4 =(a+3d)+(a+2d)+(a+d)+a$ .....(5)

समीकरण (4) और (5) को पदों के अनुसार जोड़ने पर

$$2S_4 = [a + (a + 3d)] + [(a + d) + (a + 2d)] + [(a + 2d) + (a + d)] + [(a + 3d) + a]$$

$$2S_4 = [2a + 3d] + [2a + 3d] + [2a + 3d] + [2a + 3d]$$

$$2S_4 = 4[2a + 3d]$$

$$S_4 = \frac{4}{2}[2a + (4 - 1)d] \qquad .....(6)$$

इसी तरह से

$$S_5 = \frac{5}{2}[2a + (5 - 1)d] \qquad .....(7)$$

$$S_6 = \frac{6}{2}[2a + (6 - 1)d] \qquad .....(8)$$

उपर्युक्त समीकरणों (3), (6), (7), (8)के पैटर्न को देखकर आप कह सकते हैं कि समांतर श्रेढ़ी जिसका प्रथम पद a और सार्व अंतर d है, के प्रथम n पदों का योग S_n हो तो

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$$

निगमन द्वारा श्रेढ़ी का योग निकालना

मान लीजिए समांतर श्रेढ़ी का प्रथम पद a और सार्व अंतर d है, इसलिए

a, a+d, a+2d, ...

समांतर श्रेढ़ी है।

समांतर श्रेढ़ी का n वाँ पद a+(n-1)d है। माना S_n इस समांतर श्रेढ़ी के प्रथम n पदों का योग है। इसलिए

$$S_n=a+(a+d)+(a+2d)+ ....+[a+(n-2)d] +[a+(n-1)d] \qquad .....(1)$$

पदों को विपरीत क्रम में लिखने पर आप प्राप्त करेंगे

$$S_n= [a+(n-1)d]+[a+(n-2)d]+ ....+(a+d)+a \qquad .....(2)$$

समीकरण (1) और (2) को पदों के अनुसार जोड़ने पर

$$S_n + S_n = [a + \overline{a + (n - 1)d}] + [(a + d) + \overline{a + (n - 2)d}]$$

$$+ [(a + 2d) + \overline{a + (n - 3)d}] + ...$$

$$\ldots\ldots\ldots\; [\overline{a+(n-2)d}+(a+d)]+[\overline{a+(n-1)d}+a]$$

$$2S_n = \{2a+(n-1)d\}+[2a+(n-1)d]+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+[2a+(n-1)d]$$

उपर्युक्त समीकरण के दाहिने पक्ष में पदों की संख्या n है (क्यों?)

$2S_n = n[2a+(n–1)d]$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

इसलिए किसी समांतर श्रेढ़ी के पहले n पदों का योग

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

इसे इस तरह से भी लिख सकते हैं–

$$S_n = \frac{n}{2}[a+a+(n-1)d]$$

$$= \frac{n}{2}[a+a_n]$$

यदि किसी समांतर श्रेढ़ी में केवल n ही पद हों, तो n वाँ पद a_n ही अंतिम पद होगा यानी $a_n = l$, यहाँ अंतिम पद के लिए अक्षर l उपयोग करेंगे।

इस परिस्थिति में समांतर श्रेढ़ी के n पदों का योगफल

$$S_n = \frac{n}{2}(a+l)$$

करके देखें

1. क्या किसी समांतर श्रेढ़ी के प्रथम n पदों के योग S_n और प्रथम (n-1) पदों के योग S_{n-1} का अंतर, श्रेढ़ी के n वें पद के बराबर होता है?
2. यदि किसी समांतर श्रेढ़ी के प्रथम n पदों का योग $S_n=4n-n^2$ है तो क्या इसके प्रथम पद का मान ज्ञात कर सकते हैं? क्या यह S_1 है? इस श्रेढ़ी के प्रथम दो पदों का योग क्या है? दूसरा पद क्या है? इसी तरह से तीसरे, चौथे, पन्द्रहवें और n वें पद ज्ञात कीजिए।

उदाहरणः–14. समांतर श्रेढ़ी 5,1,–3,......... के 17 पदों का योगफल ज्ञात कीजिए।

हलः–

यहाँ प्रथम पद a=5, सार्व अंतर d= 4 पदों की संख्या n=17 है।

हम जानते हैं कि

$$S_n \quad = \quad \frac{n}{2}\ [2a \quad (n \quad 1)d]$$

$$S_{17} \quad = \quad \frac{17}{2}[2(5) \quad (17 \quad 1)(\quad 4)]$$

$$= \quad \frac{17}{2}[10 \quad (16)(\quad 4)]$$

$$= \quad \frac{17}{2}(10 \quad 64)$$

$$= \quad \frac{17}{2}(\quad 54)$$

$$= \quad -459$$

इसलिए दी हुई समांतर श्रेढ़ी के 17 पदों का योग –459 है।

उदाहरणः–15. किसी समांतर श्रेढ़ी के प्रथम 14 पदों का योग 1050 है तथा इसका प्रथम पद 10 है, तो 20 वाँ पद ज्ञात कीजिए।

हलः–

यहाँ a=10, n=14, S_{14}=1050

हम जानते हैं कि

$$S_n \quad = \quad \frac{n}{2}[2a \quad (n \quad 1)d]$$

$$1050 \quad = \quad \frac{14}{2}[2(10) \quad (14 \quad 1)d]$$

$$1050 \quad = \quad 7\,(20+13d)$$

$$1050 \quad = \quad 140 + 91d$$

$$91d \quad = \quad 1050 - 140$$

$$91d \quad = \quad 910$$

$$d \quad = \quad \frac{910}{91}$$

$d = 10$

इसलिए 20 वाँ पद $a_{20}=10+(20-1)(10)$

$[\because$ n वाँ पद $a_n=a+(n-1)d]$

$a_{20}=10+190=200$

इसलिए 20 वाँ पद 200 है।

उदाहरणः–16. 100 और 200 के बीच की विषम संख्याओं का योगफल ज्ञात कीजिए।

हलः–

100 और 200 के बीच की विषम संख्याएँ हैं

101, 103, 105, ...199

संख्याओं की उपर्युक्त श्रृंखला एक समांतर श्रेढ़ी है। (क्यों?)

इस समांतर श्रेढ़ी का प्रथम पद a=101, अंतिम पद l=199, सार्व अंतर d=2

मान लीजिए इस समांतर श्रेढ़ी के पदों की संख्या n है, तब

$$\begin{aligned} n \text{ वाँ पद} &= 199 \\ a+(n\quad 1)d &= 199 \\ 101+(n\quad 1)(2) &= 199 \\ 2n\quad 2 &= 199\quad 101 \\ 2n\quad 2 &= 98 \\ 2n &= 98+2 \\ n\quad & \frac{100}{2} \\ n &= 50 \end{aligned}$$

इसलिए 100 और 200 के बीच की विषम संख्याओं का योगफल

$$S_n = \frac{n}{2}(a\quad l)$$

$$S_{50} = \frac{50}{2}(101\quad 199)$$

$$= 25\ (300)$$

$$= 7500$$

इसलिए 100 और 200 के बीच की विषम संख्याओं का योगफल 7500 है।

उदाहरणः–17. समांतर श्रेढ़ी 17,15,13,.......... के कितने पदों का योगफल 72 होगा?

हलः–

यहाँ प्रथम पद a=17 , सार्व अंतर d=15-17=-2

मान लीजिए n पदों का योगफल 72 है, तब S_n =72

हम जानते हैं कि

$$S_n = \frac{n}{2}[2a \quad (n \quad 1)d]$$

$$72 = \frac{n}{2}[2(17) \quad (n \quad 1)(\quad 2)]$$

$$72 = \frac{n}{2}(34 \quad 2n \quad 2)$$

$$72 \times 2 = n(36–2n)$$

$$144 = 36n–2n^2$$

$$2n^2-36n+144 = 0$$

$$n^2-18n+72 = 0$$

$$n^2-6n-12n+72 = 0$$

$$n(n-6)-12(n-6) = 0$$

$$(n-6)(n-12) = 0$$

$$n=6, n=12 ,$$

n के ये दोनों मान संभव हैं और स्वीकार किए जा सकते हैं, अतः पदों की संख्या या तो 6 है या 12

टिप्पणी:–

(i) इस स्थिति में पहले 6 पदों का योग = पहले 12 पदों का योग =72

(ii) इस दोहरे उत्तर का कारण यह है कि सातवें से बारहवें पदों का योग शून्य है।

उदाहरण:–18. विद्यार्थियों ने वायु प्रदूषण कम करने के लिए विद्यालय परिसर के अंदर और बाहर पेड़ लगाने के बारे में सोचा। यह निर्णय लिया गया कि प्रत्येक कक्षा का प्रत्येक वर्ग (Section) अपनी कक्षा के बराबर पेड़ लगाएगा। उदाहरण के लिए कक्षा I का एक वर्ग 1 पेड़ लगाएगा, कक्षा II का एक वर्ग 2 पेड़ लगाएगा इत्यादि और ऐसा कक्षा XII तक के लिए चलता रहेगा। प्रत्येक कक्षा के तीन वर्ग हैं। इस विद्यालय के विद्यार्थियों द्वारा लगाए गए कुल पेड़ों की संख्या कितनी होगी?

हल:–

चूँकि प्रत्येक कक्षा के तीन वर्ग हैं, अतः कक्षा I, कक्षा II, कक्षा III, ... कक्षा XII, द्वारा लगाए गए पेड़ों की संख्या क्रमशः होगी–

1 3, 2 3, 3 3, ...12 3

या

3, 6, 9, ..., 36

यह एक समांतर श्रेढ़ी है, (क्यों?)

इस समांतर श्रेढ़ी का प्रथम पद a=3, सार्व अंतर d=6-3=3, पदों की संख्या n=12, अंतिम पद l=36

इसलिए विद्यालय के विद्यार्थियों द्वारा लगाए गए कुल पेड़ों की संख्या, समांतर श्रेढ़ी के सभी पदों के योगफल के बराबर होगी अर्थात्

विद्यालय के विद्यार्थियों द्वारा लगाए गए कुल पेड़ों की संख्या

$$S_n \quad \frac{n}{2}(a \quad l)$$

$$S_{12} = \frac{12}{2}(3 \quad 36)$$

$$= 6 \quad 39$$

$$= 234$$

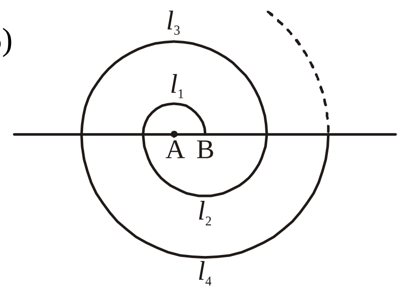
इसलिए विद्यालय के विद्यार्थियों द्वारा कुल 234 पेड़ लगाए गए।

उदाहरण:–19. केंद्र A से प्रारंभ करते हुए, बारी–बारी से केंद्रों A और B को लेते हुए, त्रिज्याओं 0.5 सेमी.,1.0 सेमी., 1.5 सेमी., 2.0 सेमी., ... वाले उत्तरोत्तर अर्द्धवृत्तों को खींचकर एक सर्पिल (Spiral) आकृति बनाई गई है, (देखिए आकृति) तेरह क्रमागत अर्द्धवृत्तों से बने इस सर्पिल की कुल लंबाई कितनी है? ($\frac{22}{7}$ लीजिए)

हल:–

हम जानते हैं कि r त्रिज्या वाले अर्द्धवृत्त की लंबाई r होती है।

इसलिए तेरह क्रमागत अर्द्धवृत्तों से बने सर्पिल की कुल लंबाई



$$= (0.5)+ \quad (1.0)+ \quad (1.5)+ \quad (2.0)+......+ \quad (6.5)$$

$$= (0.5)[1+2+3+........+13]$$

$$= (0.5)[\frac{13}{2}\{2(1) \quad (13 \quad 1) \; 1\}]$$

$$= (0.5)[\frac{13}{2}(2 \quad 12)]$$

$$= (0.5)(\frac{13}{2} \quad 14)$$

$$= (0.5)\,(91)$$

$$= \frac{22}{7} \quad \frac{5}{10} \quad 91$$

= 143 सेमी.

$\because$ 1+2+3+.....+13 एक समांतर श्रेढ़ी है, जिसका प्रथम पद 1, सार्व अंतर 1 और पदों की संख्या 13 है और

n पदों का योग = $\frac{n}{2}[2a \quad (n \quad 1)d]$

इसलिए तेरह क्रमागत अर्द्धवृत्तों से बने इस सर्पिल की कुल लंबाई 143 सेमी. है।

EIIPPK

प्रश्नावली 3

1. निम्नलिखित समांतर श्रेढ़ियों का योग ज्ञात कीजिए–
   (i) 9, 12, 15, ... 16 पदों तक
   (ii) 8, 3, –2, ... 22 पदों तक
   (iii) 0.6, 1.7, 2.8, ...100 पदों तक
   (iv) $\frac{1}{15}, \frac{1}{12}, \frac{1}{10}$, ...11 पदों तक
   (v) $\frac{n^2+1}{n}, n, \frac{n^2-1}{n}$, ... 20 पदों तक
   (vi) $\left(1-\frac{1}{n}\right), \left(1-\frac{2}{n}\right), \left(1-\frac{3}{n}\right)$, ... n पदों तक
2. 1046.5 योग प्राप्त करने के लिए समांतर श्रेढ़ी 7, $10\frac{1}{2}$, 14, ... के कितने पद लेने होंगे।
3. समांतर श्रेढ़ी 24, 21, 18, ... के कितने पद लिए जाएँ, ताकि उनका योग 78 हो।
4. किसी समांतर श्रेढ़ी का प्रथम पद 1, अंतिम पद 11 और योग 36 है, तो पदों की संख्या और सार्व अंतर ज्ञात कीजिए।
5. किसी समांतर श्रेढ़ी का प्रथम पद 17 और अंतिम पद 350 है। यदि सार्व अंतर 9 है, तो इसमें कितने पद हैं? इस श्रेढ़ी का योग ज्ञात कीजिए।
6. 1 और 100 के बीच सभी प्राकृत संख्याओं का योगफल ज्ञात कीजिए, जो 3 के गुणज हों।
7. 0 और 50 के बीच की विषम संख्याओं का योग ज्ञात कीजिए।
8. उस समांतर श्रेढ़ी के पहले 51 पदों का योग ज्ञात कीजिए, जिसका दूसरा पद 14 और तीसरा पद 18 है।
9. किसी समांतर श्रेढ़ी के प्रथम 7 पदों का योग 49 है और प्रथम 17 पदों का योग 289 है, तो इसके प्रथम n पदों का योग ज्ञात कीजिए।
10. यदि किसी समांतर श्रेढ़ी के प्रथम, द्वितीय और अंतिम पद क्रमशः a,b, और 2a हों, तो सिद्ध कीजिए कि श्रेढ़ी का योगफल $\frac{3ab}{2(b-a)}$ होगा।
11. एक समांतर श्रेढ़ी के n पदों का योग $n^2 + 4n$ है। श्रेढ़ी का 15वाँ पद ज्ञात कीजिए।
12. संख्याओं की उस श्रृंखला के प्रथम 24 पदों का योग ज्ञात कीजिए, जिसका nवाँ पद $a_n = 3 + 2n$ से दिया जाता है।

13. किसी समांतर श्रेढ़ी के pवें, qवें, rवें पदों का योगफल क्रमशः a,b,c हैं, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{a}{p}(q-r)+\frac{b}{q}(r-p)+\frac{c}{r}(p-q)=0$

14. तीन समान्तर श्रेढ़ियों के n पदों के योगफल क्रमशः S_1, S_2, S_3 हैं, यदि प्रत्येक श्रेढ़ी का प्रथम पद 1 तथा सार्व अंतर क्रमशः 1, 2, 3 हो तो सिद्ध कीजिए कि
$S_1 + S_3 = 2S_2$

15. यदि किसी समांतर श्रेढ़ी के n, 2n, 3n पदों के योग क्रमशः S_1, S_2, S_3 हों, तो सिद्ध कीजिए कि $S_3 = 3(S_2 - S_1)$

16. टेलीविजन बनाने वाली एक कंपनी तीसरे वर्ष में 600 टेलीविजन तथा सातवें वर्ष में 700 टेलीविजन बनाती है। यह मानते हुए कि प्रत्येक वर्ष बनने वाले टेलीविजनों में एक समान रूप से एक निश्चित संख्या में वृद्धि होती है, ज्ञात कीजिए–
    (i) प्रथम वर्ष में बनाये गये टेलीविजनों की संख्या
    (ii) 9वें वर्ष में बनाये गये टेलीविजनों की संख्या
    (iii) प्रथम 7 वर्षों में बनाये गये कुल टेलीविजनों की संख्या

17. एक निर्माण कार्य ठेके में कराया जा रहा है, जिसे एक निश्चित तिथि तक पूरा करना है। निश्चित तिथि से विलंब होने पर जुर्माने का प्रावधान इस तरह है : पहले दिन के लिए 200 रु., दूसरे दिन के लिए 250 रु., तीसरे दिन के लिए 300 रु. इत्यादि, अर्थात् पहले दिन का जुर्माना 200 रु. है और इसके बाद प्रत्येक दिन का जुर्माना 50 रु. बढ़ जाएगा। ठेकेदार ने कार्य में 30 दिन का विलंब किया तो उसे कुल कितना जुर्माना देना होगा और 30 वें दिन के लिए कितना जुर्माना होगा?

18. विद्यालय में विद्यार्थियों के समग्र शैक्षिक प्रदर्शन पर 7 नकद पुरस्कार देने के लिए 700 रु. की राशि रखी गई है। यदि प्रत्येक पुरस्कार अपने से ठीक पहले वाले पुरस्कार से 10 रु. कम है, तो प्रत्येक पुरस्कार की राशि कितनी है?

19. 200 लट्ठों (logs) को इस तरह जमाया गया कि सबसे नीचे वाली पंक्ति में 20 लट्ठे, उससे ऊपर की पंक्ति में 19 लट्ठे, उससे ऊपर की पंक्ति में 18 लट्ठे रखे गए हैं। यह क्रम सभी लट्ठों के रखे जाने तक चला।

ये 200 लट्ठे कितनी पंक्तियों में रखे गए हैं और सबसे ऊपर की पंक्ति में कितने लट्ठे हैं?

20. एक आलू दौड़ (potato race) प्रतियोगिता में प्रारंभिक स्थान पर एक बाल्टी रखी है। इस बाल्टी से 5 मीटर की दूरी पर पहला आलू रखा है तथा अन्य आलुओं को एक सीधी रेखा में परस्पर 3 मीटर की दूरी पर रखा गया है। इस रेखा पर 10 आलू रखे गए हैं। (देखिए आकृति)

प्रत्येक प्रतियोगी बालिका बाल्टी से चलना प्रारंभ करती है, निकटतम आलू को उठाती है और उसे लेकर वापस दौड़कर बाल्टी में डालती है। ऐसा वह तब तक करती रहती है, जब तक सभी आलू बाल्टी में न आ जाएँ। इसमें प्रत्येक प्रतियोगी बालिका को कुल कितनी दूरी दौड़नी पड़ेगी?

(संकेत : पहले और दूसरे आलुओं को उठाकर बाल्टी में डालने तक दौड़ी गई दूरी = $2 \times 5 + 2(5 + 3)$ है।)

हमने सीखा

1. संख्याओं की ऐसी श्रृंखला समांतर श्रेढ़ी कहलाती है, जिसमें प्रथम पद के अतिरिक्त प्रत्येक पद, अपने से ठीक पहले पद में एक निश्चित संख्या d जोड़कर प्राप्त होता है। इस निश्चित संख्या d को इस समांतर श्रेढ़ी का सार्व अंतर कहते हैं। यदि प्रथम पद a है, तो समांतर श्रेढ़ी का व्यापक रूप है–
$a, a + d, a + 2d, a + 3d, ...$
2. संख्याओं की एक दी गई श्रृंखला a_1, a_2, a_3 ....समांतर श्रेढ़ी होती है, यदि अंतरों $a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3, ...,$ से एक ही (बराबर) मान प्राप्त हो, अर्थात् $a_{k+1} - a_k$ का मान एक ही हो, जहाँ $k = 1, 2, 3, ...$
3. समांतर श्रेढ़ी का प्रथम पद a और सार्व अंतर d हो, तो इस समांतर श्रेढ़ी का nवाँ पद होगा $$a_n = a + (n-1) d$$
इस nवें पद को ही समांतर श्रेढ़ी का व्यापक पद (General Term) कहते हैं।
4. यदि a, A, b समांतर श्रेढ़ी में हैं, तब $A = \frac{a+b}{2}$ और A, a तथा b का समांतर माध्य कहलाता है।
5. दो राशियों a और b के बीच n पद $A_1, A_2, A_3, ...A_n$ इस प्रकार लें कि $a, A_1, A_2, A_3, ..., A_n, b$ समांतर श्रेढ़ी में हो तो श्रेढ़ी का प्रथम पद a, अंतिम पद b और पदों की संख्या (n+2) होगी।

6. किसी समांतर श्रेढ़ी के प्रथम n पदों का योग S_n निम्नलिखित सूत्र द्वारा प्राप्त होता है :–

(i) $S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$

(ii) $S_n = \frac{n}{2}[a+l]$

जहाँ समांतर श्रेढ़ी का प्रथम पद a, सार्व अंतर d, पदों की संख्या n और अंतिम पद l है।

उत्तरमाला–1

(1) (i) (b) (ii) (d) (iii) (a) (iv) (c)
(v) (b)

(2) (b) ,(d) (3)–27 (4) –1070 (5) $\frac{3n-2}{9}$

(6) $1000 - 50m$ (7) 31 (8) 10वाँ पद

(9) 99 (10) 10 (11) 10

(12) हाँ, 27वाँ पद (13) 178 (14) 2m+1

(15) 65वाँ पद (16) –13, –8, –3 (17) 300

(18) 208 (22) 13

उत्तरमाला–2

(1) 0 (2) $\frac{x^2+y^2}{2}$ (3) 5 और 9

(4) 3,9 (5) –2, 0, 2, 4, 6, 8 (6) 8,5,2,–1,–4

(8) n = 5

उत्तरमाला–3

(1) (i) 504 (ii) –979 (iii) 5505 (iv) $\frac{33}{20}$

(v) $\frac{10(2n^2-17)}{n}$ (vi) $\frac{1}{2}(n-1)$

(2) 23 (3) 4 या 13 (4) $n = 6, d = 2$

(5) 38, 6973 (6) 1683 (7) 625

(8) 5610	(9) n^2	(11) 33	
(12) 672	(16) (i) 550	(ii) 750	(iii) 4375
(17) 27750 रु.	(18) पुरस्कारों की राशि (रु. में), 130,120,110,100,90,80,70		
(19) 16 पंक्तियाँ, 5 लट्ठों को सबसे ऊपरी पंक्ति में रखते हैं।			

संकेत : S = 200, a = 20, d = –1, सूत्र $S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$ में रखने पर n के दो मान 16 और 25 प्राप्त होते हैं। अब a_{25} = a + 24d=–4 अर्थात् 25वीं पंक्ति में लट्ठों की संख्या ऋणात्मक है, जो संभव नहीं है। अतः n = 25 स्वीकार नहीं कर सकते। n = 16 के लिए a_{16} = a + 15d = 5, अतः 16 पंक्तियाँ हैं और सबसे ऊपर वाली पंक्ति में 5 लट्ठे रखे हैं।

(20) 370 मीटर

अध्याय

05

अनुपात एवं समानुपात

EISKR8

हमें अपने दैनिक जीवन में कई जगहों पर तुलना करने की आवश्यकता पड़ती है। यह तुलना बहुत बार अनुपात लेकर ही स्पष्ट हो पाती है। उदाहरण के लिए अगर हमें कबड्डी खेलने वाली तीन टीमों A,B,और C के वर्ष भर के प्रदर्शनों की तुलना करनी है तब यह हम कैसे कर पाएँगे?

इनमें से टीम A ने अब तक कुल 5 मैच खेले हैं, जिसमें से 3 मैच जीते हैं। टीम B ने अब तक 12 मैच खेलकर 5 मैच जीते हैं तथा टीम C ने 18 मैच खेलकर 13 मैच जीते हैं।

अब यह जानने के लिए कि इन टीमों में किसका प्रदर्शन सबसे अच्छा रहा है इनत तीनों के द्वारा जीते हुए मैचों की संख्या तथा खेले गए कुल मैचों की संख्या के अनुपात के रूप मे लिखते हैं–

टीम A का प्रदर्शन(अनुपात में) $= 3:5$

$= \frac{3}{5}$

टीम B का प्रदर्शन(अनुपात में) $= 5:12$

$= \frac{5}{12}$

टीम C का प्रदर्शन(अनुपात में) $= 13:18$

$= \frac{13}{18}$

लेकिन इनके प्रदर्शन के अनुपातों को देखकर यह बता पाना संभव नहीं है कि किसका प्रदर्शन अच्छा है क्योंकि प्रत्येक टीम के द्वारा खेले गए मैचों और जीते हुए मैचों की संख्या अलग–अलग है जिसके कारण इनके हर असमान हैं अतः हर को समान करने पर

टीम A का प्रदर्शन $= \frac{3 \times 36}{5 \times 36} = \frac{108}{180}$

$$\text{टीम B का प्रदर्शन} = \frac{5 \times 15}{12 \times 15} = \frac{75}{180}$$

$$\text{टीम C का प्रदर्शन} = \frac{13 \times 10}{18 \times 10} = \frac{130}{180}$$

अब हम इन अनुपातों को देखकर यह कह सकते हैं कि टीम C का प्रदर्शन सबसे अच्छा रहा।

करके देखें

1. निम्नलिखित में से किस भूखण्ड का तुलनात्मक क्षेत्रफल सबसे अधिक है–
   (i) 5 वर्ग मीटर में से 5 वर्ग सेमी का (ii) 30 वर्गसेमी. में से 3 वर्ग सेमी.का
   (iii)10 वर्ग मीटर में से 9 वर्ग सेमी का

अनुपात का व्यावहारिक उपयोग

दिए गए तथ्यों के आधार पर जानकारी पता करना

अक्सर हम वास्तविक तथ्यों के आधार पर कुछ निष्कर्ष निकालते हैं। जैसे हमें पता है कि पृथ्वी का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल लगभग 510 मिलियन वर्ग किमी. है, जिसमें लगभग 360 मिलियन वर्ग किमी जल–भाग और लगभग 150 मिलियन वर्ग किमी. थल–भाग है। अब हम इन तथ्यों के आधार पर बता सकते हैं कि पृथ्वी पर जल भाग और थल भाग किस अनुपात में है तथा यह भी कि पृथ्वी का कितना प्रतिशत भाग जल से ढँका है और कितना प्रतिशत भाग थल है। आइए यह पता करते हैं–

दिए गए तथ्य–

(i) पृथ्वी का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल 510 मिलियन वर्ग किमी

(ii) पृथ्वी का जल भाग = 360 मिलियन वर्ग किमी

(iii) पृथ्वी का थल भाग = 150 मिलियन वर्ग किमी

(A) पृथ्वी पर जल भाग व थल भाग का अनुपात = 360 : 150

$$= \frac{360}{150}$$

$$= \frac{12}{5} \text{ या } 12:5$$

अर्थात् पृथ्वी पर जल भाग व थल भाग का अनुपात 12 : 5 है।

(B) पृथ्वी पर जल भाग का कुल पृथ्वी से अनुपात = 360 : 510

$$= \frac{360}{510} \quad \frac{12}{17} \quad 12:17$$

(प्रतिशत में) $= \frac{360}{510}\ 100\%$

$= 70{\cdot}58\%$

अब आप इसी तरह पता करें कि सम्पूर्ण पृथ्वी का कितना प्रतिशत भाग थल है ?

ऊपर हमने तीन अलग–अलग टीमों के प्रदर्शन की तुलना की। अलग–अलग वर्षों में एक ही टीम के प्रदर्शन की तुलना भी की जा सकती है। आइए इसे एक उदाहरण से समझते हैं –

उदाहरणः–1 छत्तीसगढ़ राज्य की हॉकी टीम का राष्ट्रीय स्तर पर खेले गए मैचों में प्रदर्शन निम्नानुसार है–

1. वर्ष 2016 में 12 मैच खेलकर 10 मैच जीते।
2. वर्ष 2015 में 10 मैच खेलकर 7 मैच जीते।
3. वर्ष 2014 में 11 मैच खेलकर 8 मैच जीते।

इन तीन वर्षों में टीम का प्रदर्शन किस वर्ष सबसे अच्छा रहा? कारण सहित बताइए।

हलः– छत्तीसगढ़ हॉकी टीम की राष्ट्रीय स्तर पर खेले गए मैचों में प्रदर्शन के आधार पर निष्कर्ष निकालने के लिए इन प्रदर्शनों को अनुपात में लिखते हुए प्रतिशत में बदलते हैं–

1. वर्ष 2016 में प्रदर्शन (अनुपात में) $= 10:12$

(प्रतिशत में) $\frac{10}{12}\ 100\%$

$= 83.34\%$

2. वर्ष 2015 में प्रदर्शन (अनुपात में) $= 7:10$

(प्रतिशत में) $\frac{7}{10}\ 100\%$

$= 70\%$

3. वर्ष 2014 में प्रदर्शन (अनुपात में) $= 8:11$

(प्रतिशत में) $\frac{8}{11}\ 100\%$

$= 72.73\%$

टीम का वर्ष 2016, 2015 व 2014 में प्रदर्शन क्रमशः 83.34%, 70% व 72.73% है। अतः हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि पिछले दो वर्षों की तुलना में वर्ष 2016 में हॉकी टीम का प्रदर्शन ज्यादा अच्छा रहा।

उदाहरणः–2 माह अगस्त 2016 में महानदी के जलस्तर के बढ़ने की औसत दर 5 इंच प्रति घण्टा थी जबकि माह सितम्बर में यह 3 फीट प्रति दिवस थी । ज्ञात कीजिए कि किस माह में जलस्तर बढ़ने की औसत दर अधिक है?

हलः– माह अगस्त में जलस्तर बढ़ने की दर = 5 इंच प्रति घण्टा

माह सितम्बर में जलस्तर बढ़ने की दर = 3 फीट प्रति दिवस

= 36 इंच प्रति 12 घण्टा

$\frac{36 \text{ इंच}}{12 \text{ घण्टा}}$

$\frac{3 \text{ इंच}}{1 \text{ घण्टा}}$

= 3 इंच प्रति घण्टा

अर्थात माह अगस्त में जलस्तर बढ़ने की दर 5 इंच प्रति घण्टा है जो माह सितम्बर में जलस्तर बढ़ने की दर से अधिक है।

उदाहरणः–3 दो समूह एक कार्य को क्रमशः 14 दिन व 21 दिन में पूरा कर सकते हैं। यदि वे इस कार्य को एक साथ करते हैं तो कितने दिनों में कार्य पूरा हो जाएगा?

हलः– पहले समूह द्वारा 14 दिनों में किया गया कार्य 1

पहले समूह द्वारा 1 दिन में में किया गया कार्य = $\frac{1}{14}$

दूसरे समूह द्वारा 21 दिनों में किया गया कार्य = 1

दूसरे समूह द्वारा 1 दिन में किया गया कार्य $\frac{1}{21}$

दोनों समूहों द्वारा मिलकर 1 दिन में किया गया कार्य $\frac{1}{14}$ $\frac{1}{21}$ $\frac{5}{42}$

अर्थात् दोनों समूह मिलकर $\frac{5}{42}$ कार्य पूरा करते हैं 1 दिन में

अतः दोनों समूह मिलकर कार्य पूरा करते हैं $\frac{42}{5}$ $8\frac{2}{5}$ दिनों में

प्रश्नावली–1

1. एक क्रिकेट मैच में बल्लेबाज धीरेन्द्र 25 गेंद में 19 रन बनाकर आउट हो जाता है,महेन्द्र 20 गेंद खेलकर 14 रन बनाकर पेवेलियन लौटता है तथा रविन्द्र 15 गेंद में 9 रन बनाता है। इनमें से किसने सबसे अधिक रन बनाए?
2. 100 मीटर की दौड़ में राम 12 किमी.प्रति घण्टा की गति से दौड़ते हुए, श्याम को 5 मीटर पीछे छोड़ दौड़ जीत लेता है। श्याम की गति कितनी थी?
3. पृथ्वी पर खारा(समुद्रीय) पानी तकरीबन 38214 मिलियन घन किमी. है और साफ पानी (Fresh water) तकरीबन 1386 मिलियन घन किमी. है। बताइए पृथ्वी पर साफ पानी और

खारा पानी किस अनुपात में हैं ? पृथ्वी पर कुल कितना प्रतिशत साफ पानी है? और कितना प्रतिशत पानी खारा है ?

4. गायत्री एक खेत के धान की फसल को 12 दिन में काट लेती है। यदि उसी फसल को महेश 9 दिन में काट सकता है। तो बताइए दोनों मिलकर उस फसल को कितने दिन में काट लेंगे।
5. किसी काम को अरूण व अश्वनी क्रमशः 20 दिनों व 25 दिनों में पूरा कर सकते हैं। बताइए अरूण की कार्यक्षमता, अश्विनी से कितने प्रतिशत अधिक है?
6. संजय और शिवा मिलकर किसी काम को 16 दिनों में पूरा कर लेते हैं। यदि संजय उस काम को अकेले 24 दिनों में पूरा कर लेता है। तो बताइए कि शिवा अकेले उस काम को कितने दिनों में पूरा करेगा?

प्रायः हमें किसी राशि को दो या दो से अधिक भागों में बाँटने की आवश्यकता पड़ती है। दो से ज्यादा हिस्सों में बाँटते समय तीन परिस्थितियाँ आ सकती है—पहली या तो सभी को बराबर भाग मिले। इसमें हम आसानी से पता कर सकते हैं कि प्रत्येक को कितना मिलेगा। दूसरी स्थिति यह होगी कि एक को दूसरे से अधिक मिले और तीसरे को दूसरे से अधिक मिले। और तीसरी स्थिति जब एक राशि को किसी खास अनुपात में बाँटा जाए जैसे तीन व्यक्तियों को कोई राशि $a : b : c$ के अनुपात में बाँटना हो।

अनुपात में बाँटने का एक उदाहरण देखें :—

तीन मित्रों लता, सोनू व पुरेन्द्र ने क्रमशः 3 लाख, 5 लाख तथा 7 लाख मिलाकर 15 लाख रूपये की लागत से कपड़ा व्यापार शुरू किया। वर्ष के अंत में उन्हें 2,25,000 रूपये का लाभ हुआ। इस लाभ में से तीनों को कितना—कितना हिस्सा मिलना चाहिए? क्या तीनों में बँटवारा बराबर—बराबर होगा? यदि नहीं तो वे लाभ का वितरण किस तरह करेंगे? आइए देखें—

चूँकि व्यवसाय में तीनों के द्वारा दी गई राशि अलग—अलग है। अतः वे तीनों लागत के अनुपात में ही लाभ को बाँटना चाहेंगे। तीनों के लागत का अनुपात 3 : 5 : 7 है।

अतः उन्हें प्राप्त कुल लाभ का 3k, 5k व 7k हिस्सा मिलेगा।

अर्थात $3k + 5k + 7k = 225000$

$$15k = 225000$$

$$k \quad \frac{225000}{15}$$

$$k = 15000$$

अतः व्यवसाय में हुए लाभ में लता का हिस्सा 3k अर्थात 45000 रूपये

सोनू का हिस्सा 5k अर्थात 75000 रूपये

तथा पुरेन्द्र का हिस्सा 7k अर्थात 105000 रूपये है।

सोचें एवं चर्चा करें

निम्नलिखित तीनों स्थितियों में बाँटने की प्रक्रिया क्या होगी–

(i) जब सभी को बराबर मिले ?

(ii) जब एक को दूसरे से 10 अधिक मिले ?

(iii) जब एक को किसी खास अनुपात में मिले ?

उदाहरण:–4 75 सेमी. लंबे एक रेखाखण्ड को 3 : 5 : 7 के अनुपात में तीन भाग करने पर प्रत्येक भाग की लंबाई कितनी होगी?

हल:– 75 सेमी. लंबे रेखाखण्ड को 3 : 5 : 7 के अनुपात में बाँटने पर प्रत्येक भाग की लंबाई क्रमशः 3k, 5k व 7k होगी।

अतः $3k + 5k + 7k = 75$

$$15k = 75$$

$$k = \frac{75}{15}$$

$$k = 5$$

अतः रेखाखण्ड के एक भाग की लंबाई 3k अर्थात 15 सेमी.

दूसरे भाग की लंबाई 5k अर्थात 25 सेमी.

तीसरे भाग की लंबाई 7k अर्थात 35 सेमी.है।

करके देखें

1. 651 रूपये को अमित, अनिल व अंकिता में इस प्रकार बाँटिए कि अमित को प्राप्त 1 रूपये पर अनिल को 5 रूपये तथा अंकिता को 25 रूपये मिले।

2. ऋचा को अपने गुल्लक में 10 रूपये, 5 रूपये, 2 रूपये व 1 रूपये के सिक्के 2:3:5:7 के अनुपात में मिले। उसने अपनी माँ का बताया कि उसके पास कुल 520 रूपये हो गए हैं। क्या आप बता सकते हैं कि ऋचा को गुल्लक से 10 रूपये, 5 रूपये, 2रूपये व 1 रूपये के कितने–कितने सिक्के मिले?

उदाहरण:–5 तीन छात्रों A, B व C में 11 : 13 : 17 के अनुपात में कुछ रूपए बाँटे गए। यदि छात्र A को 451 रूपए मिले तो बताइए छात्र B व छात्र C को कितने–कितने रूपए मिले ? तथा कुल कितने रूपए बाँटे गए ?

हल:– तीन छात्रों A, B, C में माना $11k$, $13k$ व $17k$ रूपए बाँटे गए। यदि छात्र A को 451 रूपए मिले हैं।

तो छात्र A का हिस्सा 11k = 451 अर्थात् $k \quad \frac{451}{11} \quad 41$

k का मान 41 प्राप्त हो गया है। अतः हम छात्र B व छात्र C का हिस्सा भी अब ज्ञात कर सकते हैं।

अतः छात्र B का हिस्सा = 13k = 13 × 41 = 533 रूपए

तथा छात्र C का हिस्सा = 17k = 17 × 41 = 697 रूपए

छात्र A, B व C तीनों के बाँटे गए कुल रूपए = 451 + 533 + 697

= 1681.

उदाहरणः–6 क्या 63 हजार रूपए को तीन छात्रों A, B व C में 5 : 7 : 9 के अनुपात में बाँट कर 500 रूपये के नोटों में वितरित कर सकते हैं ? यदि हाँ तो बताइए प्रत्येक को कितने–कितने रूपए मिलेंगे ?

हलः– छात्र A, B व C को 63 हजार रूपए बाँटने से प्रत्येक को क्रमशः $5k$, $7k$ व $9k$ रूपए मिलेंगे।

अर्थात् $5k + 7k + 5k$ = 63 हजार

21k = 63 हजार या $k \quad \frac{63}{21}$ हजार = 3 हजार

अतः छात्र A को $5k$ = 5 × 3 हजार = 15 हजार रूपए मिलेंगे

छात्र B को $7k$ = 7 × 3 हजार = 21 हजार रूपए मिलेंगे

छात्र C को $9k$ = 9 × 3 हजार = 27 हजार रूपए मिलेंगे

अतः यह राशि 500 रूपये के नोट में वितरित की जा सकती है।

उदाहरणः–7 किसी व्यवसाय की साझेदारी में व्यापारी A व B की पूँजियों में 3 : 2 का तथा व्यापारी A व C की पूँजियों में 2 : 1 का अनुपात है। व्यापार में A, B व C को कुल 1,78,100 रूपये का फायदा होता है। A, B व C को कितना–कितना हिस्सा मिलेगा?

हलः– चूँकि व्यापारी A व B की लागत पूँजियों का अनुपात 3 : 2 और A और C की राशि का अनुपात 2 : 1 है इसलिए इनका पारस्परिक अनुपात निकालने के लिए A के साथ संबंध को समतुल्य बनाना होगा इसके लिए हम व्यापारी B व A की लागत पूँजियों का अनुपात देखते हैं यह अनुपात 2 : 3 अर्थात 4 : 6 है। व्यापारी A व C की लागत पूँजियों का अनुपात 2: 1= 6 : 3

अतः व्यापारी B, A व C की लागत पूँजियों का अनुपात B : A : C= 4 : 6 : 3

उनके व्यवसाय में लागत पूँजियों के अनुपात 4 : 6 : 3 में ही फायदा बँटेगा।

अतः उन्हें 4k, 6k व 3k रूपये मिलेंगे।

इसलिए 4k + 6k + 3k = 178100

13k = 178100

$$k = \frac{178100}{13}$$

$$k = 13700$$

अतः A को प्राप्त लाभ 6k अर्थात 82200 रूपये

B को प्राप्त लाभ 4k अर्थात 54800 रूपये

C को प्राप्त लाभ 3k अर्थात 41100 रूपये

करके देखें

1. सीता के पास 8200 रूपये हैं जिसमें 100 रूपये के नोटों के दुगुने नोट, 500 रूपये के तथा 100 रूपये के नोटों से तिगुने नोट एक हजार रूपये के हैं। क्या आप बता सकते हैं कि सीता के पास 1000 रूपये के कितने नोट हैं?
2. 2890 रूपये को A,B व C में इस प्रकार बाँटिए कि A : B = 1 : 2 तथा B : C = 3 : 4 हो।

एक राशि x को तीन भागों में इस तरह बाँटिए कि उन भागों में a : b : c का अनुपात हो। यहाँ राशि x का मान व प्रकार कुछ भी हो सकता है और अनुपातों a, b, c का मान भी कोई भी प्राकृत संख्या हो सकती है।

हमें राशि x को a : b : c के अनुपात में बाँटना है। अतः इसे हम इस तरह लिख सकते हैं–

$$ak + bk + ck = x$$
$$(a + b + c)k = x$$

$$k = \frac{x}{a \quad b \quad c}$$

इसलिए x का पहला भाग ak अर्थात $\frac{ax}{a \quad b \quad c}$

x का दूसरा भाग bk अर्थात $\frac{bx}{a \quad b \quad c}$

x का तीसरा भाग ck अर्थात $\frac{cx}{a \quad b \quad c}$

हमने देखा कि को बाँटने पर प्राप्त तीन भाग क्रमशः $\frac{ax}{a \quad b \quad c}$, $\frac{bx}{a \quad b \quad c}$ व $\frac{cx}{a \quad b \quad c}$ हैं

उदाहरण :– 8 पानी और दूध का एक मिश्रण 40 लीटर है। इसमें 10% पानी है। बेचने वाले ने इस मिश्रण में और पानी मिला दिया। नए मिश्रण में 20% पानी है। कितना पानी और मिलाया गया?

हलः– मिश्रण में पानी = 40 लीटर का 10% = 4 लीटर

तथा दूध = 40- 4 = 36 लीटर

माना इस मिश्रण में x लीटर पानी और मिला दिया गया।

तब नए मिश्रण में पानी = (4+x) लीटर व दूध = 36 लीटर

इस नए मिश्रण में पानी 20% तथा दूध 80% होगा अर्थात्

पानी और दूध का अनुपात = 20 : 80 = 1 : 4

अतः $\frac{4 \quad x}{36} \quad \frac{1}{4}$

$16 + 4x = 36$

$x = 5$

अर्थात् मिश्रण में 5 लीटर पानी और मिलाया गया है।

प्रश्नावली –2

1. किसी क्रिकेट मैच में तीन खिलाड़ियों A, B व C के रनों की संख्या का अनुपात A : B = B : C = 1: 2 के अनुपात में है। यदि तीनों खिलाड़ियों के कुल रनों की संख्या 364 हो तो प्रत्येक खिलाड़ी के रनों की संख्या ज्ञात कीजिए।
2. तीन कर्मचारियों A ,B व C के वेतन का अनुपात 2 : 3 : 5 है। यदि उनके वेतन में क्रमशः 15%, 10% व 20% की वृद्धि कर दी जाती है तब उनके वेतन का अनुपात क्या होगा?
3. किसी व्यवसाय में तीन व्यक्ति A , B व C को 70,000 रूपये का मुनाफा मिलता है उन्हें इस मुनाफे को A : B = 4 : 2 व B : C = 10 : 5 के अनुपात में बाँटना है। बताइए कि प्रत्येक को कितने रूपये मिले? A को C का कितना गुना रूपया मिलेगा?
4. एक थैले में 1 रूपये, 2 रूपये व 5 रूपये के कुछ सिक्के 1 : 2 : 5 के अनुपात में हैं यदि थैले में कुल 1590 रूपये हैं तो प्रत्येक प्रकार के सिक्कों की संख्या ज्ञात कीजिए।
5. दूध और पानी के 100 लीटर मिश्रण में 10% पानी है। इस मिश्रण में कितना लीटर शुद्ध दूध मिलाया जाए कि नए बने मिश्रण में केवल 5% पानी हो?

EJ2GSV

समानुपात

नवमीं की वार्षिक परीक्षा में मारिया के विभिन्न विषयों में अंक इस प्रकार है–हिन्दी में $\frac{78}{100}$, अंग्रेजी में $\frac{35}{50}$, संस्कृत में $\frac{30}{50}$, गणित में $\frac{70}{100}$, विज्ञान में $\frac{90}{100}$ और सामाजिक विज्ञान में $\frac{72}{100}$।

आप विभिन्न विषयों में मारिया के प्रदर्शन के बारे में क्या कह सकते हैं ?

अंकों में तुलना करने के लिए सबसे पहले तो कुल अंकों के आधार को समान होना चाहिए। यानि अंग्रेजी में यदि 50 में 35 है तो 100 में से 70 होंगे। यानी $\frac{35}{50}$ $\frac{70}{100}$ भी लिख सकते हैं।

इसी तरह संस्कृत के अंकों को $\frac{30}{50}$ $\frac{2 \quad 30}{2 \quad 50}$ $\frac{60}{100}$ ऐसे भी लिख सकते हैं। अब आप निष्कर्ष निकाल सकते हैं।

वास्तव में $\frac{35}{50}$ और $\frac{70}{100}$ या $\frac{30}{50}$ और $\frac{60}{100}$ तुल्य अनुपात है। यानी ऐसे अनुपात जिनका मान समान है,

अर्थात् $$\frac{35}{50} \quad \frac{70}{100} \quad \text{या} \quad \frac{30}{50} \quad \frac{60}{100}$$

दो तुल्य अनुपातों के इस संबंध को समानुपात (Proporation) कहते हैं।

यदि $a : b$ और $c : d$ समान हो तो उन्हें ऐसे लिखा जा सकता है $a : b = c : d$, इसे ऐसे भी दर्शा सकते हैं– $a : b : : c : d$.

यहाँ ': :' समानुपात का चिन्ह है। और राशियाँ a, b,c और d समानुपात के पद है। प्रथम पद a और चौथा पद d है, इन दोनों पदों को चरम पद (Extreme terms) कहते हैं। इसी तरह दूसरा पद b और तीसरा पद c को मध्य पद (Mean tems) कहते हैं।

अतः यदि a, b, c, d समानुपातिक हैं, तो

$$\frac{a}{b} \quad \frac{c}{d}$$

या $$ad = bc$$

यानी किसी समानुपात के मध्य पदों का गुणनफल उसके चरम पदों के गुणनफल के बराबर होता है।

हमें यदि इन चारों राशियों में से कोई तीन राशियाँ पता हों तो, हम ऊपर लिखे संबंध से चौथी राशि का मान ज्ञात कर सकते हैं। आइए देखें कैसे–

उदाहरणः–9 7, 3, 21 की चतुर्थानुपाती राशि पता करें।

हल– हमें यहाँ पहले तीन पद दिए हैं– 7, 3 और 21 माना कि चौथा पद x है तो,

$$7 : 3 : : 21 : x$$

$$\frac{7}{3} \quad \frac{21}{x}$$

$$7 \times x = 3 \times 21$$

$$\mathrm{x} = \frac{3 \quad 21}{7}$$

$$x = 9$$

अतः चौथा पद 9 है।

उदाहरणः–10 संख्याओं 54, 71, 75 और 99 प्रत्येक में से क्या घटाया जाए कि शेषफल समानुपाती हो ?

हल– माना दी गई संख्याओं में से y घटाया जाए।

तब

$$(54 - y) : (71 - y) : : (75 - y)\ (99 - y)$$

$$\frac{(54 \quad y)}{(71 \quad y)} \quad \frac{75 \quad y}{99 \quad y}$$

$$(54 - y)\ (99 - y) = (75 - y)\ (71 - y)$$

$$5346 - 153x + y^2 = 5325 - 146x + y^2$$

$$153x - 146x = 5346 - 5325$$

$$7x = 21$$

$$x = \frac{21}{7}$$

$$\mathrm{x} = 3$$

अतः यदि प्रत्येक संख्या से 3 घटाएँ तो मिलने वाली संख्याएँ समानुपात में होंगी।

इसे जाँच कर देखें।

EJBCUI

सतत् समानुपात (Continued proportion)

कई ऐसी राशियाँ जिनमें पहली और दूसरी राशि में वही अनुपात होता है जो दूसरी और तीसरी राशि में और यह तीसरी और चौथी राशि के अनुपात के भी बराबर होता है।

यानी यदि a, b, c, d, e ..... राशियाँ इस प्रकार हो कि $\frac{a}{b} \quad \frac{b}{c} \quad \frac{c}{d} \quad \frac{d}{e}$............ तो यह राशियाँ सतत् अनुपात (Continued proportion) में है।

चूंकि $a : b : c$ तो b को a और c का मध्यानुपाती कहेंगे, यानी $a : b :: b : c$

या
$$\frac{a}{b} \quad \frac{b}{c}$$
$$b^2 = ac$$
$$b \qquad \sqrt{ac}$$

अतः इस तरह हम मध्य राशि का मान निकाल सकते हैं।

उदाहरणः–11 6 और 54 का मध्यानुपाती पता करें।

हल– माना 6 और 54 का मध्यानुपाती x है, तो

अतः
$$6 : x :: x : 54$$
$$x \times x = 6 \times 54$$
$$x^2 = 6 \times 6 \times 3 \times 3$$
$$x = \sqrt{6 \quad 6 \quad 3 \quad 3}$$
$$x = 6 \times 3 = 18$$

अतः 18, 6 और 54 का मध्यानुपाती है।

उदाहरणः–12 $8xy$ और $4x^2y$ का तृतीयानुपाती पता करें।

हल– माना m, $8xy$ और $4x^2y$ का तृतीयानुपाती है तो

$$8xy : 4x^2y : m \qquad 8xy : 4x^2y :: 4x^2y : \mathrm{m}$$

$$\frac{8xy}{4x^2y} = \frac{4x^2y}{m} \qquad 8xy \times m = 4x^2y \times 4x^2y$$

$$m = \frac{4x^2y \quad 4x^2y}{8xy} \qquad m = 2x^3y$$

अतः तृतीयानुपात $2x^3y$ है।

उदाहरणः–13 यदि $a : b :: c : d$ हो, तो सिद्ध करें कि–

$$\frac{a^2 \quad c^2}{b^2 \quad d^2} \quad \frac{ac}{bd}$$

हल– माना $\frac{a}{b} \quad \frac{c}{d} \quad k$ है

तो $a = bk, \quad c = dk$ होगा

L.H.S. $= \frac{a^2 \quad c^2}{b^2 \quad d^2}$

$= \frac{(bk)^2 \quad (dk)^2}{b^2 \quad d^2}$

$= \frac{k^2(b^2 \quad d^2)}{(b^2 \quad d^2)}$

$= k^2$ ....(1)

R. H. S. $= \frac{ac}{bd}$

$= \frac{bk \cdot dk}{bd}$

$= \frac{k^2(bd)}{bd}$

$= k^2$ ....(2)

(1) और (2) से हम कह सकते हैं कि

$$\frac{a^2}{b^2} \quad \frac{c^2}{d^2} \qquad \frac{ac}{bd}$$

L.H.S. = R.H.S.

EJK8W6

व्युत्क्रमानुपात

हम देखते हैं कि एक निश्चित राशि से खरीदी गई वस्तुओं की मात्रा कीमत बढ़ने पर कम हो जाती है। वहीं कीमत घटने पर यह मात्रा अधिक हो जाती है। बस, टैक्सी, साईकिल आदि की स्पीड(चाल) बढ़ाने अथवा घटाने पर उसी दूरी को तय करने में लगा समय घट या बढ़ जाता है। किसी कार्य को पूर्ण करने में लगा समय कार्य करने में लगे व्यक्तियों की संख्या घटाने या बढ़ाने के साथ क्रमशः बढ़ या घट जाता है। यह सब व्युत्क्रमानुपाती संबंध हैं।

सोचें एवं चर्चा करें

व्युत्क्रमानुपाती संबंध के ऐसे ही कुछ और उदाहरण खोजकर लिखिए।

व्युत्क्रमानुपाती संबंध बहुत सी जगह उपयोग में आते हैं। हम उदाहरण से समझते हैं :–

उदाहरण:–14 12 मजदूर एक दीवार को 9 दिन में प्रतिदिन 8 घण्टा काम करके बना सकते हैं। उसी दीवार को 24 मजदूर प्रतिदिन 6 घण्टे काम करके कितने दिन में बना लेंगे ?

हल–मजदूरों की संख्या व कार्य पूर्ण करने में लगा समय एक दूसरे के व्युक्रमानुपाती होता है। दीवार बनाने में 12 मजदूरों को 9 दिन × 8 घण्टे = 72 घण्टे समय लगता है।

यदि मजदूरों की संख्या बढ़ाकर 24 कर दे तथा कार्य करने का समय घटाकर प्रतिदिन 6 घण्टे कर दें और माना x दिन में दीवार पूर्ण हो जाती है; तो 24 मजदूर को 6 घण्टे × x दिन = $6x$ घण्टे लगेंगे।

चूँकि दोनों परिस्थितियों में काम पूरा हुआ अतः यह समय की गणना व मज़दूरों की संख्या के व्युत्क्रमानुपाती है जिसे हम निम्न व्युत्क्रमानुपाती सम्बन्ध के रूप में लिख सकते हैं–

मज़दूरों की संख्या : मज़दूरों की संख्या :: समय (घण्टों में) : समय (घण्टों में)

12 : 24 :: $6x$: 72

$$\frac{12}{24} \quad \frac{6x}{72}$$

$$72 \times 12 = 6x \times 24$$

$$x \quad \frac{72 \quad 12}{24 \quad 6}$$

$$x \quad 6$$

अतः प्रतिदिन कार्य करने का समय 8 घण्टा से घटाकर 6 घण्टा करने व मजदूरों की संख्या 12 से बढ़ाकर 24 करने पर दीवार बनाने में 6 दिन का समय लगेगा।

उदाहरणः—15 200 सी.एफ.एल. बल्ब को 6 दिन तक 4 घण्टे प्रतिदिन जलाए जाने पर विद्युत् व्यय 40 रू. आता है। बताइए 48 रू. के व्यय पर 15 दिन तक 3 घण्टे प्रतिदिन के हिसाब से कितने CFL बल्ब जलाए जा सकते हैं ?

हलः— माना 48 रू. के कुल व्यय पर 15 दिन तक 3 घण्टे प्रतिदिन के हिसाब से x सी.एफ. एल. बल्ब जलाए जा सकते हैं।

पहली स्थिति में—

दिया है कि एक बल्ब 4 घण्टे प्रतिदिन के हिसाब से 6 दिन जलता है।

एक बल्ब के जलने का कुल समय $6 \times 4 = 24$ घण्टे

तो 200 बल्ब के जलने का कुल समय 200×24 घण्टे

इसी तरह दूसरी स्थिति में

15 दिन तक 3 घण्टे प्रतिदिन के हिसाब से x बल्ब के जलने का कुल समय

$x \times 15 \times 3 = 45x$ घण्टे

यहां जैसे—जैसे बल्ब जलने का समय बढ़ेगा विद्युत व्यय भी बढेगा यानि वह समानुपाती हैं।

200 बल्ब जलने का कुल समय	:	कुल विद्युत व्यय	: :	x बल्ब जलने का कुल समय	:	कुल व्यय
200×24	:	40	: :	$45x$	:	48

$$\frac{200 \quad 24}{40} \quad \frac{45x}{48}$$

$$x \quad \frac{200 \quad 24 \quad 48}{45 \quad 40} = 128$$

अतः 48 रू. के विद्युत् खर्च पर 15 दिन तक 3 घण्टे प्रतिदिन के हिसाब से $x = 128$ बल्ब जलाए जा सकते हैं।

उदाहरणः—16 यदि 15 व्यक्ति किसी काम को 40 दिन में करते हैं। बताइए उस काम के चौथाई हिस्से को कितने व्यक्ति 15 दिन में कर लेंगे?

हलः– यदि 15 व्यक्ति 1 काम को करते हैं = 40 दिनों में

तो 15 व्यक्ति $\frac{1}{4}$ काम को करते हैं– 40 $\frac{1}{4}$ 10 दिनों में

मान लें $\frac{1}{4}$ काम को x व्यक्ति 15 दिनों में पूरा कर लेंगे।

हम जानते हैं कि व्यक्तियों की संख्या दिनों की संख्या के व्यकुत्क्रमानुपाती है।

तो इसे निम्न तरीके से लिखा जा सकता हैः–

व्यक्तियों की संख्या   दिनों की संख्या

15 व्यक्ति : x व्यक्ति :: 15 दिन : 10 दिन

$$\frac{15}{x} \quad \frac{15}{10}$$

$$x \quad 10$$

अतः 10 व्यक्ति इस कार्य के चौथाई भाग को 15 दिन में कर लेंगे।

उदाहरणः–17 दो नल A और B एक टंकी को क्रमशः 30 मिनट और 40 मिनट में भर सकते हैं। तीसरा नल C उस टंकी को 60 मिनट में खाली कर सकता है। यदि तीनों नल एक साथ खोल दिए जाएँ तो टंकी को भरने में कितना समय लगेगा?

हलः– चूँकि नल A द्वारा 30 मिनट में टंकी का भरा गया भाग = 1

इसलिए 1 मिनट में टंकी का भरा गया भाग = $\frac{1}{30}$

चूँकि नल B द्वारा 40 मिनट में टंकी का भरा गया भाग = 1

इसलिए 1 मिनट में नल द्वारा टंकी का भरा गया भाग = $\frac{1}{40}$

चूँकि नल C द्वारा 60 मिनट में खाली किया गया भाग = 1

इसलिए 1 मिनट में नल द्वारा टंकी का खाली किया गया भाग = $\frac{1}{60}$

तीनों नलों को एक साथ चालू करने पर दो नलों से टंकी में पानी जाएगा लेकिन तीसरे नल से टंकी से पानी निकलता जाएगा ।

अतः 1 मिनट में टंकी का भरा गया भाग = $\frac{1}{30} \quad \frac{1}{40} \quad \frac{1}{60}$

$$\frac{4 \quad 3 \quad 2}{120}$$

$$\frac{5}{120}$$

चूँकि $\frac{5}{120}$ भाग भरने में लगा समय = 1 मिनट

इसलिए पूरा 1 भाग अर्थात टंकी को भरने में लगा समय $\dfrac{1}{\frac{5}{120}}$

$$\frac{120}{5}$$

$$= 24 \text{ मिनट}$$

उदाहरणः—18 एक पम्प एक टंकी को 2 घण्टे में भरता है। टंकी में रिसाव होने के कारण टंकी भरने में 3 घण्टे लग जाते हैं यदि टंकी पूरी भरी हो तो रिसाव के कारण खाली होने में कितना समय लगेगा?

हलः— पंप द्वारा 2 घण्टे में टंकी का भरा गया भाग = 1

इसलिए पंप द्वारा 1 घण्टे में टंकी का भरा गया भाग = $\frac{1}{2}$

माना रिसाव के कारण x घण्टे में टंकी का खाली हुआ भाग = 1

तब रिसाव के कारण 1 घण्टे में टंकी का खाली हुआ भाग = $\frac{1}{x}$

चूँकि रिसाव के बावजूद पंप द्वारा 3 घण्टे में टंकी का भरा गया भाग = 1

इसलिए रिसाव के बावजूद 1 घण्टे में टंकी का भरा गया भाग = $\frac{1}{3}$

रिसाव के बावजूद 1 घण्टे में टंकी का भरा गया भाग

= पंप द्वारा 1 घण्टे में टंकी का भरा गया भाग

– रिसाव के कारण 1 घण्टे में टंकी का खाली हुआ भाग

$$\frac{1}{3} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{3} \quad \frac{x \quad 2}{2x}$$

$$2x \quad 3x \quad 6$$

$$x \quad 6$$

अतः रिसाव के कारण टंकी 6 घण्टे में खाली हो जाएगी।

करके देखें

1. तीन व्यक्ति A, B तथा C किसी काम को क्रमशः 12 दिन, 15 दिन तथा 10 दिन में समाप्त कर सकते हैं। यदि उस काम को तीनों मिलकर करें तो काम पूरा होने में कितने दिन लगेंगे।

प्रश्नावली– 3

1. यदि 29 पुस्तकों का मूल्य 783 रूपए है तो 2214 रू. में कितनी पुस्तकें मिलेगी ?
2. यदि 14 : 35 : : 16 : x हो, तो x का मान पता करें।
3. $2xy, x^2, y^2$ का चतुर्थानुपाती पता करें।
4. संख्याएँ 10, 18, 22, 38 में से हर एक संख्या में क्या जोड़ा जाए कि ये संख्याएँ समानुपाती हो जाए?
5. यदि a और c का मध्यानुपाती b हो तो, सिद्ध करें कि

   $$\frac{a^2 \quad b^2}{ab} \quad \frac{a \quad c}{b}.$$
6. वे संख्याएँ पता करें जिनका मध्यानुपाती 24 और तृतीयानुपाती 192 हो।
7. यदि $(1 + x) : (3 + x) : (6 + x)$ हो, तो x का मान पता करें।
8. दो संख्या 3:5 के अनुपात में है यदि प्रत्येक में से 9 घटाया जाए तो वे 12:23 के अनुपात में हो जाती हैं। बताइए पहली संख्या क्या है?
9. किसी काम को 45 मजदूर प्रतिदिन 6 घण्टा काम करते हुए 24 दिनों में पूर्ण कर लेते हैं। बताइए कितने मजदूर उस काम को 8 घण्टा प्रतिदिन करते हुए 15 दिन में पूर्ण कर लेंगे?
10. किसी काम 25 व्यक्ति 6 घण्टे प्रतिदिन करके 9 दिन में पूर्ण करते हैं तो बताइए 15 व्यक्ति 9 घण्टा प्रतिदिन काम करके उस काम को कितने दिन में पूर्ण कर लेंगे ?
11. यदि 30 आदमी किसी काम को 6 घण्टे प्रतिदिन करके 15 दिन में पूर्ण करते हैं। उसी काम को 20 आदमी कितने घण्टे प्रतिदिन काम करके 15 दिन में ही पूर्ण कर लेंगे ?
12. एक कार सरायपाली से 75 किमी प्रति घण्टा की औसत चाल से चलकर रायपुर 4घण्टे में पहुँचती है। मार्ग में बाधा व ट्रैफिक बढ़ जाने के कारण कार की औसत चाल 15 किमी प्रति घण्टा कम हो जाती है। कार को रायपुर पहुँचने में कितना समय लगेगा ?
13. यदि 10 बल्बों को 60 दिन तक 4 घण्टे प्रतिदिन जलाने में 80 रू. का विद्युत् व्यय आता है तो कितने बल्ब 16 दिन तक 3 घण्टे प्रतिदिन जलाए जाने पर 40 रू. का विद्युत् व्यय आएगा?
14. किसी काम को 48 मजदूर 8 घण्टे प्रतिदिन काम करके 25 दिन में पूर्ण करते हैं। 30 आदमी इस काम से दुगुने काम को 10 घण्टे प्रतिदिन करके कितने दिन में पूर्ण कर लेंगे?

15. A और B मिलकर किसी काम को 24 दिन में, B और C मिलकर उसी काम को 18 दिन में तथा A और C मिलकर उसी काम को 12 दिन में करते हैं। बताइए A अकेले उस काम को कितने दिन में पूरा कर लेगा?
16. किसी काम को पूरा करने में 15 व्यक्तियों को 16 दिन लगते हैं। कितने व्यक्ति उस काम के चौथाई भाग को 15 दिन में पूरा कर सकते हैं?
17. किसी कैम्प में 120 सैनिकों के लिए 60 दिन की खाद्य सामग्री पर्याप्त थी। यदि 40 दिन बाद 40 सैनिक अन्यत्र चले गए तो शेष खाद्य सामग्री बचे हुए सैनिकों के लिए कितने दिन चलेगी?
18. यदि 11 मकड़ियाँ 11 दिनों में 11 जालें बनाती हैं तो बताइए 1 मकड़ी 1 जाल बनाने में कितने दिन लगेगी।
19. दो नल एक टंकी को पूरा भरने में 6 घण्टे का समय लेते हैं। यदि एक नल को खोलने पर 10 घण्टे में पूरा भर लेता है। तो बताइए केवल दूसरा नल खोलने पर टंकी भरने में कितना समय लगेगा।

EJU4XT

हमने सीखा

1. दैनिक जीवन में प्रायः कई बार तुलना करने की आवश्यकता पड़ती है। यह तुलना बहुत बार अनुपात से स्पष्ट हो पाती है। अर्थात दो राशियों की तुलना अनुपात से बेहतर तरीके से कर सकते हैं।
2. खिलाड़ियों के प्रदर्शन की तुलना करनी हो अथवा बाजार में कोई वस्तु खरीदनी हो तो हम तुलना के आधार पर ही उनकी श्रेष्ठता का निर्धारण कर पाते हैं।
3. तुलना समान प्रकार की राशियों में ही की जाती है अर्थात अनुपात दो सजातीय राशियों की तुलना होती है।
4. कभी–कभी हमें दो अनुपातों की तुलना करने की जरूरत पड़ती है। दो अनुपातों की तुलना समानुपात कहलाती है।
5. किसी राशि को दो या दो से अधिक भागों में बाँटने में अनुपात का उपयोग किया जाता है।
6. दैनिक जीवन में हम ऐसी कई परिस्थितियाँ देखते हैं जहाँ एक राशि के बढ़ने या घटने से दूसरी राशि घट या बढ़ जाती है। ये राशियाँ व्युत्क्रम अनुपात में होती हैं।

उत्तरमाला–1

1. धीरेन्द्र
2. 11.4 किमी / घंटा
3. 7:193, 3.5%, 96.5%
4. $5\frac{1}{7}$ दिन
5. 1% अधिक है
6. 48 दिन

उत्तरमाला–2

1. 52,104,208
2. 23:33:60
3. 40,000रू.,20,000रू.,10,000रू., चार गुना
4. 53,106,265
5. 4 लीटर

उत्तरमाला–3

1. 82
2. 40
3. $\frac{xy}{2}$
4. 2
6. 12 व 48
7. 3
8. 27
9. 54 मजदूर
10. 10 दिन
11. 9 घण्टे प्रतिदिन
12. 5 घण्टे
13. 25 बल्ब
14. 64 दिन
15. $28\frac{4}{5}$ दिन
16. 4व्यक्ति
17. 30 दिन
18. 11 दिन
19. 15 घण्टे

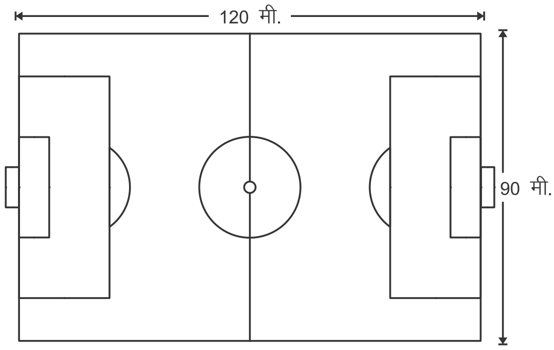
अध्याय

06

निर्देशांक ज्यामिति

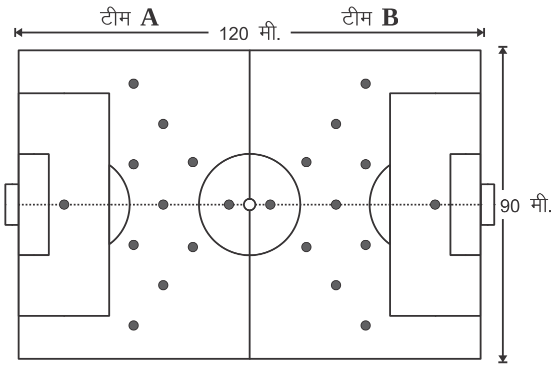
EK3ZZG

आपने फुटबॉल का मैदान देखा ही होगा शायद खेला भी हो। यह तो हमें पता है कि खेल शुरू होने के पहले फुटबॉल को मैदान के ठीक बीच रखते हैं। दोनों टीमों के खिलाड़ी मैदान में आमने–सामने रहते हैं एक टीम एक तरफ तथा दूसरी टीम दूसरी तरफ। मैदान में दोनों तरफ गोल पोस्ट होते हैं जैसा कि आप चित्र (i) में देख रहे हैं। यह बीच में रखे फुटबॉल से बराबर–बराबर दूरी पर होते हैं।



चित्र–(i)

फुटबॉल के मैदान की मानक लंबाई 120 मीटर तथा मानक चौड़ाई 90 मीटर होती है। हालांकि खेल तो कितने भी बड़े मैदान पर हो सकता है। मैदान में खिलाड़ी अपनी–अपनी तरफ अपनी भूमिका अनुसार फैले रहते हैं हालांकि खेलते समय वे मैदान में हर जगह जा सकते हैं। दिए गए चित्र (ii) में हम दोनों टीमों के खिलाड़ियों की शुरूआती स्थिति को देखते हैं चित्र के बायें भाग में टीम A है तथा दायें भाग में टीम B है।



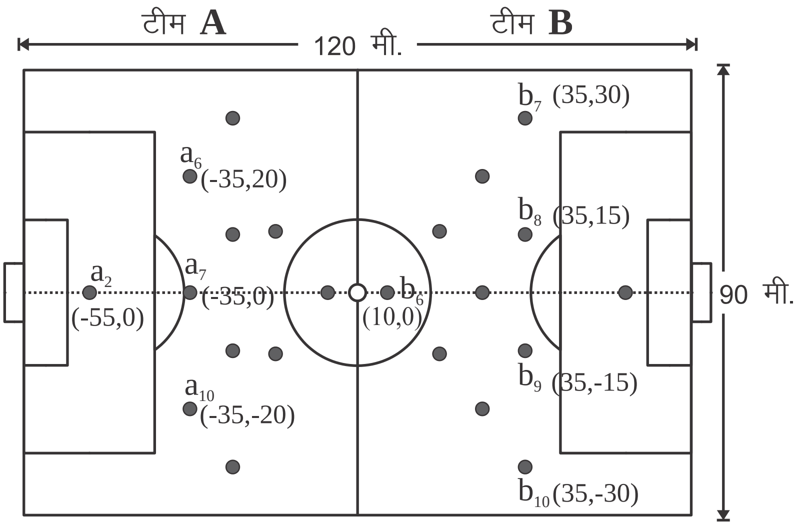
चित्र–(ii)

फुटबॉल मैदान के ठीक मध्य बिंदु पर है। मैदान पर मध्य रेखा जो दोनों टीमों को अलग–अलग करती है, खींची रहती है। अब इसके लंबवत एक खड़ी रेखा खींची हो तो, फुटबॉल का मैदान चार भागों में बँट जाएगा। हमने ऐसा करके चित्र (iii) बनाया है। चित्र में मैदान के बायीं ओर टीम A के खिलाड़ी और दायीं ओर टीम B के खिलाड़ी हैं। बायीं ओर टीम A के खिलाड़ी की शुरूआती स्थिति को $a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots a_{11}$ तथा दायीं ओर टीम B के खिलाड़ियों की शुरू में स्थिति को $b_1, b_2, b_3 \ldots\ldots b_{11}$ से दर्शाया गया है।

आप देख सकते हैं कि दोनों गोलकीपर सबसे पीछे गोलपोस्ट के पास हैं उसके बाद फुलबैक हैं जो गोल पोस्ट से लगभग 20-25 मीटर आगे है। फिर मिड फील्डर हैं जो 40-45 मीटर आगे हैं। ठीक मध्य रेखा के पास दोनों तरफ के फार्वर्ड अपनी–अपनी ओर स्थित हैं।

हम बायीं ओर यानी टीम A की दिशा को ऋणात्मक दिशा व दायीं ओर टीम B की दिशा को धनात्मक दिशा मानेंगे। उनकी स्थिति को इंगित करने के लिए हम मध्य बिन्दु से गुजर रही रेखाओं से उनकी दूरी का इस्तेमाल करेंगे।

गोलकीपर दोनों तरफ मध्य बिंदु से 55 मीटर दूर है किन्तु आड़ी रेखा पर स्थित हैं अतः इन्हें (55, 0) व (–55, 0) से निरूपित करेंगे। इसी तरह टीम A के फुल बैक, आड़ी रेखा के ऊपर के भाग में मध्य बिंदु (मध्य रेखा के) से –35 और टीम B के +35 रेखा पर डटे हैं। टीम A ने 3 फुल बैक रखे हैं और टीम B के 4 फुल बैक हैं। ये सभी बीच की रेखा से ऊपर की ओर, जिसे हम (+) मानेंगे और नीचे की ओर, जिसे हम (–) मानेंगे, पर हैं।



चित्र–(iii)

टीम A के तीन फुल बैक (–35, 20), (–35, 0) और (–35, –20) पर स्थित हैं इसी तरह टीम B के चार फुल बैक (+35, 30), (+35, +15), (+35, –15) और (+35, –30) पर स्थित हैं।

सोचें एवं चर्चा करें

अब आप भी अपने दोस्तों के साथ मिलकर मैदान में फैले हुए दोनों टीमों के बाकी खिलाड़ियों की स्थिति पता कर उनके बिंदु लिखिए। (चित्र–ii)

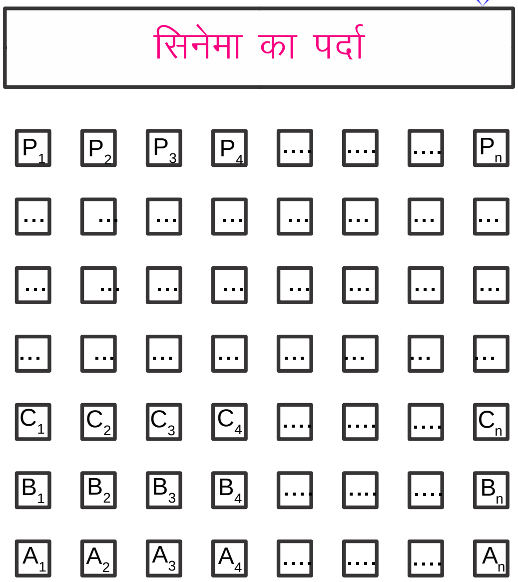
करके देखें

1. वॉलीबाल के मैदान के नेट को मध्य रेखा मानकर इसके मध्य ठीक बीचो–बीच एक लंबवत रेखा खींचिए तथा इसके कटान मध्य बिंदु से सभी खिलाड़ियों की स्थिति पता कीजिए।

2. क्रिकेट के मैदान में बल्लेबाज की स्थिति को मध्य बिंदु पर एक आड़ी रेखा के लंबवत एक रेखा खींचकर खिलाड़ियों की स्थिति को दर्शाइए व उन बिंदुओं को लिखिए।

आइए एक और उदाहरण से किसी तल पर रखी वस्तुओं की स्थिति का पता लगाते हैं आप कभी अपने शहर या कस्बे के सिनेमाघर में कोई फिल्म देखने गए होंगे। क्या आपको याद है कि आपने अपनी सीट कैसे ढूँढ़ी थी? कुछ सिनेमाघरों में कुर्सी की पंक्तियों को A,B,C,D.... आदि

नाम देकर प्रत्येक पंक्ति की कुर्सियों को क्रमांक 1,2,3,4 दे दिया जाता है। इस तरह सभी कुर्सियों को कोई न कोई नाम जैसे – A_1, A_2, B_4, C_{19}, D_{40} मिल जाता है।

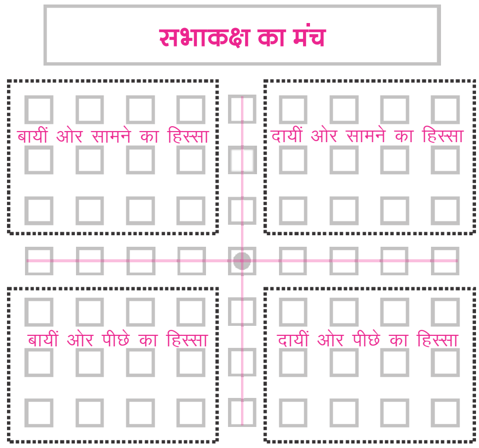


चित्र–(iv)

मान लें किसी बड़े सभाकक्ष में आड़ी और खड़ी अनेक कतारों में कुर्सियाँ रखी हुई हैं। आप सभाकक्ष के ठीक बीच वाली कुर्सी पर बैठे हैं। आपके मित्रों के बैठने की जगह कहाँ–कहाँ है, यह आपको पता है।

यह उन्हें कैसे बताएँगे?

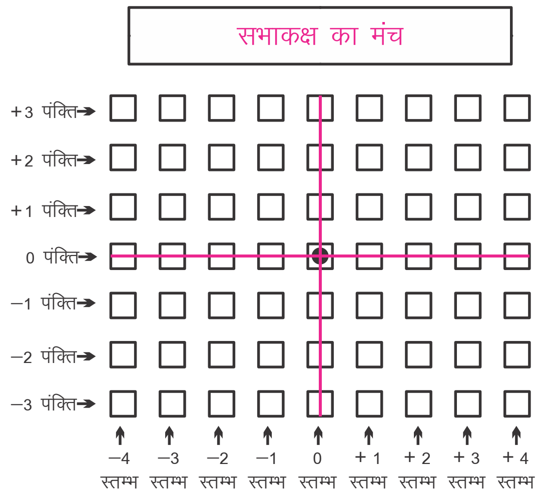
आप जिस कुर्सी पर बैठे हैं उसके नीचे एक आड़ी पट्टी है जो सभाकक्ष के बायें से दायें किनारे तक गई है। यह पट्टी सभाकक्ष के फर्श को दो हिस्सों में बाँटती है। आपके सामने का हिस्सा और आपके पीछे का हिस्सा। इससे आप सभाकक्ष की कुर्सियों के बारे में बता सकते हैं कि उनकी स्थिति कहाँ पर है जैसे आपके सामने की कुर्सियाँ, पीछे की कुर्सियाँ और पट्टी के ऊपर रखी कुर्सियाँ।



चित्र–(v)

यदि ऐसी ही एक और पट्टी आपकी कुर्सी के नीचे से गुजरती हो जो पहली पट्टी के लंबवत हो और सभाकक्ष के सामने से पीछे तक जाती हो, तो यह पट्टी भी सभाकक्ष को दो हिस्सों में बाँटेगी। आपके दायीं ओर का हिस्सा और आपके बायीं ओर का हिस्सा। इसी तरह कुर्सियों के बारे बताने के लिए भी आपके पास कुछ नई बात होगी जैसे आपके दायीं ओर की कुर्सियाँ, आपके बायीं ओर की कुर्सियाँ और इस खड़ी पट्टी के ऊपर रखी कुर्सियाँ।

अब आप देखेंगे कि सभाकक्ष का समतल (फर्श) चार हिस्सों में बँट गया है। इसके साथ–साथ कुर्सियाँ भी चार हिस्सों में बँट गई हैं। कुर्सियों के संदर्भ में यह बात ध्यान में रखनी होगी कि आड़ी और खड़ी पट्टियों पर भी कुर्सियाँ रखी हुई हैं जो चारों हिस्सों को अलग करती हैं और उनमें शामिल नहीं हैं।



चित्र–(vi)

पिछली कक्षाओं में आपने संख्या रेखा का उपयोग किया है। यहाँ भी उसकी सहायता लेंगे। मानलें आपकी कुर्सी के नीचे से जाने वाली आड़ी और खड़ी पट्टियाँ दो संख्या रेखाएँ हैं जो एक दूसरे के लंबवत हैं और एक दूसरे को वहाँ काटती हैं जहाँ

आपकी कुर्सी रखी है यानी सभा कक्ष के ठीक बीच में। आपकी कुर्सी ही वह जगह है जहाँ दोनों संख्या रेखाओं का शून्य है। तो अब इस आड़ी पट्टी पर आपके दायीं ओर रखी कुर्सियों को क्रमशः +1, +2, +3, +4 आदि पर रखी गई कुर्सियाँ तथा बायीं ओर रखी कुर्सियों को क्रमशः –1, –2, –3, –4 आदि पर रखी गई कुर्सियाँ कह सकते हैं। इसी तरह खड़ी पट्टी पर आपके सामने और पीछे की कुर्सियों को क्रमशः +1, +2, +3, +4 और –1, –2, –3, –4 की कुर्सियाँ कह सकते हैं।

क्या हम सभाकक्ष में रखी कुर्सियों की कतारों को भी नाम दे सकते हैं?

यदि हम कुर्सियों की खड़ी कतारों को **स्तम्भ** तथा आड़ी कतारों को **पंक्ति** कहें तो आप कह सकेंगे कि आपकी कुर्सी के नीचे से जाने वाली खड़ी पट्टी एक स्तम्भ है जो आड़ी संख्या रेखा के शून्य से गुजरती है। आपके दायीं ओर के सभी स्तम्भ आड़ी संख्या रेखा के क्रमशः +1, +2, +3, +4 आदि से गुजरते हैं। इन्हें हम +1 स्तम्भ, +2 स्तम्भ, +3 स्तम्भ कहेंगे। इसी तरह बायीं ओर के स्तम्भों को क्रमशः –1 स्तम्भ, –2 स्तम्भ, –3 स्तम्भ कहेंगे।

आपकी कुर्सी के नीचे से जाने वाली खड़ी पट्टी को क्या कहेंगे?

स्पष्ट है इसे आप 0 स्तम्भ (शून्य स्तम्भ) कहेंगे।

ठीक इसी तरह आड़ी पट्टी शून्य पंक्ति और इसके ऊपर की पंक्तियाँ +1 पंक्ति, +2 पंक्ति, +3 पंक्ति तथा नीचे की पंक्तियाँ –1 पंक्ति, –2 पंक्ति, –3 पंक्ति कहलाएँगी।

आपके मित्र A,B,C,D और E सभी आपके पास हॉल के बीच में ही खड़े हैं और उन्हें अपने लिए निर्धारित कुर्सियों पर जाना है। उनके स्थान चित्र (vii) में दिखाए गए हैं। आइए उन्हें उनकी जगह बताएँ।

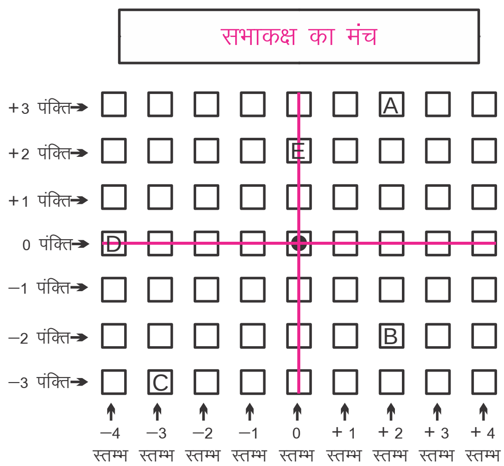
A का स्थान – स्तंभ 2, पंक्ति 3 पर रखी कुर्सी

B का स्थान – स्तंभ 2, पंक्ति –2 पर रखी कुर्सी

C का स्थान – स्तंभ –3, पंक्ति –3 पर रखी कुर्सी

D का स्थान – स्तंभ –4, पंक्ति 0 पर रखी कुर्सी

E का स्थान – स्तंभ 0, पंक्ति 2 पर रखी कुर्सी



चित्र–(vii)

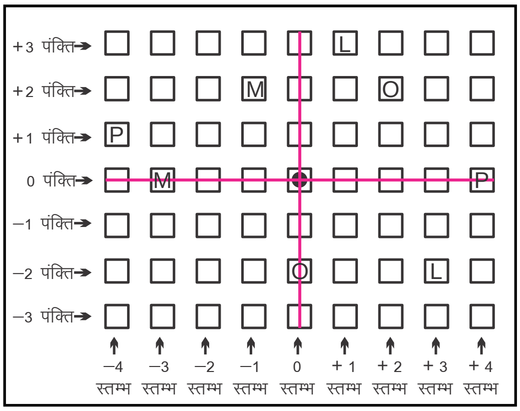
सोचें और चर्चा करें

आपकी कुर्सी किस जगह पर है?

करके देखें

1. एक बगीचे में आड़ी और खड़ी कतारों में पौधे लगे हुए हैं। उन्हें स्तम्भों और पंक्तियों में दर्शाया गया है। L, M, O, P क्रमशः नीबू, आम, संतरे और पपीते के पौधों को प्रदर्शित करते हों, तो उनके स्थान स्तंभ और पंक्ति के रूप में लिखें।

पौधे	स्तम्भ और पंक्ति
नींबू	(+1 स्तम्भ, +3 पंक्ति), ...
आम	...................., ...
संतरा	...................., ...
पपीता	...................., ...



फुटबॉल के मैदान के चित्र (iii) को देखकर नीचे दी गई तालिका पूरी कीजिए –

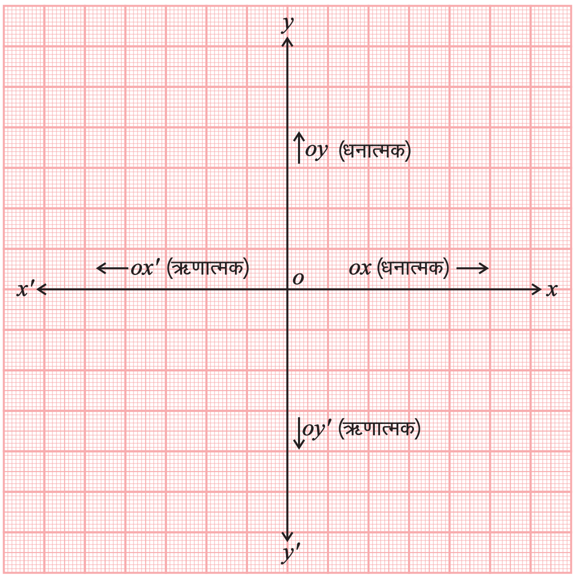
खिलाड़ी	फुटबॉल से खिलाड़ी की दूरी		खिलाड़ी की स्थिति
	कितने बाएँ/दाएँ चले ?	कितने इकाई ऊपर/नीचे चले ?	
a_2			
a_6			
a_7			
a_{10}			
b_6			
b_7			
b_8			
b_9			
b_{10}			

ऊपर के उदाहरणों में आपने यह देखा कि एक तल पर रखी हुई किसी वस्तु की स्थिति दो परस्पर लंब रेखाओं की सहायता से बताई जा सकती है। इस विचारधारा से गणित की एक महत्वपूर्ण शाखा **निर्देशांक ज्यामिति** की उत्पत्ति हुई। इस अध्याय में निर्देशांक ज्यामिति की कुछ आधारभूत संकल्पनाओं से हम आपको परिचित कराएँगे।

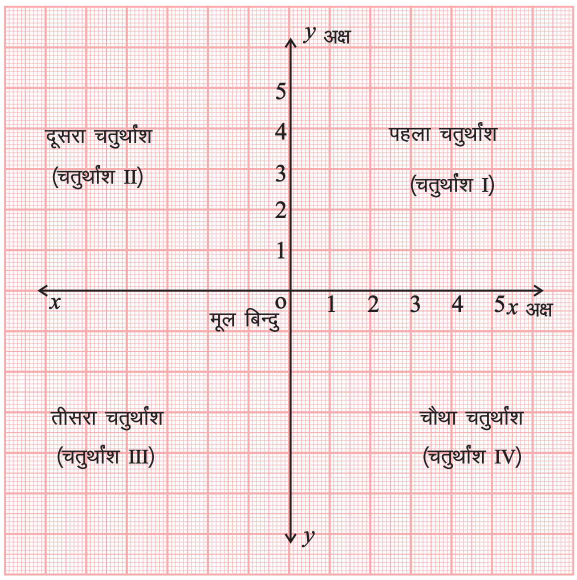
प्रारंभ में फ्रांसीसी दार्शनिक और गणितज्ञ **रेने दकार्ते** ने इस पर अध्ययन किया, उन्होंने एक तल में एक बिंदु की स्थिति का निर्धारण करने की समस्या का हल प्राप्त कर लिया। उनकी विधि अक्षांश और देशांतर की विचारधारा का ही एक विकसित रूप थी। एक तल पर स्थित किसी बिंदु की स्थिति का निर्धारण करने में प्रयुक्त पद्धति को दकार्ते के सम्मान में **कार्तीय पद्धति (Cartesian System)** भी कहा जाता है।

दकार्ते ने एक तल पर परस्पर लंबवत दो रेखाओं को खींचने और इन रेखाओं के सापेक्ष तल पर बिंदुओं का स्थान निर्धारण करने का विचार प्रस्तुत किया। लंब रेखाएँ किसी भी दिशा में हो सकती हैं। इस अध्याय में हमने एक क्षैतिज (आड़ी) और दूसरी उर्ध्वाधर (खड़ी) रेखा का उपयोग किया है। दोनों रेखाएँ एक दूसरे को जिस बिंदु पर काटती हैं उसे **मूलबिंदु** (Origin) कहा जाता है। इसे O से प्रदर्शित किया जाता है। क्षैतिज रेखा X'X को x- अक्ष और उर्ध्वाधर रेखा YY' को y-अक्ष कहा जाता है। चूँकि OX और OY दिशाओं में धनात्मक संख्याएँ स्थित हैं इसलिए OX और OY को क्रमशः x- अक्ष और y- अक्ष की धनात्मक दिशाएँ कहा जाता है। इसी प्रकार, OX' और OY' को क्रमशः x- अक्ष और y- अक्ष की ऋणात्मक दिशाएँ कहा जाता है।

ये दोनों अक्ष तल को चार बराबर भागों में विभाजित करते हैं। इन चार भागों को **चतुर्थांश (quadrants)** कहा जाता है। इन्हें OX से वामावर्त दिशा में क्रमशः I, II, III और IV चतुर्थांश कहा जाता है। इस प्रकार, इस तल में दोनों अक्ष और चारों चतुर्थांश सम्मिलित हैं। इस तल को कार्तीय तल (Cartesian plane) या निर्देशांक तल (Coordinate plane) या xy तल (xy-plane) कहते हैं। अक्षों को निर्देशांक अक्ष (Coordinate axes) कहा जाता है।



आलेख–01



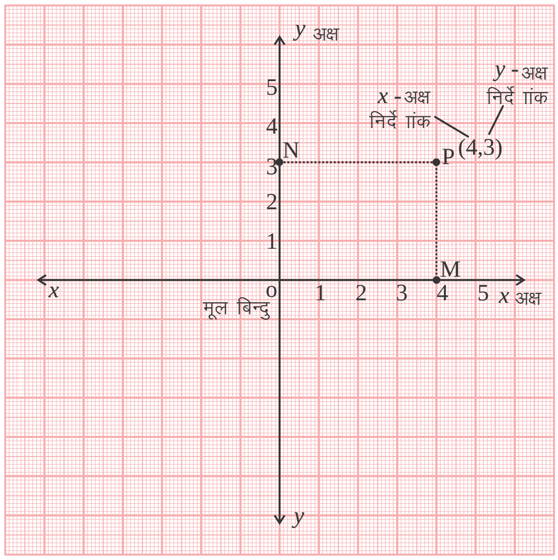
आलेख–02

निर्देशांक समतल में किसी बिंदु की स्थिति का पता लगाना :–

हम निर्देशांक समतल पर किसी बिंदु का पता कैसे करेंगे, आइए इसे एक उदाहरण से समझते हैं।

एक ग्राफ पेपर पर x और y अक्ष खींचिए। पहले चतुर्थांश में कहीं पर एक बिंदु P लीजिए। P से x और y अक्ष पर क्रमशः लम्ब PM और PN डालिए।

यहाँ y अक्ष से बिंदु P की लंबवत दूरी PN 4 इकाई है। (इसे x अक्ष की धनात्मक दिशा में मापा गया है।) और x अक्ष से बिंदु P की लंबवत दूरी PM 3 इकाई है। (इसे y अक्ष की धनात्मक दिशा में मापा गया है।) इन दूरियों की सहायता से बिंदु P का निर्धारण करेंगे। किसी बिंदु का निर्धारण करने के लिए हम निम्नलिखित परंपराओं का ध्यान रखते हैं :



आलेख–03

1. किसी बिंदु का x-निर्देशांक y- अक्ष से इस बिंदु की लंबवत दूरी है जिसे x- अक्ष पर मापा जाता है। यह दूरी x- अक्ष की धनात्मक दिशा में धनात्मक और x- अक्ष की ऋणात्मक दिशा में ऋणात्मक होती है। बिंदु P के लिए यह +4 है। x-निर्देशांक को **भुज** कहा जाता है।

2. किसी बिंदु का y-निर्देशांक x- अक्ष से इस बिंदु की लंबवत दूरी है जिसे y- अक्ष पर मापा जाता है। यह दूरी y- अक्ष की धनात्मक दिशा में धनात्मक और y- अक्ष की ऋणात्मक दिशा में ऋणात्मक होती है। बिंदु P के लिए यह +3 है। y-निर्देशांक को **कोटि** कहा जाता है।

3. निर्देशांक तल में किसी बिंदु के निर्देशांक लिखते समय पहले x-निर्देशांक लिखते हैं और उसके बाद y-निर्देशांक लिखते हैं। निर्देशांकों को कोष्ठक के अंदर लिखा जाता है।

अतः बिंदु P के निर्देशांक (4,3) हैं।

उदाहरणः–1. बिंदु A (4,5) को निर्देशांक समतल में प्रदर्शित कीजिए।

हलः– चूँकि x-निर्देशांक +4 है अर्थात बिंदु की y-अक्ष से लंबवत दूरी +4 है। इसलिए पहले हम x-अक्ष की धनात्मक दिशा अर्थात OX दिशा में +4 इकाई बढ़ेंगे। चूँकि y-निर्देशांक +5 है, अर्थात बिंदु की x-अक्ष से लंबवत दूरी +5 है। इसलिए अब हम y-अक्ष की धनात्मक दिशा अर्थात OY दिशा में +5 इकाई बढ़ेंगे। इस तरह हमें बिंदु A (4,5) प्राप्त हुआ।

उदाहरणः–2. बिंदु B (-4,5) को दर्शाइए।

हलः– बिंदु B का x-निर्देशांक –4 है, तो हमें किस दिशा में बढ़ना होगा?

चूँकि बिंदु B का x-निर्देशांक ऋणात्मक है इसलिए हम x-अक्ष में OX' की दिशा में आगे बढ़ेंगे। आगे के चरण आप स्वयं करें और निर्देशांक समतल में बिंदु B (-4,5) को दर्शाइए।

करके देखें

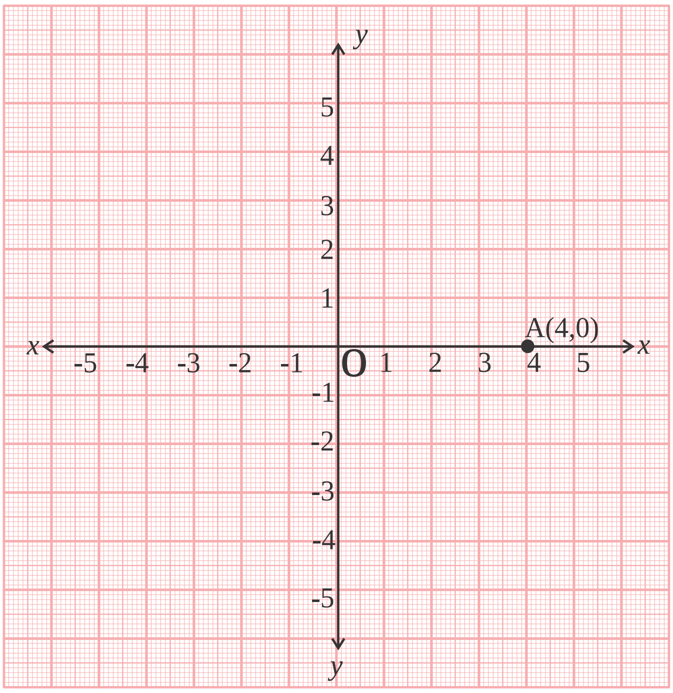
1. नीचे कुछ बिंदुओं के निर्देशांक दिए गए हैं। ये किस–किस चतुर्थांश में स्थित हैं? प्रत्येक को निर्देशांक समतल पर प्रदर्शित कीजिए–

   (i) (5,7) (ii) (-2,5) (iii) (2,-2) (iv) (-4,-5)

2. कोई भी 5 और निर्देशांक जोड़े लिखें। उन्हें उनके चर्तुथांशों पर उपयुक्त स्थान पर प्रदर्शित करें।

अक्षों पर बिंदु :

यदि कोई बिंदु x-अक्ष पर हो तो उसके निर्देशांक क्या होंगे? हम जानते हैं कि किसी बिंदु तक पहुँचने के लिए हमें दो दूरियाँ चलनी होती हैं। पहला x-अक्ष के अनुदिश (y-अक्ष के लंबवत), दूसरा y-अक्ष के समांतर (x-अक्ष के लंबवत) अब यदि कोई बिंदु x-अक्ष पर ही स्थित हो तो हमें मूल बिंदु से उस बिंदु तक केवल एक दूरी चलनी होगी। चूँकि y-अक्ष के समांतर चली गई दूरी शून्य होगी। इसलिए उस बिंदु का y-निर्देशांक शून्य होगा। अतः x-अक्ष पर स्थित किसी बिंदु के निर्देशांक $(x,0)$ या $(-x,0)$ होंगे। जैसे x-अक्ष पर स्थित बिंदु A के निर्देशांक (4,0) हैं।



आलेख–04

इसी तरह y-अक्ष पर स्थित किसी बिंदु के निर्देशांक $(0,y)$ या $(0,-y)$ होंगे।

स्पष्ट है कि मूलबिंदु O के निर्देशांक (0,0) होंगे।

उदाहरणः–3. निर्देशांक समतल पर बिंदु P(3,0) को दर्शाइए।

हलः– चूँकि बिंदु P का y-निर्देशांक 0 है, इसलिए x-अक्ष से इस बिंदु की लंबवत् दूरी शून्य है। अतः यह बिंदु x-अक्ष पर होगा। बिंदु P का x-निर्देशांक 3 है, इसलिए यह बिंदु OX की दिशा में मूलबिंदु से 3 इकाई की दूरी पर होगा।

करके देखें

1. बिंदुओं B (0,4), C (-4,0) और D (0,-2) को निर्देशांक समतल पर दर्शाइए।
2. तीन ऐसे अलग–अलग बिन्दुओं के निर्देशांक लिखें जो x-अक्ष पर हैं।
3. इसी तरह y-अक्ष पर स्थित तीन अलग–अलग बिन्दुओं के निर्देशांक लिखिए।

प्रश्नावली – 01

1. नीचे कुछ बिंदुओं के निर्देशांक दिए गए हैं उन्हें निर्देशांक समतल पर प्रदर्शित कर बताइए कि बिंदु किस चतुर्थांश में हैं ?

   (i) (3,4) (ii) (-5,6) (iii) (-2,-1) (iv) (2.5, -7)

2. निम्नलिखित बिंदुओं के निर्देशांक के आधार पर बताइए कि बिंदु किस अक्ष पर स्थित है?

   (i) (0,5) (ii) (-6,0) (iii) (-3,0) (iv) (0, -3.5)

3. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

   (i) बिंदु P (-4,-7) __________ चतुर्थांश में स्थित है।

   (ii) x-अक्ष पर स्थित किसी बिंदु का y-निर्देशांक ________ होता है।

   (iii) निर्देशांक समतल पर दोनों अक्ष परस्पर _______ होते हैं।

   (iv) y-अक्ष पर स्थित किसी बिंदु का x-निर्देशांक ________ होता है।

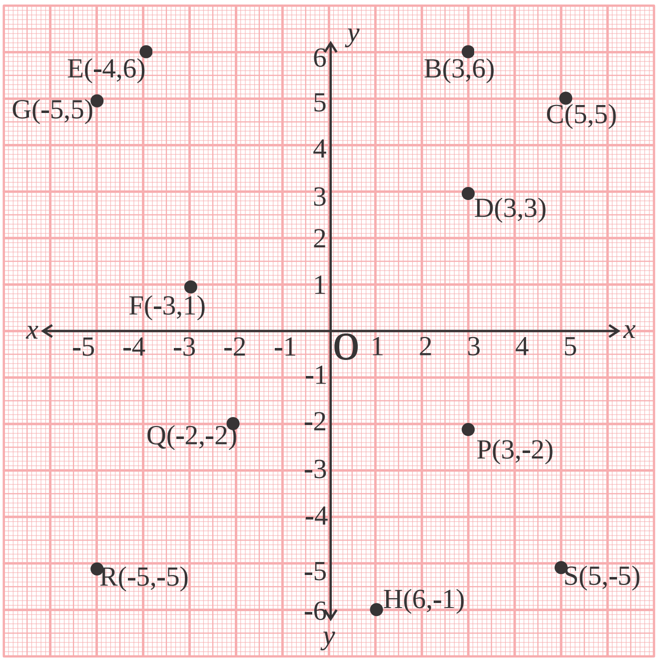
   (v) मूल बिंदु के निर्देशांक ________ होते हैं।

4. आलेख–05 में प्रदर्शित बिंदुओं की स्थितियों का अवलोकन कर निम्नलिखित निर्देशों के अनुसार कार्य कीजिए–

a) ऐसे बिंदुओं को लिखिए जिनके x-निर्देशांक समान हैं।

b) ऐसे बिंदुओं को लिखिए जिनके y-निर्देशांक समान हैं।

c) ऐसे बिंदुओं को लिखिए जिनके x-निर्देशांक और y-निर्देशांक समान हैं।



आलेख–05

बिंदुओं के बीच की दूरी

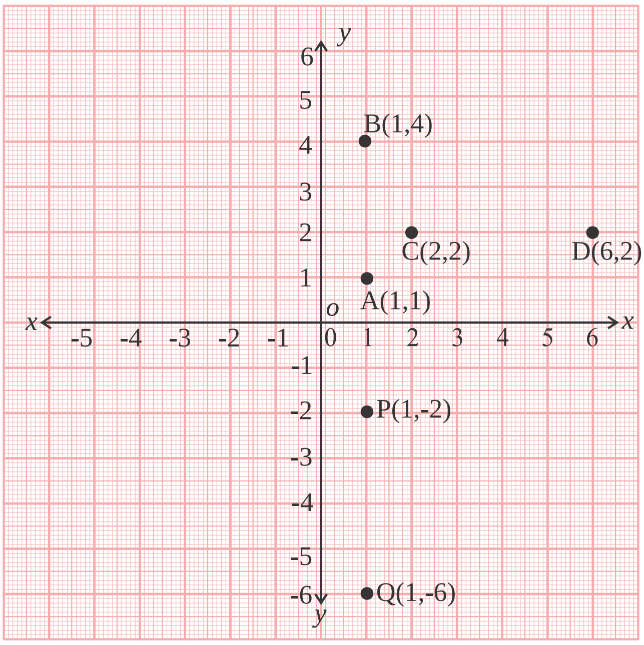
दिए गए आलेख में चार बिंदुओं A, B, C और D को प्रदर्शित किया गया है। क्या आप बता सकते हैं कि A, B और C, D बिंदुओं के बीच की दूरियाँ कितनी–कितनी हैं?

क्या बिंदु A और बिंदु B के बीच की दूरी AB , बिंदु C और बिंदु D के बीच की दूरी CD से कम है या दोनों दूरियाँ बराबर हैं? हम उन दोनों बिंदुओं के बीच की दूरी कैसे ज्ञात करेंगे जिनके निर्देशांक दिए गए हों?

उन दो बिंदुओं के बीच की दूरी ज्ञात करना आसान है जो क्षैतिज या ऊर्ध्वाधर अक्षों पर या उनके समांतर किसी रेखा पर स्थित जैसे हों। जैसे – A (1,1) व B (1,4)। इसी तरह C (2,2) और D (6,2) हैं।

इनमें पहले दोनों बिंदुओं के y-निर्देशांकों का अंतर लेने पर दूरी AB तथा बाद के दो बिंदुओं के x-निर्देशांकों का अंतर लेने पर दूरी CD क्रमशः प्राप्त कर सकते हैं।

दूरी AB = 4–1 = 3 इकाई



आलेख–06

(चूँकि AB = $y_2 - y_1$, क्योंकि x_2 और x_1 बराबर हैं।)

दूरी CD = 6−2 = 4 इकाई

(चूँकि CD = $x_2 - x_1$, क्योंकि y_1 और y_2 बराबर हैं।)

इसी तरह P (1,−2) और Q (1,−6) के बीच की दूरी

PQ = $y_2 - y_1$ क्योंकि x_2 और x_1 बराबर हैं।

PQ = −6 − (−2) = −4

दूरी धनात्मक ली जाती है। अतः PQ = 4 इकाई

करके देखें

इन बिंदुओं के बीच की दूरियाँ ज्ञात कीजिए ।

(i) (5,8) और (5,-3)

(ii) (2,3) और (2,7)

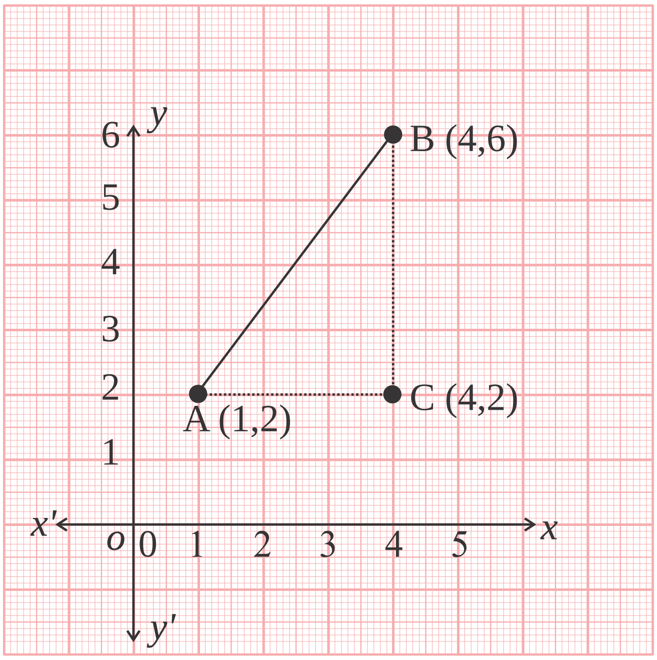
किन्हीं भी दो बिंदुओं के बीच की दूरी –

पिछले उदाहरण में ऐसी परिस्थिति में किन्हीं दो बिंदुओं के बीच की दूरी ज्ञात की गई जिसमें रेखा अंतराल AB, CD अथवा PQ या तो उर्ध्वाधर हैं या क्षैतिज।

यदि ऐसे दो बिंदु हों जो उर्ध्वाधर या क्षैतिज रेखा अथवा उनके समांतर रेखा पर न हों यानी ऐसा रेखा अंतराल हो जो न तो उर्ध्वाधर हो न ही क्षैतिज तो उनके बीच की दूरी कैसे ज्ञात करेंगे? आइए एक उदाहरण देखें –

उदाहरणः–4. बिंदुओं A (1,2) और B (4,6) के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

हल :– बिंदु A से x-अक्ष के समांतर रेखा खींचिए। इसी तरह बिंदु B से y-अक्ष के समांतर रेखा खींचिए। ये दोनों रेखाएँ बिंदु C पर प्रतिच्छेद करती हैं।



दूरी AC= 4−1= 3 इकाई

और दूरी BC= 6–2 = 4 इकाई।

त्रिभुज ABC में बौधायन– पाइथागोरस प्रमेय से

$AB^2 = AC^2 + BC^2$

$3^2 \quad 4^2$

$9 \quad 16$

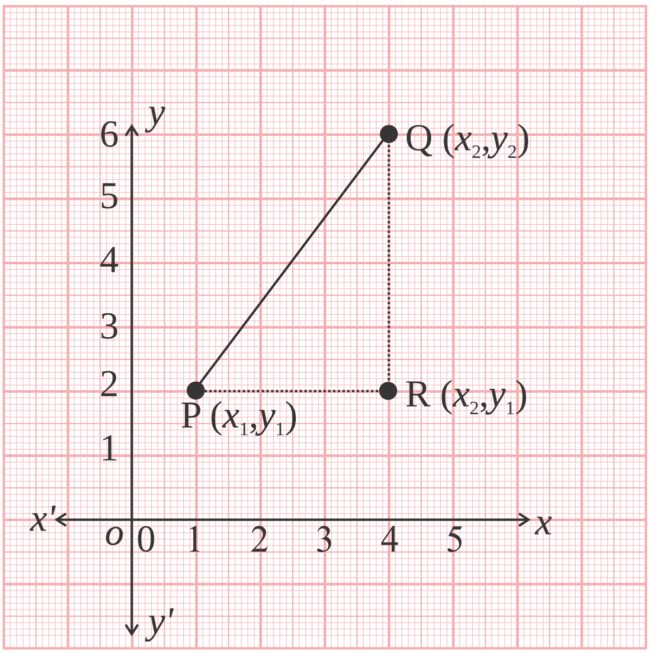
25

दूरी AB = 5 इकाई।

व्यापक परिस्थिति में दूरी

निर्देशांक समतल में किन्हीं भी दो बिंदुओं के बीच की दूरी ज्ञात करने के लिए हमें ऐसा तरीका चाहिए जो हर तरह की दूरियों पर लागू हो। हम Q और P के बीच दूरी निकालेंगे।

मान लीजिए कि बिंदु P के निर्देशांक (x_1,y_1) और Q के निर्देशांक (x_2,y_2) हैं।



आलेख–08

समकोण त्रिभुज PRQ में,

दूरी $PR= x_2–x_1$

दूरी $QR= y_2–y_1$

समकोण त्रिभुज PRQ में बौधायन–पाइथागोरस प्रमेय से

$PQ^2=PR^2+QR^2$

$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

$\therefore PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

चूँकि $(x_1 - x_2)^2$ और $x_2 \quad x_1{}^2$ बराबर हैं इसलिए हम बिंदु P से बिंदु Q की दूरी ज्ञात करें या बिंदु Q से बिंदु P की दूरी ज्ञात करें, परिणाम में अंतर नहीं पड़ेगा।

अर्थात दूरी PQ = दूरी QP

यह निर्देशांक समतल पर किन्हीं भी दो बिंदुओं के बीच दूरी पता करने के लिए उपयोग किया जा सकता है।

उदाहरणः–5. बिंदुओं P(2,-3) और Q(5,-7) के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

हलः– यहाँ $x_1=2, y_1=-3$ और $x_2=5, y_2=-7$

$$\because PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

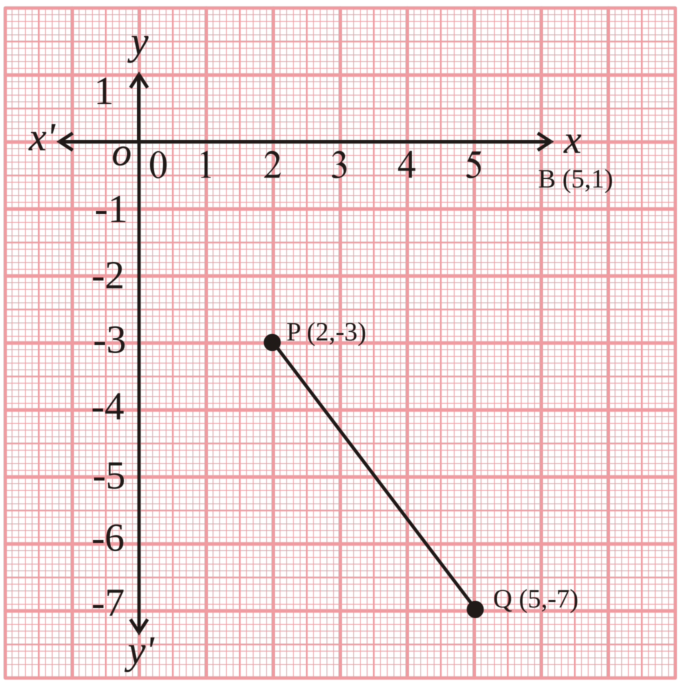
$$= \sqrt{(5-2)^2 + \{-7-(-3)\}^2}$$

$$= \sqrt{3^2 + (-4)^2}$$

$$= \sqrt{9+16}$$

$$= \sqrt{25}$$

$$\therefore PQ = 5 \text{ इकाई}$$



आलेख–09

उदाहरणः–6. y-अक्ष पर एक ऐसा बिंदु ज्ञात कीजिए, जो बिंदुओं A(6, 5) और B(–4, 3) से समदूरस्थ हो।

हल :– आप जानते हैं कि y-अक्ष पर स्थित कोई भी बिंदु $(0, y)$ के रूप का होता है। अतः मान लीजिए कि बिंदु $P(0, y)$ बिंदुओं A और B से समदूरस्थ है। तब,

$$PA \quad PB$$

$$(6-0)^2 + (5-y)^2 = (-4-0)^2 + (3-y)^2$$

$$36 + 25 + y^2 - 10y = 16 + 9 + y^2 - 6y$$

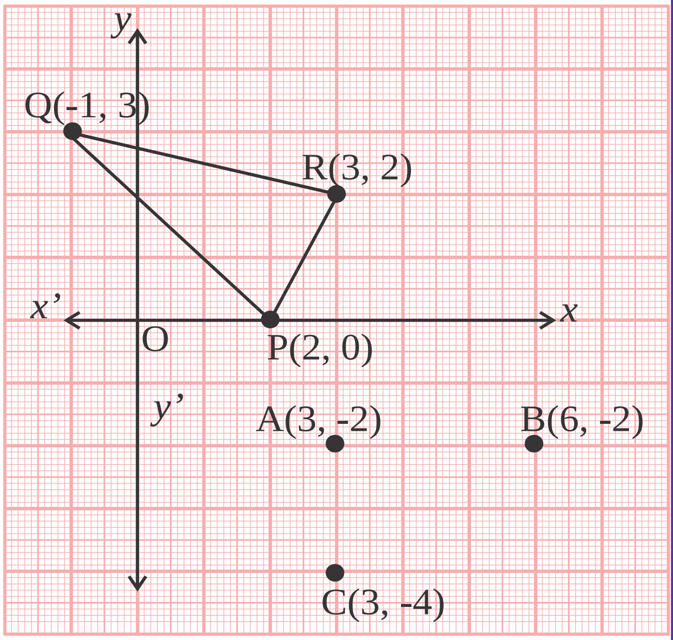
$$4y = 36$$

$$y = 9$$

अतः अभीष्ट बिंदु (0, 9) है।

प्रश्नावली – 02

1. fn, x, vkys[k&10 esa fcanq P की Q व R से दूरी ज्ञात कीजिए।
2. आलेख–10 को देखकर AC, AB व BC का मान ज्ञात कीजिए।
3. बिंदु (3, 4) की मूल बिंदु से दूरी ज्ञात कीजिए।
4. यदि PA PB हो तथा बिंदु A, B के निर्देशांक क्रमशः (2, 0) व (-2, 4) हों और P, y–अक्ष पर स्थित हो तब P के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।
5. y–अक्ष पर स्थित किसी बिंदु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जो बिंदुओं (5,-2) व (3,4) से समदूरस्थ है।
6. x और y में एक संबंध ज्ञात कीजिए, ताकि बिंदु (x, y) बिंदुओं (7, 1) और (3, 5) से समदूरस्थ हो।



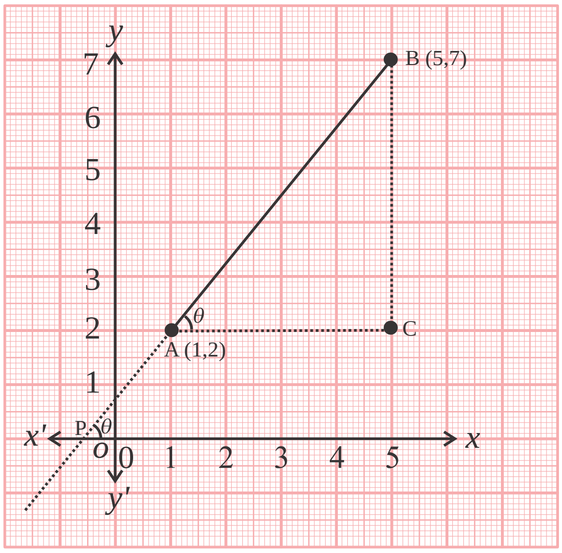
आलेख–10

EKCH24

ढाल या प्रवणता

अंतराल की ढाल या प्रवणता (SLOPE OF THE INTERVAL)

किसी रेखा या उसके किसी अंतराल की ढाल यह बताती है कि रेखा कितनी तेजी से चढ़ती या उतरती है। रेखा के किसी अंतराल AB की ढाल का मान y-निर्देशांक के B बिंदु से A बिंदु तक परिवर्तित होने तथा x-निर्देशांक के B बिंदु से A बिंदु तक परिवर्तित होने के बीच का अनुपात है। (ढाल को प्रवणता भी कहा जाता है, हम ढाल के लिए 'प्रवणता' शब्द का उपयोग करेंगे।)



आलेख–11

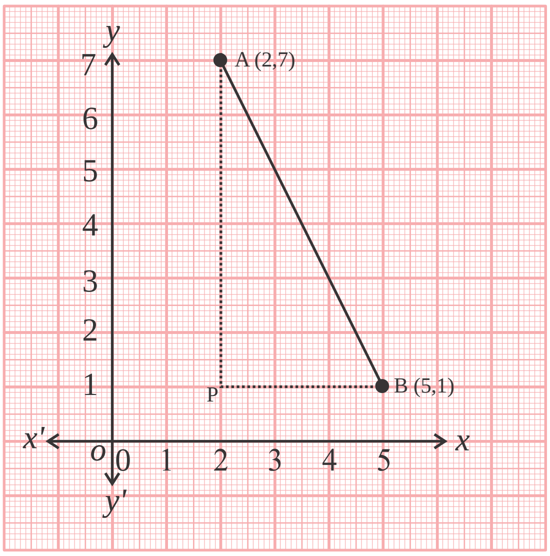
यदि बिंदु A के निर्देशांक (1, 2) और बिंदु B के निर्देशांक (5, 7) हैं। तब

$$\text{अंतराल AB की ढाल} = \frac{y_2 \quad y_1}{x_2 \quad x_1}$$

$$= \frac{7 \quad 2}{5 \quad 1}$$

$$= \frac{5}{4}$$

इस आकृति को हम ध्यानपूर्वक देखें तो हमें एक समकोण त्रिभुज नजर आता है जिसका समकोण बिंदु C पर है। यदि हम रेखाखंड AB का विस्तार करें तो वह किसी बिंदु P पर x-अक्ष को प्रतिच्छेद करेगा। यह रेखा x-अक्ष पर जो कोण बनाएगी वही कोण त्रिभुज ABC के बिंदु A पर बन रहा है (माना यह कोण   है।)



आलेख–12

$$\text{अंतराल AB की प्रवणता} = \frac{y_2 \quad y_1}{x_2 \quad x_1}$$

$$= \frac{BC}{AC}$$

$$= \tan$$

$$\text{प्रवणता} \quad \frac{BC}{AC} \quad \tan$$

यदि बिंदु B को पहला और बिंदु A को दूसरा बिंदु मानें तब क्या ढाल बदल जाएगा?

प्रवणता $\dfrac{2 \quad 7}{1 \quad 5}$

$\dfrac{5}{4}$

$\dfrac{5}{4}$

अर्थात् दिए गए दो बिंदुओं में से किसी भी बिंदु को प्रथम बिंदु या द्वितीय बिंदु मानने पर उन बिंदुओं से गुजरने वाली रेखा या अंतराल की प्रवणता का मान परिवर्तित नहीं होता।

अब आलेख 12 में दिखाए गए अंतराल AB की प्रवणता पर विचार कीजिए।

अंतराल AB की प्रवणता $= \dfrac{(1 \quad 7)}{(5 \quad 2)}$

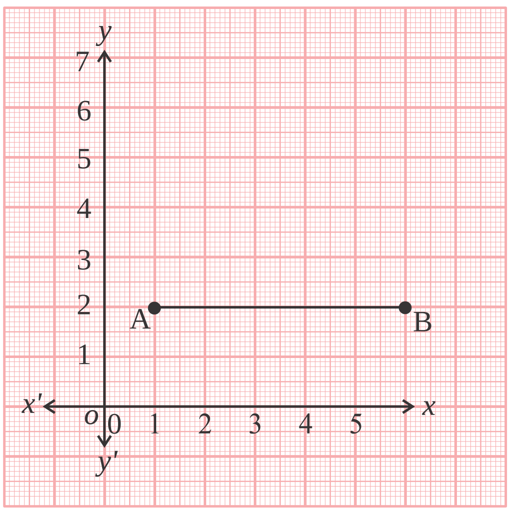
$\dfrac{6}{3}$

$= -2$

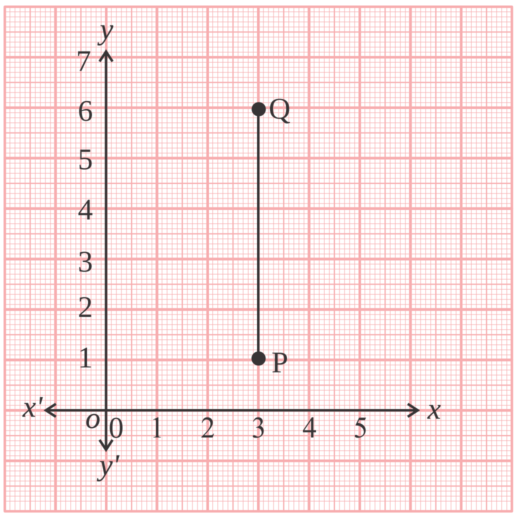
अर्थात यदि किसी अंतराल में A से B की दिशा में बढ़ने पर y का मान घटता जाता हो और x का मान बढ़ता जाता हो तो इस प्रकार के अंतराल की प्रवणता ऋणात्मक होती है।

विशेष स्थितियाँ

1) जब अंतराल क्षैतिज हो – इस स्थिति में $y_2 - y_1$ शून्य है और इसलिए प्रवणता शून्य है।



आलेख–13

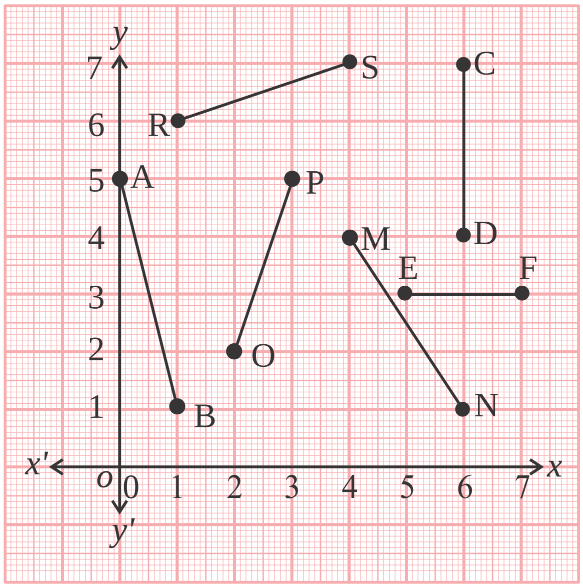


आलेख–14

2) जब अंतराल उर्ध्वाधर हो – इस स्थिति में $x_2 - x_1$ शून्य है, चूँकि शून्य से विभाजन परिभाषित नहीं है इसलिए हम कह सकते हैं कि प्रवणता परिभाषित नहीं है।

सोचें एवं चर्चा करें

दिए गए आलेख–15 को देखिए। आप इनकी प्रवणता के विषय में क्या कहेंगे? अपने मित्रों के साथ चर्चा कीजिए। कौन–कौन से रेखाखंड की प्रवणता धनात्मक है और कौन–कौन से रेखाखंड की प्रवणता ऋणात्मक ?



आलेख–15

रेखा की प्रवणता

रेखा की प्रवणता को रेखा के किसी अंतराल की प्रवणता से परिभाषित किया जाता है, क्योंकि रेखा के किन्हीं भी दो अंतरालों की प्रवणता बराबर होती हैं।

मान लीजिए कि दो अंतराल AB और PQ एक ही रेखा पर हैं। समकोण त्रिभुज ABC और PQR कि रचना कीजिए जिसकी भुजाएँ AC और PR, x-अक्ष के समांतर हैं तथा BC और QR, y-अक्ष के समांतर हैं।

त्रिभुज ABC और त्रिभुज PQR में

AC समांतर है PR के तथा AQ तिर्यक रेखा उन्हें काटती है।

इसलिए A = P (संगत कोण)

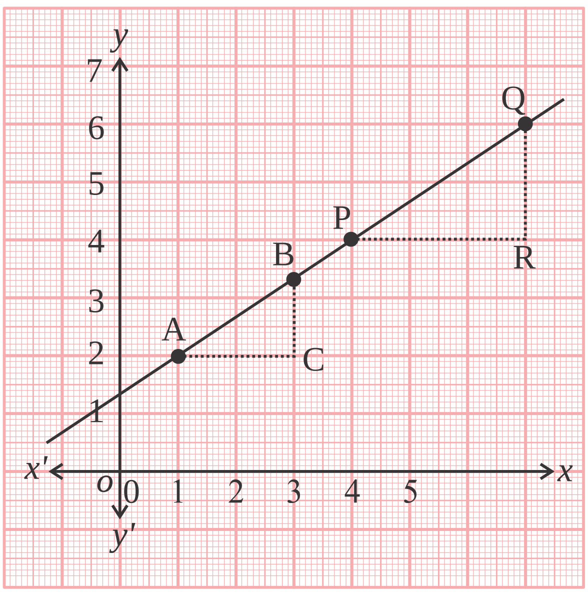
इसी तरह BC समांतर है QR के तथा AQ तिर्यक रेखा उन्हें काटती है।

इसलिए B = Q (संगत कोण)

C = R (समकोण)

इसलिए ABC~ PQR

इसलिए $\frac{QR}{PR}$ $\frac{BC}{AC}$



आलेख–16

हम कह सकते हैं कि इन दोनों अंतरालों AB और PQ की प्रवणता बराबर है।

उदाहरणः–7. एक रेखा बिंदु (1,2) और (5,10) से गुजरती है। इसकी ढाल ज्ञात कीजिए।

हलः– ढाल $\frac{y_2 \quad y_1}{x_2 \quad x_1}$

$$\frac{10 \quad 2}{5 \quad 1}$$

$$\frac{8}{4}$$

$$2$$

उदाहरणः–8. एक रेखा बिंदु (5, 7) से गुजरती है और इसकी ढाल $\frac{2}{3}$ है। इस रेखा पर उस बिंदु के x निर्देशांक ज्ञात कीजिए जिसका y निर्देशांक 13 हो।

हल :– रेखा पर स्थित पहला बिंदु (5, 7) है। दूसरे बिंदु के निर्देशांक (x, 13) होंगे।

रेखा की ढाल $\frac{13 \quad 7}{x \quad 5}$

$$\frac{6}{(x \quad 5)}$$

इसलिए $\frac{6}{(x \quad 5)} \quad \frac{2}{3}$ (दिया है।)

$$18 \quad 2(x \quad 5)$$

$$18 \quad 2x \quad 10$$

$$x \quad 14$$

ढाल की तुलना

अभी आपने ढाल को किसी रेखा के अंतराल के दो बिंदुओं के निर्देशांकों के संदर्भ में देखा। आइए इसे एक अन्य संदर्भ में देखते हैं।

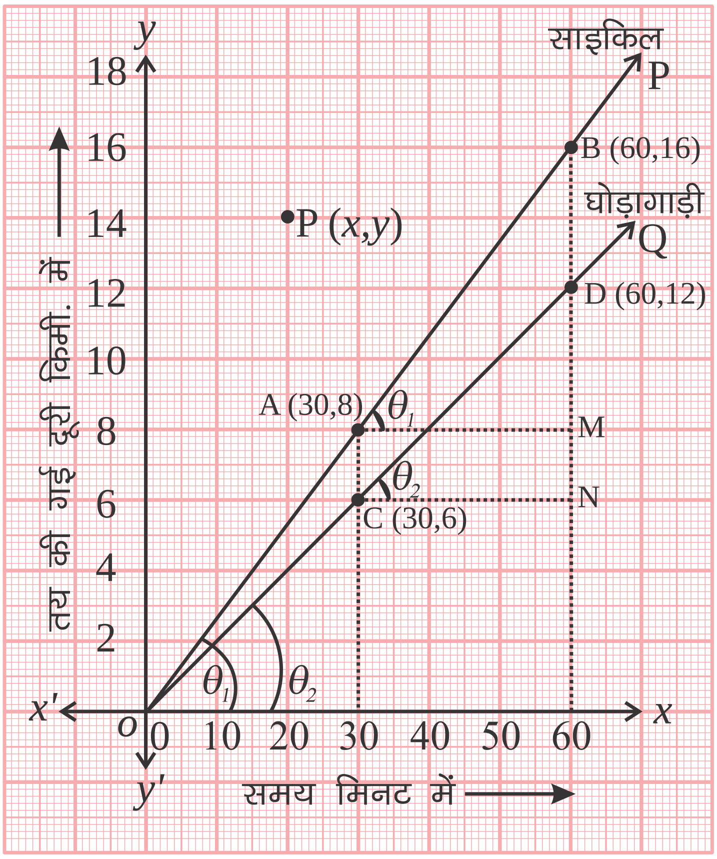
एक घोड़ागाड़ी और एक साइकिल किसी एक जगह से एक साथ चलना (क्रमशः 12 किमी./घंटा और 16 किमी./घंटा की चाल से) शुरू करते हैं। अलग–अलग समय पर इनके द्वारा तय की गई दूरी को इस तालिका में देखा जा सकता है–

तय की गई दूरी	15 मिनट में	30 मिनट में	60 मिनट में
घोड़ागाड़ी द्वारा तय की गई दूरी	3 किमी.	6 किमी.	12 किमी.
साइकिल द्वारा तय की गई दूरी	4 किमी.	8 किमी.	16 किमी.

समय और दूरी को निर्देशांक मानकर बनाए गए आलेख को ध्यान से देखें।

रेखा OP साइकिल के और रेखा OQ घोड़ागाड़ी के आलेख को प्रदर्शित करती है।

इन रेखाओं के अंतराल क्रमशः AB और CD है।



आलेख–17

AB की ढाल $\frac{16 \quad 8}{60 \quad 30}$

$\frac{8}{30}$

$\frac{4}{15}$

CD की ढाल $\frac{12 \quad 6}{60 \quad 30}$

$\frac{6}{30}$

$\frac{3}{15}$

स्पष्ट है कि $\frac{4}{15} \quad \frac{3}{15}$

AB की ढाल, CD की ढाल से ज्यादा है।

अब AB की ढाल को समकोण त्रिभुज AMB में देखिए

AB की ढाल $\frac{16 \quad 8}{60 \quad 30}$

$\frac{BM}{AM}$

tan $_1$

(चूँकि BAM BOX, रेखा OP द्वारा x–अक्ष के साथ बनाया गया कोण $_1$)

इसी तरह CD की ढाल tan $_2$($_2$ OQ द्वारा x–अक्ष के साथ बनाया गया कोण)

आपने देखा कि किसी रेखा के द्वारा x–अक्ष के साथ बनाए गए कोण का स्पर्शज्या (tangent) ही उस रेखा की ढाल है। स्पष्ट है कि कोण बढ़ने के साथ–साथ ढाल भी बढ़ती जाती है। एक और बात यहाँ देखी जा

सकती है कि त्रिभुज AMB में AM, 30 मिनट के समय अंतराल को और BM इस 30 मिनट में चली गई 8 किमी. की दूरी को बताता है तथा BM और AM का अनुपात साइकिल की चाल को बताता है। अतः हम देखते हैं कि यहाँ साइकिल की चाल उसकी रेखा की ढाल को व्यक्त करती है।

अंतःखंड

कोई रेखा x–अक्ष को जिस बिंदु पर काटती है, उस बिंदु की मूलबिंदु से दूरी x–अंतःखंड कहलाती है। इसीतरह, कोई रेखा y–अक्ष को जिस बिंदु पर काटती है, उस बिंदु की मूलबिंदु से दूरी y–अंतःखंड कहलाती है।

रेखा का समीकरण

EKLS3R

समीकरण $y \quad 2x \quad 4$ पर विचार कीजिए। क्या आप ऐसे निर्देशांकों के युग्म ज्ञात कर सकते हैं, जो इस समीकरण को संतुष्ट करें। उदाहरण के लिए

$x \quad 0$ के लिए

$$y \quad 2 \quad 0 \quad 4$$

$$y \quad 4$$

इसलिए (0, 4) इस तरह का एक निर्देशांक युग्म है। इसी तरह के दूसरे निर्देशांक युग्म ज्ञात कीजिए। अब इन बिंदुओं को आलेखित कीजिए। आपने किस तरह की रेखा खींची? क्या यह सरल रेखा है?

अब आप एक ऐसी रेखा पर विचार कीजिए जिसकी ढाल 2 और y–अंतःखंड 4 है। यह रेखा बिंदु A (0, 4) से गुजरेगी।

इस रेखा पर कोई बिंदु P (x, y) लीजिए।

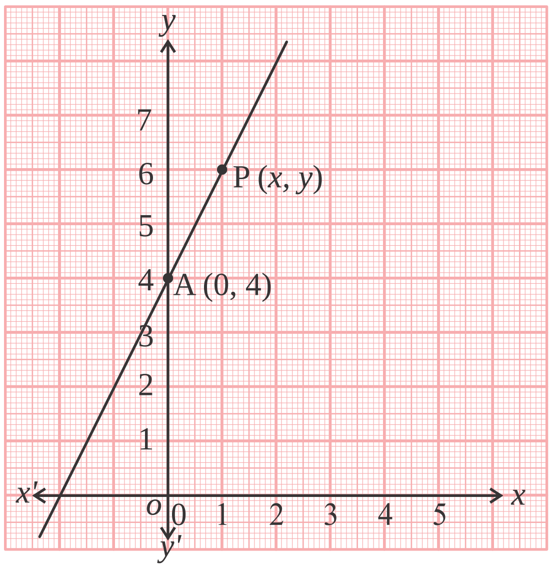
अंतराल AP की प्रवणता $\dfrac{(y \quad 4)}{(x \quad 0)}$

$$\dfrac{(y \quad 4)}{x}$$

दिया गया है कि रेखा की ढाल 2 है,

अतः $\dfrac{(y \quad 4)}{x} \quad 2$

$$y \quad 2x \quad 4$$



आलेख–18

यह उस रेखा का समीकरण है जो बिंदु (0, 4) से गुजरती है और जिसकी ढाल 2 है। चूँकि बिंदु P भी इस रेखा पर स्थित है इसलिए बिंदु $P(x, y)$के निर्देशांक $y \quad 2x \quad 4$ को संतुष्ट करते हैं।

आइए, अब एक ऐसी रेखा पर विचार करें जिसकी ढाल m और Y अक्ष से अंतःखंड c है। इस रेखा का समीकरण क्या होगा? यह रेखा बिंदु A(0, c) से गुजरेगी। मान लीजिए कि इस रेखा पर बिंदु $P(x, y)$ है।

अंतराल AP की ढाल $\dfrac{(y \quad c)}{(x \quad 0)}$ ....(1)

लेकिन हमें पता है कि इस रेखा की ढाल m है ....(2)

(1) और (2) से

$$\frac{(y \quad c)}{(x \quad 0)} \quad m$$

$$y \quad c \quad mx$$

$$y \quad mx \quad c$$

अर्थात् कार्तीय समतल में उस रेखा का समीकरण $y \quad mx \quad c$ है, जिसका ढाल m और Y अक्ष से अंतःखंड c है।

विलोमतः वे सभी बिंदु जिनके निर्देशांक समीकरण $y \quad mx \quad c$ को संतुष्ट करते हैं, सदैव उस रेखा पर स्थित होंगे जिसकी ढाल m और Y अक्ष से अंतःखंड c है।

उदाहरणः–9. रेखा की ढाल (या प्रवणता) और Y अक्ष से अंतःखंड लिखिए :–

(1) $y \quad 7x \quad 5$

(2) $y \quad\quad x \quad 5$

हलः–

(1) $y \quad 7x \quad 5$ की तुलना व्यापक समीकरण $y \quad mx \quad c$ से करने पर $m \quad 7, c \quad\quad 5$

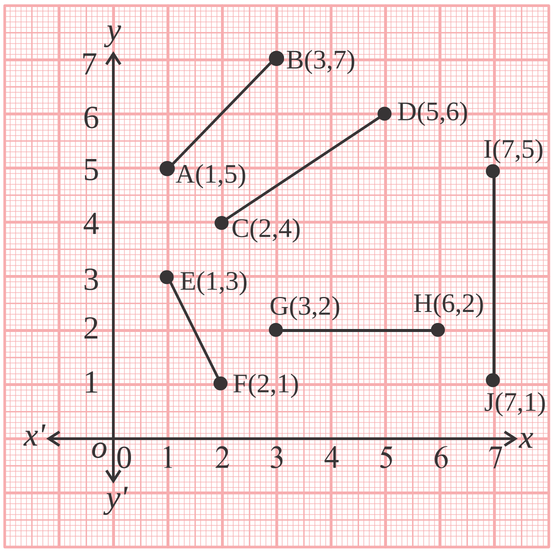
इसलिए रेखा की ढाल 7 और Y अक्ष से अंतःखंड –5 है।

(2) $y \quad\quad x \quad 5$ की तुलना $y \quad mx \quad c$ से करने पर $m \quad\quad 1, c \quad 5$

इसलिए रेखा की ढाल –1 और Y अक्ष से अंतःखंड 5 है।

प्रश्नावली 3

1. दिए गए आलेख–19 में अंतराल की ढाल या प्रवणता ज्ञात कीजिए।



आलेख–19

2. X अक्ष के समांतर रेखा की प्रवणता क्या होगी?

3. एक रेखा बिंदु (7,10) से गुजरती है जिसकी ढाल $\frac{5}{6}$ है। (i) इस रेखा पर उस बिंदु के x निर्देशांक ज्ञात कीजिए जिसका y निर्देशांक 15 हो।

   (ii) Y निर्देशांक –3 पर x का मान क्या होगा?

4. एक रेखा बिंदु (3,7) व (6,8) से होकर जाती है तो उस रेखा की प्रवणता ज्ञात कीजिए।

5 सरल रेखा $5x \quad 6y \quad 7$ को $y \quad mx \quad c$ के रूप में लिखिए तथा रेखा की ढाल तथा Y अक्ष से अंतःखंड ज्ञात कीजिए।

6. उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो Y अक्ष से 3 माप का अंतःखंड काटती है एवं जिसकी प्रवणता $\frac{5}{4}$ है।

7. Y अक्ष के समांतर रेखा की प्रवणता क्या होगी?

8. Y अक्ष से 6 माप का अंतःखंड काटने वाली $\frac{5}{3}$ ढाल वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

9. उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी प्रवणता $\frac{7}{3}$ है तथा रेखा बिंदु (6,0) से होकर जाती है।

10. मूल बिंदु से होकर जाने वाली उस सरल रेखा की प्रवणता ज्ञात कीजिए जो बिंदु (2,3) से भी होकर जाती है।

EKVN5E

हमने सीखा

1. यदि किसी समतल पर दो परस्पर लंबवत रेखाएँ XOX व YOY एक बिंदु O पर प्रतिच्छेद करें तब हम XOX को X अक्ष, YOY को Y अक्ष कहते हैं। प्रतिच्छेद बिंदु O, ''मूल बिंदु'' तथा यह समतल, 'निर्देशांक समतल' कहलाता है।

2. निर्देशांक समतल में किसी बिंदु के लिए x–निर्देशांक, Y अक्ष से लंबवत दूरी व y–निर्देशांक X अक्ष से लंबवत दूरी के बराबर होता है।

3. निर्देशांक समतल पर किन्हीं दो बिंदुओं $P(x_1, y_1)$ व $Q(x_2, y_2)$ के बीच की दूरी

   $PQ \quad \sqrt{(x_2 \quad x_1)^2 \quad (y_2 \quad y_1)^2}$ होती है।

4. समतल पर रेखा की ढाल या प्रवणता $\frac{y_2 \quad y_1}{x_2 \quad x_1}$, जहाँ x निर्देशांक के A बिंदु से B बिंदु तक परिवर्तित होने का मान x_2-x_1 है तथा y निर्देशांक के A बिंदु से B बिंदु तक परिवर्तित होने का मान y_2-y_1 है।

5. ऐसी रेखा जिसकी ढाल m और Y अक्ष से अंतःखंड c हो, का समीकरण $y \quad mx \quad c$ होता है।

उत्तरमाला–1

1. (i) प्रथम (ii) द्वितीय (iii) तृतीय (iv) चतुर्थ

2. (i) y–अक्ष (ii) x–अक्ष (iii) x–अक्ष (iv) y–अक्ष

3. (i) तृतीय (ii) शून्य (iii) लंब (iv) शून्य (v) (0,0)

4. (a) B, D, P ; और G, R और C,S (b) B, E ; P,Q,C,G

   (c) Q, R, D, C

उत्तरमाला–2

1. PQ $3\sqrt{2}$, PR $\sqrt{5}$ 2. AC 2, AB 3, BC $\sqrt{13}$ 3. 5

4. P(0,2)   5. $0, \frac{1}{3}$ 6. $x - y - 2 = 0$

उत्तरमाला–3

1. AB की प्रवणता = 1, CD की प्रवणता $\frac{2}{3}$, EF की प्रवणता = -2, GH की प्रवणता = 0, IJ की प्रवणता = अपरिभाषित

2. शून्य 3. (i) $x = 13$ (ii) $x \quad \frac{43}{5}$ 4. $\frac{1}{3}$

5. $y \quad \frac{5}{6}x \quad \frac{7}{6}$, ढाल $\frac{5}{6}$, अंतःखंड $\frac{7}{6}$

6. $5x \quad 4y \quad 12 \quad 0$ 7. अपरिभाषित 8. $5x \quad 3y \quad 18 \quad 0$

9. $7x \quad 3y \quad 42 \quad 0$ 10. $\frac{3}{2}$

अध्याय 07

आलेख
[GRAPH]

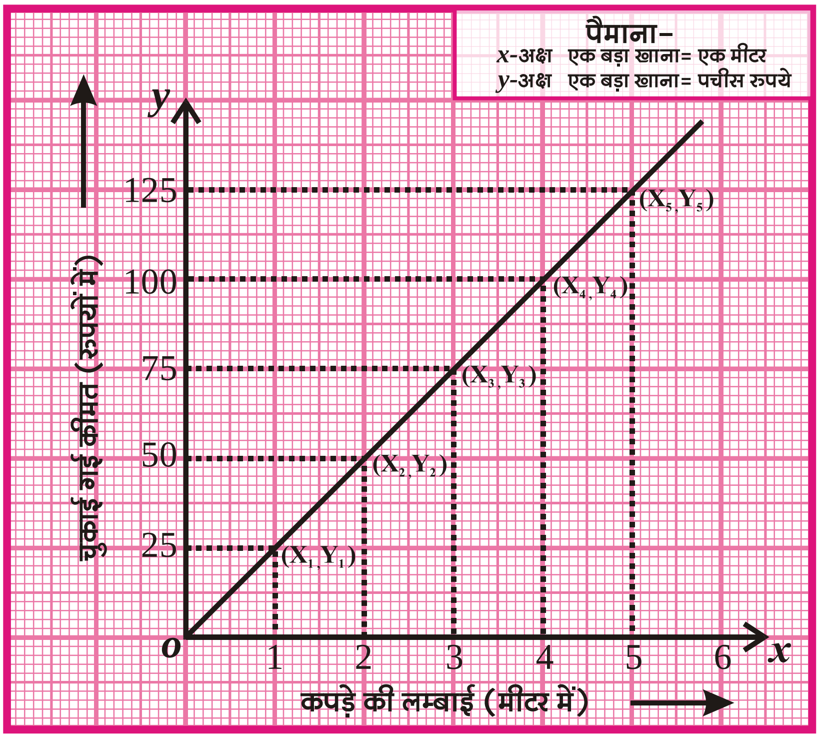
EL5J72

गणित में हम जानकारियों को, बेहतर समझ व विश्लेषण के लिए कई माध्यमों से निरूपित और प्रदर्शित करते हैं । ऐसा ही एक माध्यम आलेख है जिसकी सहायता से हम बता सकते हैं कि किसी एक राशि से दूसरी राशि का क्या संबंध है। आलेख के माध्यम से यह भी देखा जा सकता है कि परस्पर संबंधित दो राशियों में से किसी एक में परिवर्तन करने पर दूसरे में क्या बदलाव आता है। इनके साथ–साथ आलेख बनाने से कुछ नई जानकारियाँ भी पता की जा सकती है। इस अध्याय में हम आलेख के विभिन्न उपयोगों को देख सकेंगे।

दो राशियों के बीच के संबंध –

कुछ व्यक्ति कपड़े की एक दुकान से 25 रुपये प्रति मीटर की दर से 1 मीटर, 2 मीटर, 3 मीटर, 4 मीटर और 5 मीटर लंबाई के कपड़े क्रमश: 25रु., 50रु., 75रु., 100रु. और 125रु. में खरीदते हैं। उनके द्वारा चुकायी गई कीमतों और कपड़े की लंबाइयों के बीच के संबंध को आलेख में प्रदर्शित किया गया है। आलेख में हम यह देख पाते हैं कि कपड़े की लंबाई बढ़ने से चुकाई गई कीमत में किस तरह का परिवर्तन हो रहा है।

आइए एक और उदाहरण देखते हैं।



आलेख–01

क्रिकेट के एक मैच में एक टीम के द्वारा शुरू के दस ओवरों में बनाए गए रनों की संख्या इस प्रकार थी– 5, 4, 8, 7, 2, 5, 4, 4, 2, 9. यदि हम ओवरों की संख्या और उनमें बने रनों की संख्या को लेते हुए आलेख खींचें तो चित्र 2 जैसा आलेख प्राप्त होगा। –

आलेख–02

सोचें व चर्चा करें

क्या आलेख में लिए गए आँकड़ों के बीच कोई संबंध है?

1. एक प्रकार के आँकड़ों को X अक्ष पर और दूसरे प्रकार के आँकड़ों को Y अक्ष पर प्रदर्शित किया गया। क्या आँकड़ों के लिए अक्षों को चुने जाने का कोई आधार है?
2. एक आलेख सरल रेखा के रूप में है ,दूसरा टेढ़ी–मेढ़ी रेखाओं के रूप में, क्या इसका कोई कारण हो सकता है?

आलेख बनाना सीखें :–

आलेख बनाने के लिए हमें दो तरह के आँकड़ों की जरूरत होती है। हम एक को X अक्ष और दूसरे को Y अक्ष पर दर्शाते हैं। क्या इन आँकड़ों को हम किसी भी अक्ष पर दर्शा सकते हैं? अथवा किस आँकड़े को X अक्ष और किस को Y अक्ष पर दर्शाना है इसके लिए कुछ आधार होते हैं।

आलेख 1 में देखें तो पाएँगें कि अगर हम ज्यादा कपड़ा खरीदते हैं तो हमें कीमत भी अधिक देनी होती है। अगर कम कपड़ा खरीदते हैं तो कीमत कम होगी। यह एक उदाहरण है जहाँ एक राशि दूसरी राशि को प्रभावित करती है। चुकाई गई कीमत, कपड़े की मात्रा पर निर्भर करती है। इस तरह हम कह सकते हैं कि यहाँ कपड़े की मात्रा एक मुक्त या स्वतंत्र चर है जबकि

चुकाई गई कीमत एक आश्रित चर है। प्रायः हम स्वतंत्र चर (आँकड़े) को X अक्ष पर तथा आश्रित चर को Y अक्ष पर दर्शाते हैं।

एक बार यह निश्चित हो जाए कि हमें X अक्ष पर कौन सा और Y अक्ष पर कौन सा आँकड़ा लेना है, उसके बाद दोनों अक्षों के लिए पैमाना चुनते हैं।

पैमाना – X अक्ष और Y अक्ष पर वांछित राशियों को निरूपित करने के लिए पैमाने का चयन राशि अनुसार करना होता है। आइए इस प्रक्रिया को आलेख–1 से समझते हैं। 6 मी. कपड़े के लिए चुकाई गई कीमत 125 रु. है। यदि हम 1 बड़े वर्ग की लंबाई = 1 रुपया पैमाना चुनने का निश्चय करें, तो हमें 125 वर्ग का अक्ष खींचना होगा। जो कागज की शीट पर संभव नहीं। इसके विपरीत 1 बड़े वर्ग की लंबाई =50 रु. का पैमाना चुने तो बहुत कम फैलाव होगा अतः हम ऐसा पैमाना चुनेंगे जिससे संबंध साफ दिखे। यहाँ हमने 1 बड़े वर्ग की लंबाई = 25रु. ली और हमें 6 इकाई का अक्ष खींचना होगा। ग्राफ खींचने के लिए पैमाने का चयन करते समय कुछ बातों का ध्यान रखना होगा।

- प्रत्येक राशि के अधिकतम और न्यूनतम मानों के बीच अंतर
- जिस पेपर पर आलेख खींचना है, उसके अधिकतम भाग का उपयोग करना।

प्रत्येक बिंदु को आलेख पर चिह्नित करते हैं। X अक्ष पर इंगित राशि के मान के लिए Y अक्ष की राशि के मान अनुसार X अक्ष से दूरी पर बिंदु अंकित करते हैं। इन दोनों मानों से ही ग्राफ पर बिंदु बनता है।

सभी बिंदुओं को जोड़कर आलेख प्राप्त करते हैं।

आलेखों से हमें क्या पता चलता है?

आपने अखबारों, पत्रिकाओं और टेलीविजन कार्यक्रमों में अलग–अलग तरह के आलेख देखे होंगे। वास्तव में ये आलेख संख्याओं से बने आँकड़ों के चित्रात्मक प्रदर्शन हैं। एक नजर डालने भर से हमें कई जानकारियाँ मिल जाती हैं। हम दोनों आलेखों को बारी–बारी से देखें तो पता चलेगा कि कपड़े की लंबाई और उसके मूल्यों को निर्देशांक मानकर खींचा सरल रेखा आलेख यह बताता है कि कपड़े के मूल्य और उसकी लंबाई के बीच एक निश्चित अनुपात है।

$$\left(\frac{100}{4}, \frac{75}{3}, \frac{25}{1} \cdots \text{आदि}\right)$$

यदि हम यह जानना चाहें कि किसी दी गई लंबाई के कपड़े का मूल्य क्या होगा या दिए हुए रुपयों में कितना कपड़ा खरीदा जा सकेगा तो हम आलेख द्वारा इसे भी बहुत आसानी से जान सकते हैं।

इसी तरह दूसरा टेढ़ा–मेढ़ा आलेख यह बताता है कि किसी ओवर में कितने रन बनेंगे यह अनिश्चित है। लेकिन आलेख को देखकर यह तुरंत बताया जा सकता है कि किस ओवर में सबसे ज्यादा या सबसे कम रन बने। औसत रन संख्या जानकर यह भी बताया जा सकता है कि 20 या 50 ओवर की समाप्ति पर लगभग कितने रन बन सकते हैं। किंतु यह अनुमान गलत भी हो सकता है क्योंकि बाद के ओवरों में रन तेजी से भी बन सकते हैं या पूरी टीम आउट भी हो सकती है।

कुछ और आलेख –

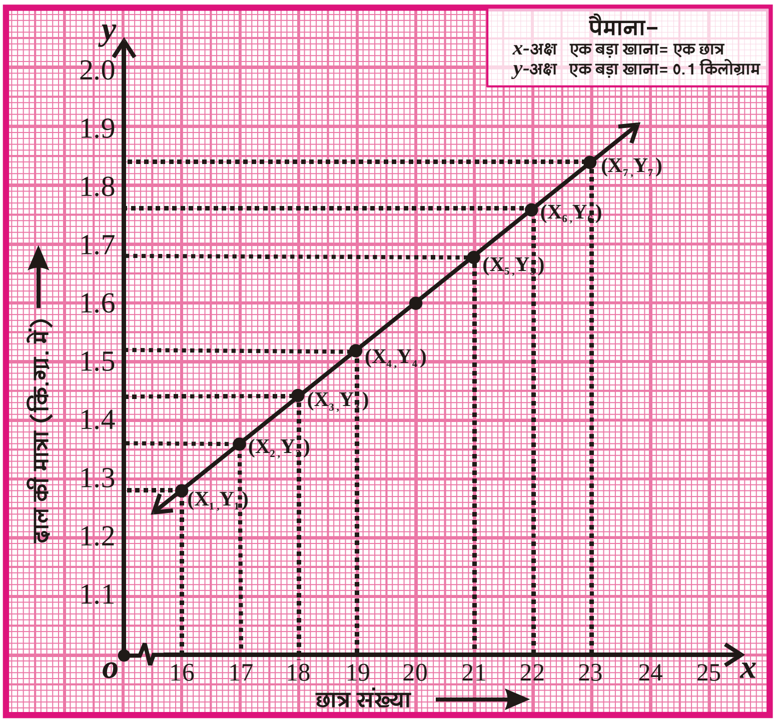
आलेख 3 :– उच्चतर माध्यमिक शाला जमराँव के छात्रावास में किसी एक सप्ताह के अलग–अलग दिनों में छात्रों की संख्या और उनके लिए पकाई गई दाल की मात्रा के आँकड़े निम्नानुसार थे –

छात्र संख्या	16	19	22	23	21	18	17
दाल की मात्रा (किग्रा. में)	1.280	1.520	1.760	1.840	1.680	1.440	1.360

आँकड़े (छात्र संख्या, दाल की मात्रा) के रूप में है।

क्या छात्रों की संख्या और उनके लिए पकाई जाने वाली दाल की मात्रा में कोई संबंध है ? आइए इसे आलेख बनाकर समझें।

आप देख रहे हैं कि दाल की मात्रा छात्रों की संख्या बढ़ने–घटने के साथ ज्यादा या कम हो रही है। क्या इस बदलाव की कोई निश्चित दर है?



आलेख–03

आपस में चर्चा करें। इस आलेख में एक बात ध्यान देने की है। यहाँ ग्राफ 0,0 से शुरू नहीं होता ऐसा कई आलेखों में होता है जहाँ कई बार आँकड़े शून्य के नजदीक से शुरू नहीं होते। ऐसी स्थिति में हम आलेख पर चिह्न के द्वारा खाली जगह को दर्शाते हैं। जैसे ऊपर दिए गए आलेख में X अक्ष पर आँकड़े 16 से शुरू होते हैं और 1 से 16 के बीच कोई आँकड़ा नहीं है। इसलिए X अक्ष पर मूल बिंदु शून्य से 16 के बीच के भाग को चिह्न से दर्शाया गया है।

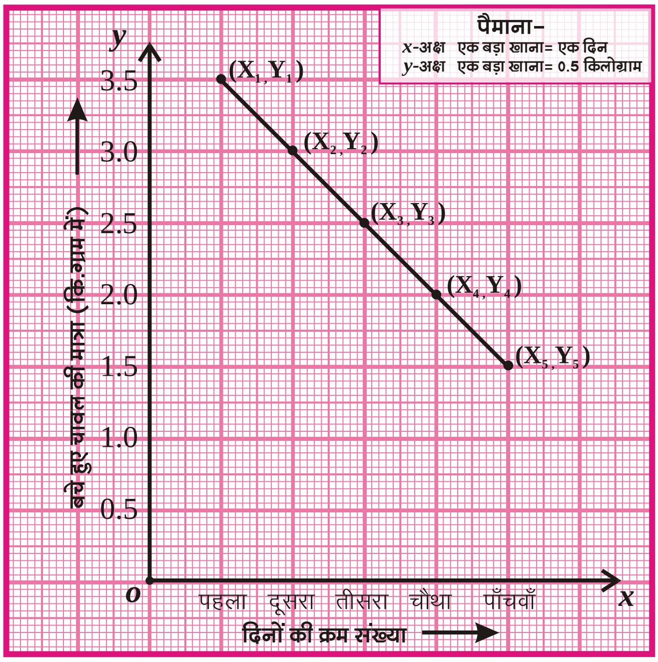
सोचें एवं चर्चा करें

यदि दिन क्रमांक के साथ पकाई दाल की मात्रा अथवा उपस्थित बच्चों का आलेख बनाएँ तो वह कैसा होगा?

आलेख 4 :– फूलमती ने अपने घर के लिए 4 किलोग्राम चावल खरीदा। उसके यहाँ रोज 500 ग्राम चावल पकता है। क्या हम प्रत्येक दिन बचे हुए चावल का आलेख बना सकते हैं ?

हल :– इस आलेख के आँकड़े (दिन, बचे हुए चावल की मात्रा) के रूप में हैं। पहला बिंदु (1,3.5) और पाँचवा बिंदु (5,1.5) है।

आप देख रहे हैं कि दिनों की संख्या बढ़ने के साथ बचे हुए चावल की मात्रा कम होती जा रही है। क्या आप आलेख को देखकर बता सकते हैं कि चावल कब खत्म हो जाएगा?



आलेख–04

करके देखें

1. अपने आस–पास से इसी प्रकार के आँकड़े इकट्ठे कर इन आँकड़ों से आलेख बनाइए।
2. आलेख 3 और 4 दोनों एक सरल रेखा है किंतु दोनों एक दूसरे से भिन्न है। इनमें क्या–क्या फर्क है?
3. आलेख 3 और 4 में (x,y)की तालिका बनाएँ।

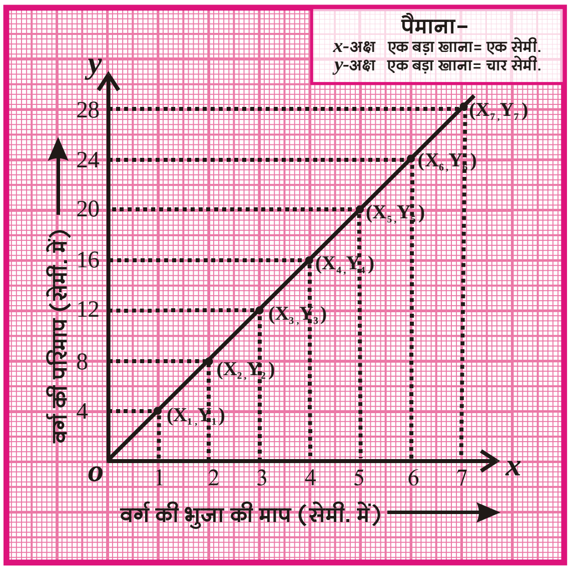
आलेख 5 :– वर्गों की एक भुजा की माप व उन वर्गों के परिमाप को सारणी में प्रदर्शित किया गया है।

वर्ग की भुजा की माप (सेमी. में)	1	2	3	4	5	6	7
वर्ग का परिमाप (सेमी. में)	4	8	12	16	20	24	28

सारणी के आँकड़ों से आलेख बनाइए तथा निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए –

1. x अक्ष पर कौन सा आँकड़ा चुनें।
2. y अक्ष पर कौन सा आँकड़ा चुनें।

हल :– इस आलेख में हम देख पा रहे हैं कि वर्ग की एक भुजा की माप में वृद्धि होने से उसके परिमाप में भी वृद्धि हो रही है। ऊपर दिए हुए आँकड़ों में वर्ग की भुजा की माप एक स्वतंत्र चर है और वर्ग का परिमाप आश्रित चर है। अतः x अक्ष पर वर्ग की भुजा की माप और y अक्ष पर वर्ग की परिमाप दर्शाएँ।

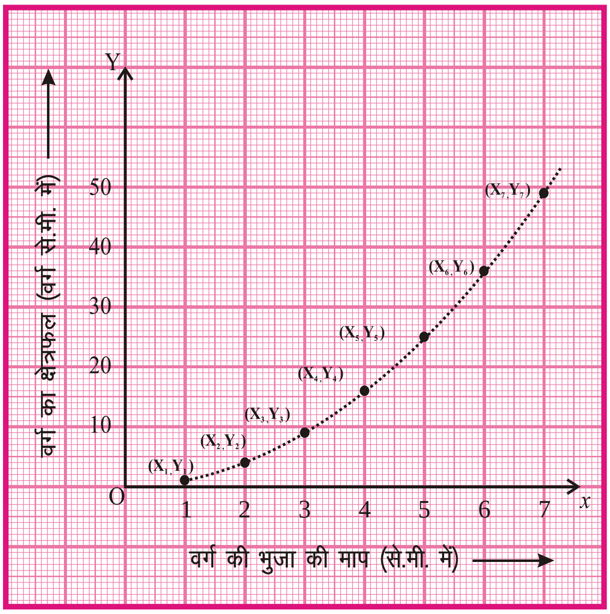


आलेख–05

आलेख 6 :– किसी वर्ग की एक भुजा की लंबाई में परिवर्तन करने पर प्राप्त हुए क्षेत्रफल को नीचे सारणी में दर्शाया गया है । इनकी सहायता से एक आलेख बनाइए ।

वर्ग की भुजा की माप (सेमी. में)	0	1	2	3	4	5	6	7
वर्ग का क्षेत्रफल (वर्गसेमी. में)	0	1	4	9	16	25	36	49

हल:– वर्ग की भुजा और उसके क्षेत्रफल के बीच खींचें गये आलेख को देखने पर यह पता चल रहा है कि भुजा की लंबाई बढ़ने पर क्षेत्रफल का मान भी बढ़ता है, किन्तु यहाँ सरल रेखा के स्थान पर ऊपर उठती हुई एक वक्र रेखा प्राप्त होती है।



आलेख–06

सोचें व चर्चा करें

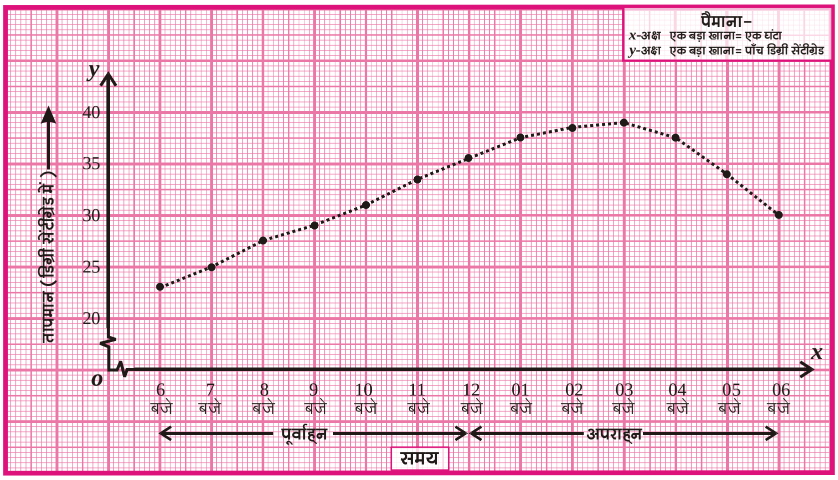
आलेख 5 व आलेख 6 में आपको क्या–क्या और अंतर दिख रहे हैं? चर्चा कीजिए।

आलेख 7 :– मार्च महीने के किसी दिन के सुबह 6 बजे से शाम 6 बजे तक का तापमान नीचे की सारणी में प्रदर्शित है–

समय	पूर्वाह्न							अपराह्न					
बजे	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6
ताप (^{0}C पर)	23	25	27.5	29	31	33.5	35.5	37.5	38.5	39	37.5	34	30

सारणी के आँकड़ों के आधार पर आलेख खींचिए।

हल:– यहाँ हम देख सकते हैं कि यह आलेख पहले खींचे गए आलेखों से अलग है। समय बढ़ने के साथ–साथ पहले तापमान बढ़ रहा है तथा एक समय के बाद कम भी हो रहा है।



आलेख–07

क्या आप इसका कारण सोच सकते हैं?

अपने साथियों से इस पर चर्चा कीजिए।

इस आलेख के आधार पर 5 निष्कर्ष लिखें।

आलेख 8 :– मूलधन 100 रुपये पर 10 प्रतिशत वार्षिक ब्याज दर से 1, 2, 3 व 4 वर्ष के लिए साधारण ब्याज ज्ञात कीजिए। समय व साधारण ब्याज के बीच आलेख बनाकर देखिए कि समय के साथ साधारण ब्याज में किस प्रकार परिवर्तन हो रहा है?

साथ ही निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

1. x अक्ष पर कौन सा आँकड़ा चुना।
2. y अक्ष पर कौन सा आँकड़ा चुना।
3. x अक्ष और y अक्ष पर आँकड़े दर्शाने के लिए आपने क्या पैमाना चुना?

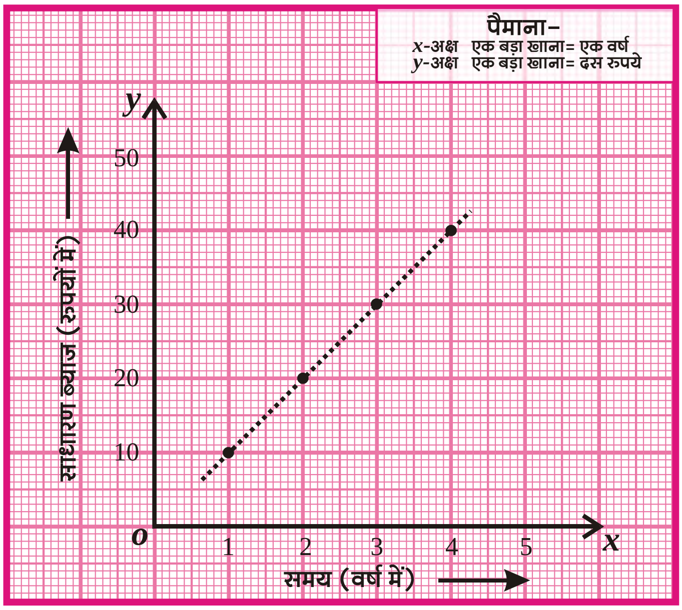
हलः– हमें दिया है –

मूलधन =100 रुपये, दर =10%

$$\text{साधारण ब्याज} = \frac{\text{मूलधन} \times \text{दर} \times \text{समय}}{100}$$

मूलधन व दर को स्थिर रखते हुए समय का मान 1, 2, 3 व 4 वर्ष रखने पर प्राप्त होने वाले साधारण ब्याज को निम्नानुसार सारणी में दर्शा सकते हैं–

समय (वर्ष में)	0	1	2	3	4
साधारण ब्याज (रुपये में)	0	10	20	30	40



आलेख–08

ग्राफ से हम कह सकते हैं कि जब मूलधन व दर स्थिर हों, तब समय बढ़ने के साथ साधारण ब्याज में भी निश्चित दर से परिवर्तन होता है।

x अक्ष पर समय (स्वतंत्र चर) y अक्ष पर साधराण ब्याज (आश्रित चर) चुना

पैमाना – x अक्ष पर 1 इकाई = 1वर्ष

y अक्ष पर 1 इकाई = 10 रु.

करके देखें

1. कुछ लोगों को क्रमशः 100रु., 200रु., 300रु., 400रु. 10% वार्षिक साधारण ब्याज की दर से उधार दिया गया। एक वर्ष बाद इनसे मिलने वाले ब्याज के लिए एक आलेख बनाइए।
2. अपनी कक्षा के 10 विद्यार्थियों की आयु महीनों में एवं उँचाई सेमी. में नोट कीजिए और आयु तथा उँचाई के आकड़ों को आलेख में दर्शाइए। क्या आलेख में आयु व उँचाई के बीच कोई निश्चित संबंध देख पा रहे हैं ?

अब तक बने आलेखों में आपने देखा कि कुछ में सरल रेखा और कुछ में वक्र रेखा प्राप्त हो रही है। क्या आप बता सकते हैं कि ऐसा क्यों हो रहा है ?

यह स्पष्ट है कि आलेख रेखा की आकृति उसमें निरूपित राशियों के बीच संबंध पर आधारित है। यही संबंध रेखा की आकृति को निर्धारित करता है। अब हम उन राशियों के बीच संबंध ढूँढते हैं।

आलेख क्रमांक 1 में,

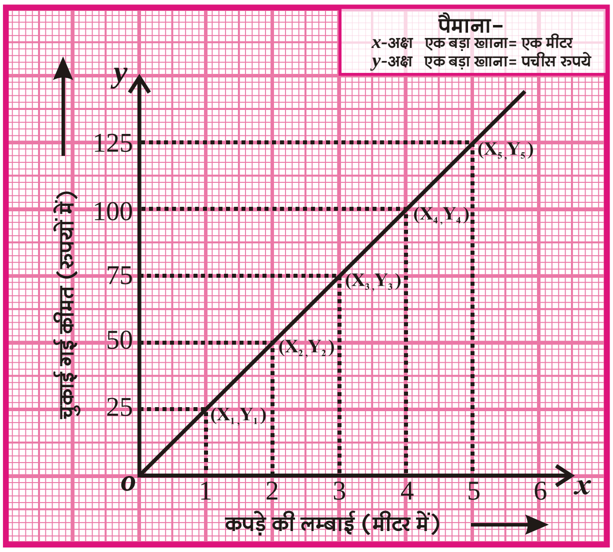
$X_1 \quad 1, \; X_2 \quad 2, \; X_3 \quad 3, \; X_4 \quad 4, \; X_5 \quad 5$

$Y_1 \quad 25, \; Y_2 \quad 50, \; Y_3 \quad 75, \; Y_4 \quad 100, \; Y_5 \quad 125$

यहाँ, $\dfrac{Y_2 \quad Y_1}{X_2 \quad X_1} \quad \dfrac{50 \quad 25}{2 \quad 1} \quad \dfrac{25}{1}$

$\dfrac{Y_3 \quad Y_2}{X_3 \quad X_2} \quad \dfrac{75 \quad 50}{3 \quad 2} \quad \dfrac{25}{1}$

$\dfrac{Y_5 \quad Y_4}{X_5 \quad X_4} \quad \dfrac{125 \quad 100}{5 \quad 4} \quad \dfrac{25}{1}$

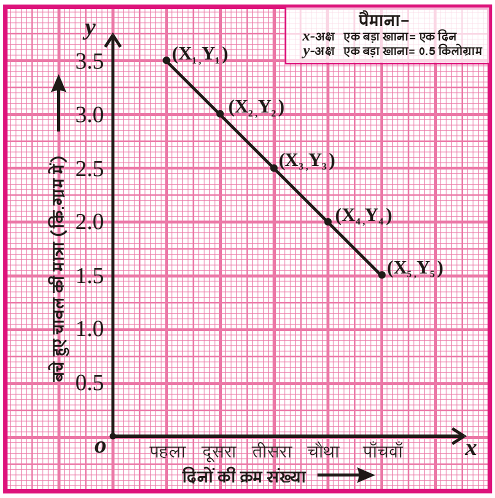


आलेख–01

आलेख क्रमांक 4 में,

$$\frac{Y_2 \quad Y_1}{X_2 \quad X_1} \quad \frac{3 \quad 3.5}{2 \quad 1} \quad 0.5$$

$$\frac{Y_3 \quad Y_2}{X_3 \quad X_2} \quad \frac{2.5 \quad 3.0}{3 \quad 2} \quad 0.5$$ ....इत्यादि

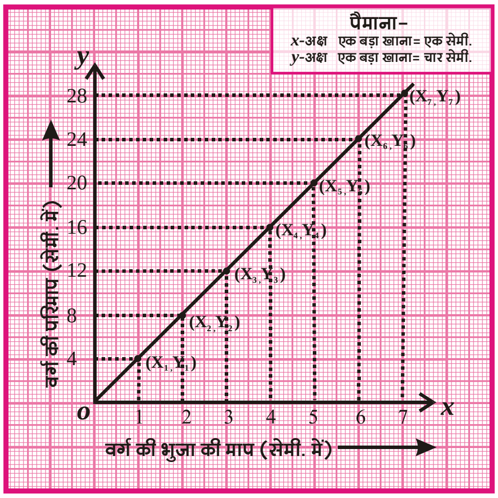


आलेख–04

आलेख क्रमांक 5 में,

$$\frac{Y_2 \quad Y_1}{X_2 \quad X_1} \quad \frac{8 \quad 4}{2 \quad 1} \quad 4$$

$$\frac{Y_3 \quad Y_2}{X_3 \quad X_1} \quad \frac{12 \quad 8}{3 \quad 2} \quad 4$$ ....इत्यादि



आलेख–05

हम देख रहे हैं कि आलेख 1, 4, 5 में से प्रत्येक में

$$\frac{Y_2 \quad Y_1}{X_2 \quad X_1} \quad \frac{Y_3 \quad Y_2}{X_3 \quad X_2}$$ ....नियत हैं और

इनके आलेख भी सरल रेखा हैं।

याने जहाँ भी आलेख में

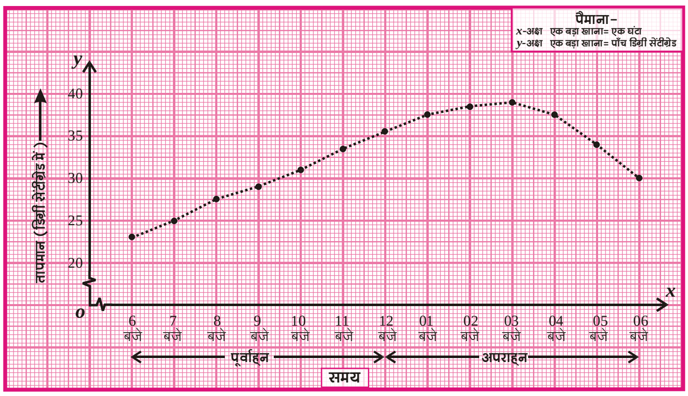
$$\frac{Y_2 \quad Y_1}{X_2 \quad X_1} \quad \frac{Y_3 \quad Y_2}{X_3 \quad X_2} \quad \frac{Y_4 \quad Y_3}{X_4 \quad X_3} \quad \cdots\cdots\cdots \quad \frac{Y_n \quad Y_{n\ 1}}{X_n \quad X_{n\ 1}}$$ नियत होंगे,

वहाँ आलेख सरल रेखा के रूप में होगा। इस प्रकार के आलेखों में राशियों के बीच के संबंध को रैखिक समीकरण ax by c या y mx c के रुप में दर्शा सकते हैं।

क्या आलेखों में भी इस प्रकार का कोई संबंध है?

आलेख क्रमांक–7 में हम देखते हैं कि–

$$\frac{Y_2 \quad Y_1}{X_2 \quad X_1} \quad \frac{25 \quad 23}{7 \quad 6} \quad \frac{2}{1}$$



आलेख–07

$$\frac{Y_3 \quad Y_2}{X_3 \quad X_2} \qquad \frac{27.5 \quad 25}{8 \quad 7} \qquad \frac{2.5}{1}$$

$$\frac{Y_4 \quad Y_3}{X_4 \quad X_3} \qquad \frac{29 \quad 27.5}{9 \quad 8} \qquad \frac{1.5}{1}$$

------------------------------ इत्यादि।

स्पष्ट है कि

$$\frac{Y_2 \quad Y_1}{X_2 \quad X_1} \quad \frac{Y_3 \quad Y_2}{X_3 \quad X_2} \quad \frac{Y_4 \quad Y_3}{X_4 \quad X_3} \cdots\cdots\cdots$$

इसी प्रकार का संबंध आप आलेख क्रमांक 6 में भी देख सकते हैं।

इन दोनों उदाहरणों में

$$\frac{Y_2 \quad Y_1}{X_2 \quad X_1}, \frac{Y_3 \quad Y_2}{X_3 \quad X_2}, \frac{Y_4 \quad Y_3}{X_4 \quad X_3} \cdots\cdots\cdots$$ नियत नहीं हैं।

इसलिए इन उदाहरणों में आलेख सरल रेखा नहीं है।

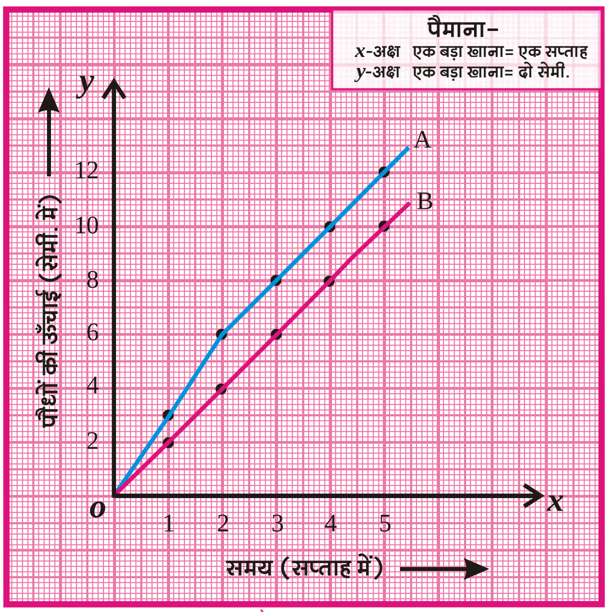
करके देखें

अपने विद्यालय के बगीचे के कुछ पौधों की लंबाई को 10 सप्ताह तक कापी में नोट कीजिए और प्राप्त आँकड़ों से आलेख खींचकर यह देखिए कि पौधों की लंबाई में किस प्रकार से परिवर्तन हुए हैं?

विभिन्न परिस्थितियों में बने आलेख को पढ़ना

अब हम विभिन्न उदाहरणों की सहायता से आलेख को पढ़ना, समझना और उसका विश्लेषण करना सीखेंगे।

उदाहरण:–1. दो गमलों A और B में दो अलग अलग प्रकार के पौधे लगाए गए हैं जिनकी ऊँचाइयाँ 5 सप्ताह तक हर सप्ताह के अंत में मापी गईं। इन मापों को नीचे आलेख में दर्शाया गया है। आलेख की सहायता से निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए –



आलेख–09

(i) पाँचवें सप्ताह के अंत में दोनों गमलों के पौधों की ऊँचाई बताइए।

(ii) कौन से सप्ताह में गमले A के पौधे की ऊँचाई में सबसे अधिक बढ़ोतरी हुई और कितनी?

(iii) चौथे सप्ताह के अंत में गमले B के पौधे की ऊँचाई कितनी थी?

हलः– आलेख में हम देख पाते हैं कि –

(i) पाँचवें सप्ताह के अंत में गमले A के पौधे की उँचाई 12 सेमी. और गमले B के पौधे की ऊँचाई 10 सेमी. थी।

(ii) दूसरे सप्ताह में गमले A के पौधे की ऊँचाई में 3 सेमी. की बढ़ोतरी हुई। यह बाद के किसी अन्य सप्ताह में हुई बढ़ोतरी से ज्यादा थी।

(iii) चौथे सप्ताह के अंत में गमले B के पौधे की ऊँचाई 8 सेमी. थी।

उदाहरणः–2. एक 20–20 क्रिकेट मैच के दौरान दो टीमों A और B के द्वारा बनाए गए रनों को निम्नांकित आलेख में प्रदर्शित किया गया है–

आलेख की सहायता से निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए–

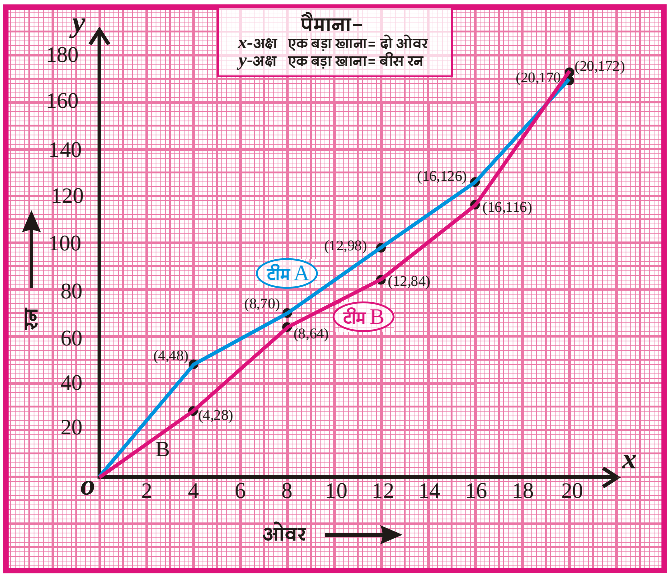
(i) टीम A ने 16 ओवर तक कितने रन बनाए?

(ii) किस अंतराल के दौरान टीम A और टीम B के रन बनाने की दर सबसे अधिक थी ?

(iii) किस अंतराल के दौरान टीम A और टीम B के रन बनाने की दर सबसे कम थी ?

(iv) 8 वें ओवर के पश्चात टीम A और B के रनों में कितना अंतर था?

(v) आलेख को देखकर बताइए कौन सी टीम विजयी हुई।



आलेख–10

हलः–

(i) टीम A ने 16 ओवर में 126 रन बनाए।

(ii) 16 से 20 ओवर के अंतराल में टीम A और टीम B के रन बनाने की दर सबसे अधिक थी।

(iii) 4 से 8 ओवर के अंतराल में टीम A के रन बनाने की दर सबसे कम थी तथा टीम B के रन बनाने की दर 8 से 12 ओवर के अंतराल में सबसे कम थी।

(iv) 8 वें ओवर के पश्चात टीम A और B के द्वारा बनाए गए रनों में 6 रन का अंतर था।

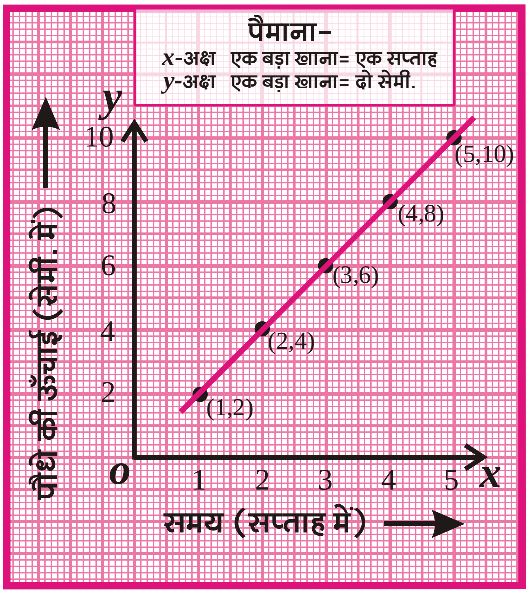
(v) आलेख से स्पष्ट है कि इस मैच में टीम B विजयी हुई।

करके देखें

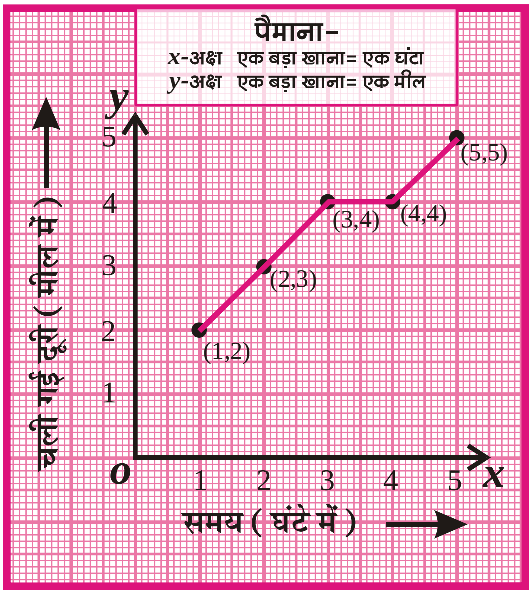
आप भी अपने मित्रों के साथ खेले गए क्रिकेट मैच में बनाए गए रनों को आलेख पर दर्शाइए।

प्रश्नावली 1

1. uhps fn, x, nks vkys[kksa dks ns[kdj crkb, fd D;ksa vkys[k (A) सरल रेखा तथा आलेख (B) वक्र रेखा के रुप में है?



आलेख–(A)



आलेख–(B)

(i) आलेख (A) से क्या निष्कर्ष निकाले जा सकते हैं?

(ii) यह निष्कर्ष आलेख (B) से प्राप्त निष्कर्ष से किस तरह अलग है?

ELEF8P

2. एक व्यक्ति ने अपनी गाड़ी में 5 लीटर पेट्रोल भरवाया। पाँच दिनों में बचे हुए पेट्रोल की मात्रा व दिनों को निम्नांकित सारणी में दर्शाया गया है –

दिन	1	2	3	4	5
बचे हुए पेट्रोल की मात्रा (ली. में)	4	3	2	1	0

बचे हुए पेट्रोल की मात्रा व दिनों के मध्य आलेख खींचिए।

3. मूलधन 300 रुपये पर 5 प्रतिशत वार्षिक ब्याज दर से 1, 2, 3, 4 व 5 वर्ष के लिए साधारण ब्याज निम्न सारणी में प्रदर्शित है।

समय (वर्ष में)	0	1	2	3	4	5
साधारण ब्याज (रुपये में)	0	15	30	45	60	75

समय व साधारण ब्याज के बीच आलेख खींचिए।

4. x के विभिन्न मानों के लिए x^2 का मान ज्ञात करके x और x^2 के मानों के बीच एक आलेख खींचिए। x का मान -4 से +4 पूर्णांक संख्याएँ हैं।

5. एक परिवार में 5 सप्ताह तक उपयोग किए गए प्याज की मात्रा किग्रा. में निम्न सारणी में दी गई है–

सप्ताह	1	2	3	4	5
प्याज की मात्रा (किग्रा. में)	1	2	3	4	5

सप्ताह एवं उपयोग किए गए प्याज की मात्रा के बीच आलेख खींचिए ।

6. एक विज्ञान पत्रिका में छपे लेख के अनुसार किसी स्थान विशेष पर रहने वाली चींटियों की चाल पर तापमान का प्रभाव पड़ता है । यदि किसी स्थान पर रहने वाली चींटियों की चाल व उस स्थान के ताप के बीच के संबंध को समीकरण $s \quad \frac{t \quad 20}{5}$ से प्रदर्शित किया गया हो जहाँ t ताप (C) में व s चाल (सेमी. प्रति सेकण्ड) है। तब चींटियों की चाल $t \quad 25^o, 30, 35^o, 40$ रखते हुए तापमान व चाल में दर्शाने वाले संबंध को आलेख में प्रदर्शित कीजिए तथा निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए –

1. x अक्ष पर कौन सा आँकड़ा चुना।
2. y अक्ष पर कौन सा आँकड़ा चुना।
3. x अक्ष और y अक्ष पर आँकड़े दर्शाने के लिए आपने क्या पैमाना चुना?
4. जहाँ चींटियों की चाल 2.5 सेमी. प्रति सेकण्ड है उस स्थान का तापमान क्या है?
5. यदि तापमान $30^\circ C$ से $40^\circ C$ हो जाए तो चींटियों की चाल में कितना परिवर्तन होगा ?

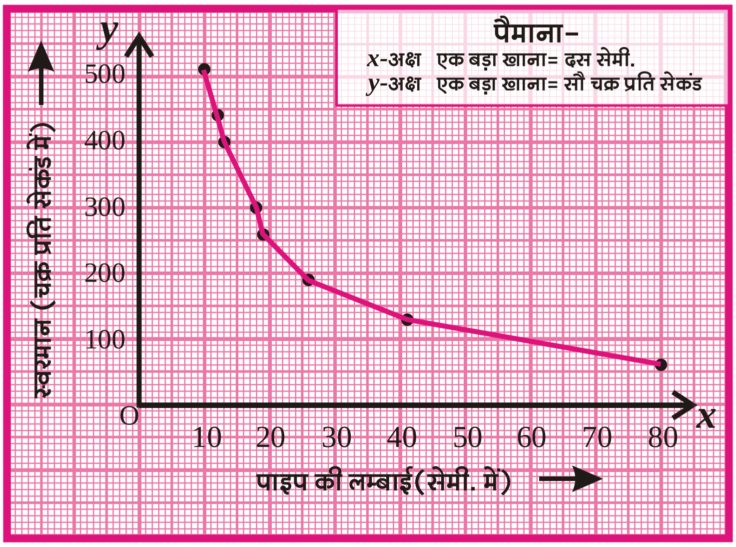
7. अनीता ने अलग–अलग लंबाइयों की पाइप से वाद्य यंत्र बनाए हैं। पाइप की लंबाई (सेमी.) व ध्वनि का स्वर मान (Pitch) (चक्र प्रति सेकण्ड) के बीच गणितीय संबंध को निम्नांकित सारणी व आलेख में प्रदर्शित किया गया है–

ध्वनि का स्वर मान (चक्र प्रति सेकण्ड में)	64	128	192	261	300	395	438	512
पाइप की लंबाई (सेमी.में)	80	41	26	19	18	13	12	10

आलेख को देखकर निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए –

(i) 160 चक्र प्रति सेकण्ड के लिए पाइप की लंबाई कितनी रखानी चाहिए ?

(ii) 60 सेमी. लंबी पाइप का स्वरमान कितना होगा ?



8. नीचे A और B दो सारणियाँ दी गई हैं उनमें प्रदर्शित राशियों के मध्य आलेख खींचिए और जाँचिए कि क्या उनमें $\frac{Y_2}{X_2}\ \frac{Y_1}{X_1}$ नियत है ?

सारणी A

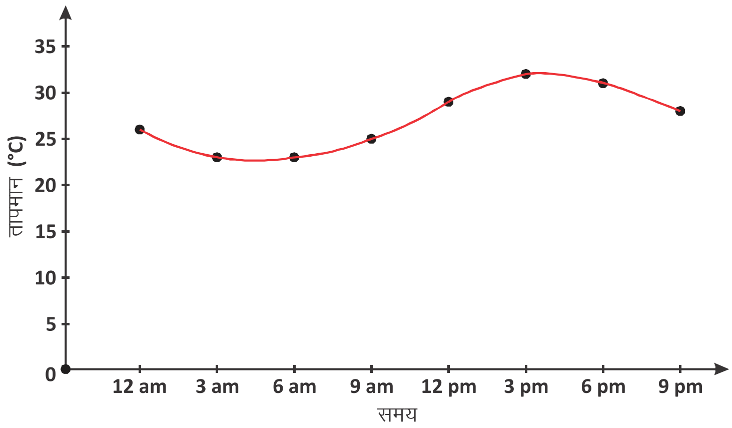
	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
वृत्त की त्रिज्या r(सेमी. में)	2	4	6	8	10
वृत्त की परिधि 2 r (सेमी.में)	4	8	12	16	20
	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5

सारणी B

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
वृत्त की त्रिज्या r(सेमी. में)	1	2	3	4	5
वृत्त का क्षेत्रफल A r^2 (वर्ग सेमी. में)		4	9	16	25
	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5

9 किसी शहर में एक दिन में दर्ज तापमान के आँकड़े ग्राफ द्वारा दर्शाए गए हैं।

दिए गए ग्राफ के आधार पर निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए–



(i) सुबह 6 बजे शहर का तापमान कितना था?

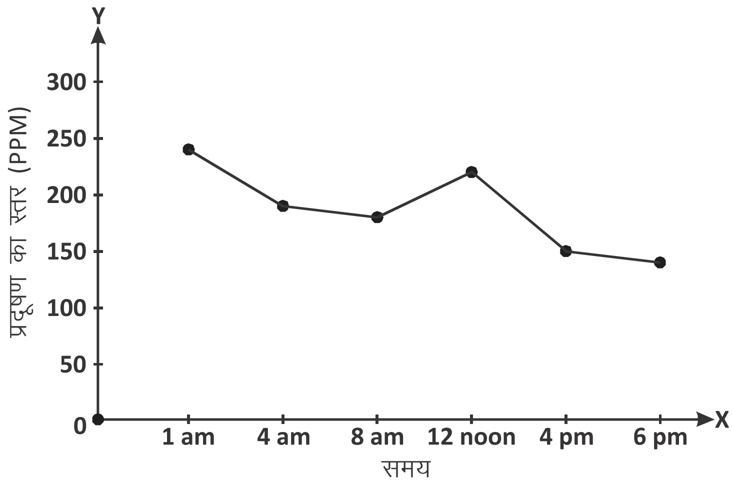
(ii) दोपहर बाद 3 बजे का तापमान कितना था?

(iii) किस समय दिन का तापमान 30 डिग्री था?

(iv) आधी रात 12 बजे तापमान कितना रहा होगा?

(v) रात 9 बजे तापमान कितना रहा होगा?

10 एक शहर में किसी पूरे दिन वायु के प्रदूषण का स्तर नापा गया। इसे ग्राफ द्वारा प्रदर्शित किया गया है–दिए हुए ग्राफ द्वारा निम्नलिखित सवालों के जवाब खोजिए।



(i) सुबह 8 बजे प्रदूषण का स्तर कितना पाया गया?

(ii) प्रदूषण स्तर सबसे अधिक किस समय दर्ज किया गया?

(iii) दोपहर बाद 4 बजे प्रदूषण का स्तर कितना था?

(iv) दोपहर 12 बजे से शाम 6 बजे तक प्रदूषण में कितना अन्तर आया?

(v) रात 1 बजे से सुबह 4 बजे तक प्रदूषण में कितनी गिरावट आई?

हमने सीखा

1 आलेख के माध्यम से किन्हीं दो राशियों के बीच के संबंध को देखना।

2. दिए गए आँकड़ों से आलेख बनाना। इसके लिए कौन सी राशि किस अक्ष पर रहेगी यह चुनना। अक्ष पर पैमाना कैसे समझेंगे और चुनेंगे।

3. विभिन्न परिस्थितियों में बने आलेखों को पढ़ना।

4. आलेख में दी गई जानकारी से निष्कर्ष निकालना।

अध्याय

08

cfdx ,o djkèkku

BANKING AND TAXATION

ELNBAC

ifjp; (Introduction) &

xkdy viu dN nkLrk l ckrA dj jgk FkkA mue ppk py jgh Fkh fd mud ifjokj gj ekg dN jkf'k cpk ikr gA ml jkf'k dk dgk j[k ftl l og l jf{kr jg o dHkh&dHkh t :jr iMu ij fey Hkh tk,A

ekgu & e> rk yxrk g fd ,d cpr [kkrk [kky ykA

vtey & ml l rk vPNk g fd vkorh tek [kkrk [kky yk] vf/kd C;kt feyxkA

uj'k & ij ml e rk gj ekg dN tek djuk gkxkA

xkdy & ,lk rk vxy dN eghuk rd ge dj gh ldr gA

vtey & fQj rk Bhd g] gj eghu ,d fu;r jkf'k de l de 6 eghu rd tek djr jgkA

xkdy & fdruh jkf'k] dgk tek djkÅ vkj 6 eghu gh djuk g D;k\

uj'k & ugh 10 o"k rd dj ldr gk vkj cd ;k ikLV vkfQl dgh HkhA ;gh ugh] re pkgk rk ,d l vf/kd [kkr [kky ldr gkA ;g /;ku jg fd jkf'k 10 #i, d x.kd e gh yuh gkxhA

xkdy & bldk D;k Qk;nk\

uj'k & bl C;kt dh nj vf/kd g] ftru yc le; rd djkxk mruh vf/kdA

jkd'k & vkj vxj chp e ilk pkfg, ;k fd'r u gk rk\

uj'k & gj lky dN jkf'k rk fudky ldr g ghA fd'r u nu ij D;k gkxk] ;g cd l irk djuk gkxkA gk] vxj [kkrk cn djuk iM rk C;kt e dN dVkrh dj 'k"k jkf'k vki dk fey tk,xhA

xfjek & bl l vfèkd C;kt çkIr dju d fy, D;k d¨Ã vU; [kkrk [k¨yk tk ldrk g\

jkd'k & gk] lkofèk tek [kkrk [k¨yk tk ldrk gA yfdu bl e ,d fuf'pr vofèk d fy, iSlk tek djuk g¨rk gA

xfjek & ;g ge dl r; dj fd viuh cpr jkf'k fdl [kkr e tek dj\

jkd'k & ;fn fudV Òfo"; e cpr jkf'k d mi;¨x dh fo'k"k vko';drk ugh gk] r¨ bl lkofèk tek [kkr e tek dj ldr gA

djd n[k

vkiu fiNyh d{kkvk e lk/kkj.k C;kt d ckj e i<k gA vkb, dN loky gy djd cpr [kkr] vkorh tek [kkr vkj lkof/k tek [kkr d vrj dk FkkMk vkj le>r gA

1- eg'k viu cpr [kkr e 300 #- 3 ekg d fy, tek djrk g rFkk ,drk 100 #- çfrekg dh nj l 3 ekg e vkorÊ tek [kkr e 300 #- tek djrh gA ;fn

¼d½ cpr [kkr e C;kt dh nj 4% okf"kd rFkk vkorÊ tek [kkr e C;kt dh nj 6% okf"kd g¨ r¨ fdl vfèkd C;kt feyxk\

¼[k½ n¨u¨ [kkrk e C;kt dh nj 6% g¨ r¨ D;k feyu oky C;kt e dkb vrj gkxk] gk rk mldk dkj.k D;k g\

2- euh"kk 2000 #- viu cpr [kkr e 2 o"k d fy, tek djrh g ftl ij ml 4% dh nj l okf"kd C;kt feyrk g ijUrq j¨gu 2000 #- 2 o"k d fy, viu lkofèk tek [kkr e tek djrk g ftl ij ml 8% dh nj l okf"kd C;kt feyrk g r¨ n¨u¨ d [kkr¨ e 2 o"k d vr e fdruk C;kt feyxk\

rhuk [kkrk e vrj dk ge l{ki e bl rjg n[k ldr g&

tc gekj ikl iSlk g vkj vkx dHkh Hkh t:jr iM ldrh g rc ge ml cpr [kkr e tek djr gA tcfd lkofèk tek [kkr e ge rc tek djr g tc ge ;g yxrk g fd vku oky Ng eghu] lky&nk lky ;k fdlh fuf'pr vofèk rd ml iSl dh t:jr ugh iMxhA

cpr [kkr e tek jkf'k tekdrk }kjk dHkh Hkh fudkyh tk ldrh g blfy, cd ml jkf'k dk mi;kx ugh djrk rFkk ml tek jkf'k ij C;kt dh nj de gkrh g] fdr lkofèk tek [kkr e tek jkf'k d fy, cd vk'oLr gkrk g fd og ml vofèk d fy, ml jkf'k dk mi;kx dgh dj ldrk g blfy, bl ij C;kt dh nj vfèkd gkrh gA vkorh tek [kkrk mDr nkuk [kkrk l bl ckr e vyx g fd ble tekdrk d ikl 'k: e vfèkd èku ugh gkrkA mld ikl cpr dh FkkMh jkf'k g vkj og fujrj bruh jkf'k fdlh fuf'pr vofèk e tek dj ldrk gA ,lh fLFkfr e vkorh tek [kkrk ,d mi;Dr fodYi gkrk gA bldh C;kt nj cpr [kkr l vfèkd gkrh g D;kfd vkorh tek [kkrk Hkh fdlh fuf'pr vofèk d fy, gkrk gA

vkb, vkorh tek [kkr d C;kt dh x.kuk dk fuEu mnkgj.kk }kjk le>

mnkgj.kk&1- lr"k dekj u NÙkhlx< fodkl cd e 100 #- dk ekfld vkorÊ tek [kkrk 6 ekg d fy, [kyykA ;fn C;kt dh nj 6% okf"kd g r 6 ekg i'pkr mls fdruh ifjiDork jkf'k çkIr gxh\

gy& ¼i½ 100 #- dk 6 ekg dk 6% dh nj l C;kt ¼çFke fd'r dk C;kt½

$$= \frac{100 \times 6 \times 6 \times \frac{1}{12}}{100}$$

¼ii½ 100 #- dk 5 ekg dk 6% dh nj l C;kt ¼f}rh; fd'r dk C;kt½

$$= \frac{100 \times 6 \times 5 \times \frac{1}{12}}{100}$$

¼iii½ 100 #- dk 4 ekg dk 6% dh nj l C;kt ¼rrh; fd'r dk C;kt½

$$= \frac{100 \times 6 \times 4 \times \frac{1}{12}}{100}$$

¼iv½ 100 #- dk 3 ekg dk 6% dh nj l C;kt ¼prFk fd'r dk C;kt½

$$= \frac{100 \times 6 \times 3 \times \frac{1}{12}}{100}$$

¼v½ 100 #- dk 2 ekg dk 6% dh nj l C;kt ¼ikpoh fd'r dk C;kt½

$$= \frac{100 \times 6 \times 2 \times \frac{1}{12}}{100}$$

¼vi½ 100 #- dk 1 ekg dk 6% dh nj l C;kt ¼NBoh fd'r@vfre fd'r dk C;kt½

$$= \frac{100 \times 6 \times 1 \times \frac{1}{12}}{100}$$

dy C;kt ¾

$$\left[\frac{100\times6\times6\times\frac{1}{12}}{100}+\frac{100\times6\times5\times\frac{1}{12}}{100}+\frac{100\times6\times4\times\frac{1}{12}}{100}+\frac{100\times6\times3\times\frac{1}{12}}{100}+\frac{100\times6\times2\times\frac{1}{12}}{100}+\frac{100\times6\times1\times\frac{1}{12}}{100}\right]$$

$$=\frac{100\times6\times\frac{1}{12}}{100}[6+5+4+3+2+1]$$

$$=\frac{100\times6\times\frac{1}{12}}{100}[1+2+3+4+5+6]$$

$$=\frac{100\times6\times\frac{1}{12}\times6\times7}{100\times2}$$ ¼lekUrj J<h d ;kx l= l½

$$=\frac{21}{2}\quad=10.50\,\#$$

6 ekg ckn çkIr dy jkf'k ¾ 100×6 $ 10-50 ¾ 610-50 #-

mnkgj.k&2- ;fn P #- ekfld vkorÊ tek [kkr e *r%* okf"kd C;kt dh nj l *n* ekg rd tek fd;k tkrk g] rk *n* ekg i'pkr vkorh tek [kkr e iklr C;kt dh x.kuk dhft,A

gy & P #- dk *n* ekg ckn *r%* dh nj l C;kt ¼çFke fd'r dk C;kt½

$$=\frac{p\times r}{100}\times\frac{n}{12}$$ ¼D;¨fd ;g èku *n* ekg rd jgrk gA½

P #- dk (*n*-1) ekg ckn *r%* dh nj l C;kt ¼f}rh; fd'r dk C;kt½

$$=\frac{P\times r}{100}\times\frac{n-1}{12}$$ ¼D;¨fd ;g èku *n*-1 ekg rd jgrk g½

P #- dk (*n*-2) ekg ckn *r%* dh nj l C;kt ¼rrh; fd'r dk C;kt½

$$=\frac{P\times r}{100}\times\frac{n-2}{12}$$ ¼D;¨fd ;g èku *n*-2 ekg rd jgrk g½

----

bl h çdkj] P #- dk vfre ekg l io ekg ckn [vFkkr *n-(n-2)=2* ekg ckn] *r%* dh nj l C;kt ¼vfre l io fd'r dk C;kt½

$$= \frac{P\times r}{100}\times\frac{2}{12}$$ ¼D;¨fd ;g èku 2 ekg rd jgrk g½

P #- dk vfre ekg dk *r%* dh nj l C;kt ¼vfre fd'r dk C;kt½

$$= \frac{P\times r}{100}\times\frac{1}{12}$$ ¼D;¨fd ;g èku 1 ekg rd jgrk g½

dy C;kt $$= \frac{P\times r}{100}\times\frac{1}{12}\left[n+(n-1)+(n-2)+.........+2+1\right]$$

$$= \frac{P\times r}{100}\times\frac{1}{12}\left[1+2+3.......+(n-1)+n\right]$$

$$= \frac{P\times r}{100}\times\frac{1}{12}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]$$ ¼D;kfd lekrj J.kh e gA½

∴ vkorh tek [kkr e tek /ku jkf'k dk dy C;kt $= \frac{P\times r}{100}\times\frac{1}{12}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]$

tgk $P =$ ekfld fd'r jkf'k] $r =$ C;kt dh nj rFkk ·

$n =$ ekfld fd'rk dh dy l[;k

vkb, vc lkofèk tek [kkr d C;kt dh x.kuk dk fuEu mnkgj.kk }kjk le>

bl [kkr e tek èku ij pØof) C;kt n; g¨rk g ftldk l= fuEu idkj g&

$$A = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$$

tgk $A =$ feJèku] $P =$ eyèku] $r =$ C;kt dh nj rFkk $n =$ le;

x.kuk e yÄx.kd dk Òh ç;¨x fd;k tk ldrk gA

mnkgj.k& 3- fuf[ky xkeh.k cd e 1 o"k 6 ekg d fy, 10]000 #- lkofèk tek [kkr e tek djrk gSA ; fn C;kt dh nj 8% çfro"k g rFkk mldk l;¨tu v)okf"kd g¨] r¨ fuf[ky d lkofèk tek [kkr e tek jkf'k dk ifjiDork eY; Kkr dhft,A

gy& fn;k g] eyèku $P =$ 10]000 #-]nj = 8% okf"kd = 4% v)okf"kd

le;] $n =$ 1 o"k 6 ekg = 3 v)o"k

feJèku $A =$ \

∵ feJèku $$A = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$$ l] vr% feJèku $A = 10000\left(1+\frac{4}{100}\right)^3$

$$A = 10000\left(1+\frac{1}{25}\right)^3$$

$$A = 10000\left(\frac{26}{25}\right)^3$$

$$A = 10000 \times \frac{26}{25} \times \frac{26}{25} \times \frac{26}{25}$$

$A = 11248.64$ #i;

vr% fuf[ky d¨ n; ifjiDork eY; 11248-64 #i; gA

mnkgj.k&4- e¨gu u Ñf"k fodkl cd e 50]000 #i; 2 o"k d fy, lkofèk tek [kkr e tek fd,A ;fn C;kt dh nj 10% okf"kd g¨ rFkk C;kt çfr Nekgh ckn l;¨ftr fd;k tkrk gk] r¨ ifjiDork ij cd m l fdruh èkujkf'k nxk\

gy% fn;k g] eyèku $P =$ 50]000 #-

C;kt dh nj r = 10% okf"kd = 5% v)okf"kd

le; $n = 2$ o"k = 4 Nekgh]

r¨ feJèku $A =$ \

$A = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$ l]

vr% feJèku $A = 50000\left(1+\frac{5}{100}\right)^4$

$$A = 50000\left(1+\frac{1}{20}\right)^4$$

$$A = 50000\left(\frac{21}{20}\right)^4$$

$$A = 50000 \times \frac{21}{20} \times \frac{21}{20} \times \frac{21}{20} \times \frac{21}{20}$$

$A = 60775.31$ #i;

bl çdkj e¨gu d¨ 2 o"k i'pkr ifjiDork jkf'k 60775-31 #i; çkIr g¨xhA

i'ukoyh 1

1. djhe Òkjrh; LVV cd e 150 #- çfrekg dh nj l 2 o"k rd vkorÊ tek [kkrk e fuo'k djrk gA ;fn C;kt dh nj 5% okf"kd g¨ r¨ ml 2 o"k ckn fdruh èkujkf'k cd }kjk Òxrku dh tk,xh\
2. j'kek u i tkc u'kuy cd e 200 #- çfrekg dh nj l 5 o"k d fy; vkorÊ tek [kkrk [k¨ykA ;fn C;kt dh nj 6% okf"kd g¨] r¨ 5 o"k i'pkr ml fdruh èkujkf'k çkIr g¨xh\
3. j¨gu u MkdÄj e 50 #- çfrekg dh nj l 5 o"k d fy, vkorÊ tek [kkrk [k¨ykA 5% okf"kd C;kt dh nj l ml fdruk èku feyxk \
4. ineuh u ftyk lgdkjh cd e 100 #i; çfrekg dk 10 o"k d fy; vkorÊ tek [kkrk [k¨ykA ;fn bUg cd }kjk C;kt dh jkf'k 3025 #- çnku dh tkrh g] r¨ C;kt dh nj fdru çfr'kr okf"kd g¨xh\
5. fd'ku u ,d cd dh 'kk[kk e rhu o"k d fy, 250 #i; çfrekg dk ,d vkorÊ tek [kkrk [k¨yk r¨ 5% okf"kd C;kt dh nj l ml cd }kjk fdruh èkujkf'k çkIr g¨xh \
6. jtr u lVy cd v,Q bfM;k dh ,d 'kk[kk e 100 #i; çfrekg dh nj l rhu o"k d fy, vkorÊ tek [kkrk [k¨ykA fdru çfr'kr okf"kd C;kt dh nj l ml 222 :i; C;kt feyxk\
7. fd'ku bykgkckn cd e lkofèk tek d :i e 20]000 #- 1 o"k d fy, 16% okf"kd C;kt dh nj l tek djrk gA ;fn C;kt frekgh l;¨ftr g¨rk g] r¨ ifjiDork d i'pkr fd'ku d¨ fdruh èkujkf'k çkIr g¨xh\
8. gepj.k xkeh.k cd e 1]00]000 #i; 1 o"k 6 ekg d fy, 8% okf"kd C;kt dh nj l lkofèk tek djrk g] ;fn C;kt frekgh l;¨ftr g¨rk g] r¨ ifjiDork frfFk ij fdruh èkujkf'k çkIr g¨xh\
9. ,d 0;fDr lkofèk tek [kkrk e 4% okf"kd C;kt dh nj l 2 o"k d fy, 2 yk[k #- fuo'k djrk g] r¨ ml ifjiDork d le; fdruh èkujkf'k çkIr g¨xh] ;fn C;kt okf"kd l;¨ftr g¨rk g\
10. fuy'k cd v,Q bfM;k e 50 gtkj #i; dk 1 o"k d fy, 8% okf"kd C;kt dh nj l lkofèk tek [kkrk [k¨yrk gA ;fn C;kt frekgh l;¨ftr fd;k tkrk g r¨ ml ,d o"k i'pkr fdruh jkf'k dk Òxrku cd }kjk fd;k tk,xkA
11. i"ik u 60 gtkj #i; d¨ 1 o"k 6 ekg d fy, lkofèk tek [kkr e fuo'k fd;kA ifjiDork frfFk ij fdru èku dh çkfIr g¨xh ;fn C;kt dh nj 12% okf"kd g¨ rFkk C;kt çfr 6 ekg d ckn l;¨ftr fd;k tkrk gA
12. Jhjke u 20]000 #- 2 o"k d fy, lkofèk tek [kkr e tek djk;kA ;fn C;kt dh nj 6% okf"kd g¨ rFkk C;kt Nekgh l;¨ftr g¨rk g r¨ fu;r frfFk i'pkr feyu okyh èkujkf'k fdruh g¨xh\

mÙkjekyk&1

1- 3787-50 #-	2- 13830 #-	3- 3381-25 #-	4- 5%
5- 9693-75 #-	6- 4%	7- 23]397-17 #-	8- 1]12]616-24 #-
9- 2]16]320-00 #-	10- 54121-60 #-	11- 71]460-96 #-	12- 22510-17 #-

djk/kku [TAXATION]

EY2JQH

ifjp; (Introduction)

Hkkjr ljdkj tudY;k.k d fy; cgr l dke djrh gA bld fy; ml èku dh vko';drk iMrh gAD;k vki crk ldr g fd ljdkj bu lc dk;¨ d¨ ijk dju d fy; èku dgk l çkIr djrh g\

ljdkj èku çkIr dju d fy, vk;dj] lokdj] fcØh dj vkfn d :i e turk ij dj yxkrh gA ; dj io fuèkkfjr g¨rh gA

Ikp ,o ppk dj

ljdkj bld vfrfjDr fodkl d dk;¨ d¨ i.k dju d fy; v©j viu [kpk dh ifr gr dgk&dgk l /ku çkIr djrh g \

vki tkur g fd vk;dj D;k g\

Hkkjr ljdkj dk fofHkUu lkrk l ikIr gku okyh dy vk; dk ,d cMk fgLlk vk;dj l ikIr jkf'k gkrh gA ljdkj vk;dj ikIr dju d fy, vk;dj dh U;wure lhek fu/kkfjr djrh gA bl lhek l vf/kd vk; ikIr dju oky 0;fDr;k] difu;k ;k m|kxk dk vk;dj nuk gkrk gA yfdu U;wure lhek l de vk; ikIr dju oky 0;fDr;k]difu;k ;k m|kxk dk vk;dj ugh nuk iMrkA vk; d fofHkUu Lrjk d fy, ljdkj }kjk vk;dj dh nj fu/kkfjr dh tkrh g ftld vulkj vk;dj dk Hkxrku djuk iMrk g ijUr dN fo'k"k Jf.k;k e vku oky 0;fDr;k]difu;k ;k m|kxk dk vk;dj e NV nh tkrh gA vk;dj dh nj vk; d lkFk&lkFk c<rh tkrh gA ;g c<h nj fuf'pr Lrj l vf/kd vk; ij yxrh gA 0;fDr;k] difu;k ;k m|kxk d vk; d ,d ;k ,d l vf/kd lk/ku gk ldr g vrk mu lHkh lk/kuk l ikIr vk; ij x.kuk }kjk ikIr dj dk ;kx gh vk;dj gA dHkh&dHkh bl vk;dj ij ljdkj fo'k"k ik;ktukvk d fy, FkkMk lk vfrfjDr dj yxk nrh g ftl midj ¼Cess½ dgk tkrk gA vk;dj dh lhek d vUrxr vku oky iR;d 0;fDr]diuh ;k m|kx dk vk;dj vfuok;r% pdkuk pkfg, A

D;k vk;dj tek dju d fy; vk;djnkrk d [kkr dh d¨Ã l[;k ¼Account Number½ g¨rh g

Hkkjr ljdkj }kjk xfBr vk;dj foHkkx vk;djnkrkvk l vk;dj ikIr djrk gA vc i'u ;g mBrk g fd vk;djnkrkvk dh igpku vk;dj foHkkx dl djrk g \ vk;djnkrkvk dh igpku d fy, vk;dj foHkkx }kjk iR;d 0;fDr] lLFkk ;k diuh dk ,d igpku l[;k nh tkrh g ftl LFkk;h [kkrk l[;k (Permanent Account Number ;k PAN) vFkok vLFkk;h [kkrk l[;k (Temporary Account Number ;k TAN) dgk tkrk gA cdk e [kkrk [kkyu d fy, PAN dk vfuok;Z fd;k tkrk g rkfd vk;dj foHkkx dk [kkrkèkkjdk d vk; dh tkudkjh gk ldA

;g vk;dj fdl vofèk d fy; ,o fdl nj ij yxk;k tkrk g

fdlh 0;fDr] diuh ;k m|kx dk 1 vçy l 31 ekp rd dh vofèk e vk; d leLr lkrk l tk vk; gkrh g mlh ij ml vk;dj dk Hkxrku djuk gkrk gA bl vofèk d" foÙkh; o"k dgr gA vk;dj x.kuk d fy, ljdkj }kjk vk;dj dh nj fu/kkfjr dh tkrh g tk foÙkh; o"k d vulkj cnyrh jgrh gA

½1½ vkb, foxr rhu o"kk dh vk;dj njk dh rkfydk dk voykdu dj ftle vk;dj dh x.kuk nj le; vulkj ifjofrr gb g &

foRrh; o"k	i:"k		efgyk		ofj"B ukxfjd	
	vk; lhek	vk;dj nj	vk; lhek	vk;dj nj	vk; lhek	vk;dj nj
2013&14	2 yk[k rd	fujd	2-5 yk[k rd	fujd	2-5 yk[k rd	fujd
	2 l 5 yk[k rd	10 %	2-5 l 5 yk[k rd	10 %	2-5 l 5 yk[k rd	10 %
	5 l 10 yk[k rd	20 %	5 l 10 yk[k rd	20 %	5 l 10 yk[k rd	20 %
	10 yk[k l Åij	30 %	10 yk[k l Åij	30 %	10 yk[k l Åij	30 %
2014&15	2-5 yk[k rd	fujd	3 yk[k rd	fujd	3 yk[k rd	fujd
	2-5 l 5 yk[k rd	10 %	3 l 5 yk[k rd	10 %	3 l 5 yk[k rd	10 %
	5 l 10 yk[k rd	20 %	5 l 10 yk[k rd	20 %	5 l 10 yk[k rd	20 %
	10 yk[k l Åij	30 %	10 yk[k l Åij	30 %	10 yk[k l Åij	30 %
2015&16	2-5 yk[k rd	fujd	3 yk[k rd	fujd	3 yk[k rd	fujd
	2-5 l 5 yk[k rd	10 %	3 l 5 yk[k rd	10 %	3 l 5 yk[k rd	10 %
	5 l 10 yk[k rd	20 %	5 l 10 yk[k rd	20 %	5 l 10 yk[k rd	20 %
	10 yk[k l Åij	30 %	10 yk[k l Åij	30 %	10 yk[k l Åij	30 %

½2½ oreku e f'k{kk midj n; vk;dj dk 2 ifr'kr ,o ek/;fed vkj mPp f'k{kk n; vk;dj dk 1 ifr'kr g vFkok lefdr :i l dy f'k{kk midj 3 ifr'krA

½3½ ;fn dj ;kX; vk; 10 yk[k #i, l vf/kd gk rk n; vk;dj ij 10 ifr'kr vfèkHkkj Hkh nuk iMrk gA

¼4½ vk;dj vf/kfu;e 1961 dh /kkjk 80 C d vUrxr tek dh xb /ku jkf'k ij vk;dj NV dh vf/kdre lhek 1-5 yk[k #i, g] tk ldy vk; l ?kVk nh tkrh gA 'k"k vk; ij vk;dj dh x.kuk dh tkrh gA

fuo'k dh xb NV ;kX; jkf'k fuEufyf[kr g&

¼v½ thou chek ikfylh dh okf"kd fdLrA

¼c½ ;fyi e tek okf"kd fdLrA

¼l½ lkekU; Hkfo"; fuf/k okf"kd tek jkf'kA

¼n½ xg _.k ij ey /ku tek dh okf"kd jkf'kA

¼b½ cPpk dk n; f'k{k.k 'kYdA

¼Q½ lkof/k tek dh jkf'kA

¼x½ leg chek@ifjokj dY;k.k e tek okf"kd v'k nku dh jkf'k vkfnA

vkb, vk;dj x.kuk d¨ fuEu mnkgj.k }kjk le>r g¡

mnkgj.k& 1- ,d depkjh dh foÙkh; o"k 2008&09 e vk; 4]28]000 #- FkhA mlu 2500#- çfrekg lkekU; Òfo"; fufèk e rFkk 25]000 #- v)okf"kdh thou chek i,fylh çhfe;e e tek fd;kA mlu 30]000 #- dk jk"Vh; cpr i= [kjhnk rFkk 25]000 #- ,d pfjVcy VLV e nku fd,A depkjh }kjk foÙkh; o"k d vfre ekg e pdkb xb vk;dj dh èkujkf'k Kkr dhft,A vk;dj dh èkkjk 80lh d vrxr lkekU; Òfo"; fufèk] thou chek çhfe;e v©j jk"Vh; cpr i= vkfn e tek d dy 1]00]000 #- rd vk;dj l NV gA VLV e nku dh jkf'k dk 50% vk;dj e NV èkkjk 80th d vrxr gA vk;dj dh nj fuEukuqlkj g ¶&

Ø-	dj ;¨X; lhek	vk;dj dh nj
1	1]50]000 #- rd ‘	dkb vk;dj ugh
2	1]50]001 #- l 3]00]000 #- rd	10%
3	3]00]001 #- l 5]00]000 #- rd	20%

blds vfrfjDr vk;dj dk 3% f'k{kk vfèkÒkj yxk;k tk,xkA

gy¶& ,d depkjh dh dy vk; ¾ 4]28]000 #-

VLV e nku dh xÃ jkf'k ¾ 25000 #- dk 50%

¾ $\frac{25000 \times 50}{100}$

NV dh jkf'k ¾ 12]500 #-

'k"k vk; ¾ 4]28]000 #- & 12]500 #- ¾ 4]15]500 #-

vk;dj dh èkkjk 80&l h vrxr tek dy jkf'k ¾

lkekU; Òfo"; fufèk $ thou chek çhfe;e $ jk"Vªh; cpr i=

¾ 2500×12 $ 25000×2 $ 30]000

¾ 30]000 $ 50]000 $ 30]000

¾ 1]10]000 #- tks 1 yk[k l s vfèkd g

vk;dj e NV dh jkf'k 1]00]000 #-

	vrf% dj ;¨X; vk;	¾ 4]15]500 & 1]00]000 #-
		¾ 3]15]500 #-
fn, x, vk;dj dh nj Øekd 3 d vu lkj]		¾ iFke 1]50]000 rd dkbZ dj ugh
	vk;dj	¾ 1]50]000 #- dk 10%$ 15]500 dk 20%
		¾ 15]000 #- $ 3100
		¾ 18]100 #-
	f'k{kk vfèkÒkj	¾ 18]100 dk 3%
		¾ 543 #-
	dy n; vk;dj	¾ 18]100 $ 543
		¾ 18643 #-

mnkgj.k%&2- foÙkh; o"k 2012&13 e edku fdjk;k ÒÙkk N¨Mdj ,d 0;fDr dh okf"kd vk; 4]80]000 #- gA m lu 36000 #- Òfo"; fufèk e] 18000 #- thou chek çhfe;e e v©j 20]000 #- jk"Vªh; cpr i= ;¨tuk e tek fd;kA m l okf"kd n; vk;dj ij 3% f'k{kk dj Òh nuk iMrk gA ;fn og 1500 #- çfrekg vk;dj 10 ekg rd tek djrk g r¨ 'k"k vk;dj dh jkf'k crkb,A vk;dj x.kuk dju d igy Òfo"; fufèk] thou chek ,o jk"Vªh; cpr i= e fu;¨ftr jkf'k vfèkdre 1]00]000 #- dj eDr gA vk;dj dh nj fuEuku lkj g %&

Ø-	dj ;¨X; lhek	vk;dj dh nj
1	2]00]000 #- rd	dkbZ vk;dj ugh
2	2]00]001 l 5]00]000 #-	10%

gy%& okf"kd vk; ¾ 4]80]000 #-

1-	Òfo"; fufèk e tek jkf'k	¾	36000 #-
2-	thou chek e tek jkf'k	¾	18]000 #-
3-	jk"Vªh; cpr i= ;¨tuk e tek jkf'k	¾	20]000 #-
	dy tek jkf'k	¾	36]000 $ 18]000 $ 20]000
		¾	74]000 #-

dj ;¨X; vk; ¾ 4]80]000 #- & 74000 ¾ 4]06]000 #-

vk;dj ¾ ¼4]06]000 #- & 2]00]000 #-½ dk 10% ¼·.· 2]00]000 #- rd dkbZ vk;dj ugh yxrk gA½

$$¾ \frac{206000 \times 10}{100}$$

¾ 20]600 #-

f'k{kkdj ¾ 20]600 #- dk 3%

$$¾ \frac{20600 \times 3}{100}$$

¾ 618 #-

dy n; vk;dj ¾ 20]600 #- $ 618 #- ¾ 21]218 #-

10 ekg e tek fd;k x;k vk;dj ¾ 1500 × 10 #- ¾ 15]000 #-

'k"k n; vk;dj ¾ 21]218 #- & 15]000 #-

¾ 6]218 #-

mnkgj.k&3- foÙkh; o"k 2013&14 e ,d 'kk ldh; depkjh dh dy okf"kd vk; 3]60]000 #- FkhA mlu 20]000 #- thou chek i,fy lh dk okf"kd çhfe;e rFkk 4000 #- çfrekg lkekU; Òfo"; fufèk e tek fd;kA n; vk;dj dh x.kuk dhft,A

;fn vk;dj x.kuk d io lkekU; Òfo"; fufèk ,o thou chek vkfn e fu;¨ftr jkf'k dk vfèkdre 1]00]000 #- dj eDr g¨A

vk;dj dh nj fuEukuqlkj g¨&

Øekd	dj ;¨X; lhek	vk;dj dh nj
1	2]00]000 #- rd	' dkb vk;dj ugh
2	2]00]001 #- l 5]00]000 #- rd	10%
3	5]00]001 #- l 10]00]000 #- rd	20%

f'k{kk midj n; vk;dj dk 3% gA

gy¨& ' 'kk ldh; depkjh dh dy okf"kd vk; ¾ 3]60]000 #-

1- lkekU; Òfo"; fufèk e tek jkf'k ¾ 48]000 #-

2- thou chek e tek jkf'k ¾ 20]000 #-

dy tek jkf'k ¾ 48]000 $ 20]000

¾ 68]000 #-

NV vfèkdre 1 yk[k #- g] vr% 68]000 #- ij dj ugh nuk gkxkA

dj ;¨X; vk; ¾ 3]60]000 & 68]000 ¾ 2]92]000 #-

n; vk;dj ¾ ¼2]92]000 & 2]00]000½ dk 10% ¼-.- 2]00]000 #- rd dkb vk;dj ugh yxrk gA½

¾ 92]000 dk 10%

¾ 9]200 #-

f'k{kk midj ¾ n; vk;dj dk 3%

¾ $\frac{9200 \times 3}{100}$

¾ 276 #-

dy n; vk;dj ¾ 9]200 $ 276 ¾ 9]476 #- mÙkj

i'ukoyh 2

1- foÙkh; o"k 2013&14 e ,d 'kk ldh; depkjh dh okf"kd vk; ¼edku fdjk;k ÒÙkk N¨Mdj½ 4]10]000 #- gA og çfrekg 4]000 #- viu lkekU; Òfo"; fufèk [kkr rFkk 24]000 #- okf"kd thou chek çhfe;e e tek djrk gA og 25]000 #- dk jk"Vh; cpr i= [kjhnrk gA çèkkue=h jkgr d¨"k ¼t¨ 100% dj eDr g½ e 20]000 #- rFkk ,d o)kJe e 12]000 #- ¼ft ldk 50% djeDr½ nku djrk gA mld }kjk o"k d vr e n; vk;dj dh x.kuk dhft ,A lÒh cpr 1]00]000 #- rd dj eDr gA vk;dj nj fuEukuqlkj g&

Øekd	dj ;¨X; lhek	vk;dj dh nj
1	2]00]000 #- rd	'kU;
2	2]00]001 #- l 5]00]000 #- rd	10%
3	5]00]001 #- l 10]00]000 #- rd	20%

1- f'k{kk midj & n; vk;dj dk 2%

2- ekè;fed v©j mPp f'k{kk midj & n; vk;dj dk 1%

2- uohu dk foÙkh; o"k 2013&14 e okf"kd oru 7]20]000 #- gA og lkekU; Òfo"; fufèk e 4]000 #- ekfld tek djrk gA 20]000 #- okf"kd thou chek dh fdLr tek djrk gA 30]000 #- jk"Vh; cpr i= e fuo'k djrk gA vukFk vkJe e 15]000 #- nku djrk g ft ldk 50% dj eDr gA r¨ mld }kjk o"k d vUr e n; vk;dj dh x.kuk dhft ,A vk;dj nj fuEukuqlkj g %&

Øekd	dj ;¨X; lhek	vk;dj dh nj
1	2]00]000 #- rd	dkb vk;dj ugh
2	2]00]001 #- l 5]00]000 #- rd	10%
3	5]00]001 #- l 10]00]000 #- rd	20%
4	10]00]001 #- l vf/kd ij	30%

1- f'k{kk midj & n; vk;dj dk 2%

2- ekè;fed v©j mPp f'k{kk midj & n; vk;dj dk 1%

3- lÒh cpr 1]00]000 #- rd dj eDr gA

3- foÙkh; o"k 2008&09 e je'k dh dy okf"kd vk; 3]00]000 #- FkhA og lkekU; Òfo"; fufèk [kkr e 1]000 #- çfrekg tek djrk Fkk rFkk mlu 12]000 #- okf"kd thou chek i,fy lh dk çhfe;e fn;k FkkA ;fn 1]50]000 #- rd d¨Ã vk;dj ugÈ g rFkk 1]50]000 #- l vfèkd vk; ij 10% dh nj l vk;dj n; g¨ ,o lÒh cpr ij NV dh vfèkdre lhek 1]00]000 #- g¨ r¨ mld }kjk n; vk;dj dh x.kuk dhft,] tgk f'k{kk midj n; vk;dj dk 3% gA

4- foÙkh; o"k 2014&15 e fdlh cd depkjh dh ekfld vk; ¼edku fdjk;k ÒÙkk N¨Mdj½ 40]000 #- gA og 42]000 #- okf"kd viu lkekU; Òfo"; fufèk e tek djrk g rFkk 6]000 #- dh v)okf"kd çhfe;e ,y-vkÃ-lh- e nrk gA ;fn o"k d çFke 11 ekg d fy, 1]600 #- çfrekg vk;dj nrk g r¨ foÙkh; o"k d vfre ekg e mld }kjk Òxrku fd; tku oky vk;dj dh x.kuk dhft,A vk;dj e NV leLr cpr¨ dk 100% ¼vfèkdre 1]00]000 #-½ gA

¼v½ vk;dj dh nj fuEukuqlkj g %&

Øekd	dj ;¨X; lhek	vk;dj dh nj
1	2]50]000 #- rd	dkb vk;dj ugh
2	2]50]001 #- l 5]00]000 #- rd	10%
3	5]00]001 #- l 10]00]000 #- rd	20%
4	10]00]001 l vfèkd ij	30%

¼c½ vfèkÒkj % n; vk;dj dk 10% ;fn dj ;¨X; vk; 10 yk[k #- l vfèkd g¨A

¼l½ f'k{kk midj % n; vk;dj dk 3%A

5- foÙkh; o"k 2012&13 e jkt'k dh dy okf"kd vk; 5]25]000 #- gA og lkekU; Òfo"; fufèk e 8]000 #- çfrekg tek djrk g rFkk 8]000 #- viu Òkjrh; thou chek dk okf"kd çhfe;e nrk gA ;fn og 2 yk[k #- rd d¨Ã vk;dj ugÈ nrk g rFkk 2 yk[k #- l vfèkd vk; ij 10% dh nj l vk;dj n; g¨ ,o vk;dj e NV lÒh cpr i=¨ dk 100% ¼vfèkdre lhek 1 yk[k #-½ g¨ r¨ jkt'k d }kjk n; vk;dj dh x.kuk dhft, tgk f'k{kk midj n; vk;dj dk 3% gA

6- foÙkh; o"k 2014&15 e Jherh Òkouk dh okf"kd vk; ¼edku fdjk;k ÒÙkk N¨Mdj½ 6]00]000 #- gA og viu lkekU; Òfo"; fufèk e 48]000 #- okf"kd ,o thou chek fuxe e 25]000 #- okf"kd çhfe;e tek djrh gA ;fn o"k d çFke 11 ekg e 1500 #- çfrekg vk;dj nrh g rFkk lÒh cpr i=¨ ij NV dh vfèkdre lhek ,d yk[k #- gA n; vk;dj dh x.kuk dhft,A

v½ vk;dj dh nj fuEukuqlkj g&

Øekd	dj ;¨X; lhek	vk;dj dh nj
1	2]50]000 #- rd	dkbZ vk;dj ugh
2	2]50]001 #- l 5]00]000 #- rd	10%
3	5]00]001 #- l 10]00]000 #- rd	20%

b l d vfrfjDr n; vk;dj ij 3% f'k{kk midj yxrk gA

7- ,d vfèkdkjh dh foÙkh; o"k 2012&13 e okf"kd vk; ¼edku fdjk;k ÒÙkk N¨Mdj½ 7]20]000 #- gA mlu lkekU; Òfo"; fufèk e çfrekg 4000 #-] thou chek fuxe e çfrekg 3000 #- tek fd, rFkk 30]000 #- dk jk"Vªh; cpr i= [kjhnkA ,d vukFk vkJe d¨ 20]000 #- nku fn, ftl ij 50% VDl l NV feyrh gA ;fn lÒh cpr¨ ij NV dh vfèkdre lhek ,d yk[k #- g¨ r¨ ml vfèkdkjh }kjk n; vk;dj dh x.kuk dhft,A

v½ vk;dj dh nj fuEukuqlkj g&

Øekd	dj ;¨X; lhek	vk;dj dh nj
1	2]00]000 #- rd	dkbZ vk;dj ugh
2	2]00]001 #- l 5]00]000 #- rd	10%
3	5]00]001 #- l 10]00]000 #- rd	20%
4	10]00]001 #- l vf/kd ij	30%

b l d vfrfjDr n; vk;dj ij 3% f'k{kk midj yxrk gA

mÙkjekyk&2

1- dy vk;dj 8]961 #-

2- dy vk;dj 54]487 #-

3- dy vk;dj 12]978 #-

4- dy vk;dj 18]128 #- ,o vfre ekg dk vk;dj 528 #-

5- dy vk;dj 23]175 #- ,o f'k{kk midj 675 #-

6- dy vk;dj 31]312 #- ,o f'k{kk midj 912 #-

7- dy vk;dj 53]560 #- ,o f'k{kk midj 1]560 #-

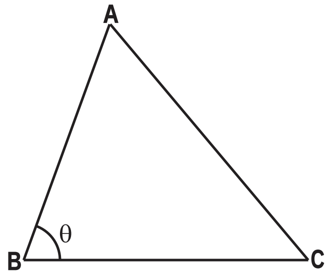
अध्याय

09

f=dk.kferh; lehdj.k ,o lo lfedk,

[Trigonometric Equation And Identities]

geu f=dk.kferh; vuikrk $\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta, \cot\theta, \sec\theta$ o $\operatorname{cosec}\theta$ d ckj e d{kk&9 e i<k gA ; fd lh Hkh dk.k d fy, irk fd, tk ldr g ijUr bl v/;k; e ge budh ppk U;u dk.kk d fy, gh djxA



आकृति–1(i)

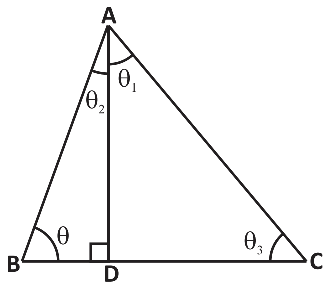
f=Hkt ABC e dk.k B yA D;k vki $\angle B = \theta$ d lHkh f=dk.kferh; vuikrk dk irk dj ldr g\

dk.k θ d f=dk.kferh; vuikrk dk irk dju d fy, ge bl dk.k dk 'kkfey djr g, ,d ledk.k f=Hkt cukuk gkxkA

ΔABC d θ dk.k d f=dk.kferh; vuikr Kkr dju d fy, ledk.k f=Hkt dl cuk,\

ge ΔABC e 'kh"k A l Hkqtk BC ij yc AD MkyxA vc iklr ledk.k f=Hkt ADB o f=Hkt ADC e vkdfr 1¼ii½ U;u dk.k θ ,o θ_1 d fy, fuEufyf[kr lkj.kh dk i.k dhft,¼&

$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\cot\theta$	$\sec\theta$	$\operatorname{cosec}\theta$
$\frac{AD}{AB}$					
$\sin\theta_1$	$\cos\theta_1$	$\tan\theta_1$	$\cot\theta_1$	$\sec\theta_1$	$\operatorname{cosec}\theta_1$
$\frac{CD}{AC}$					



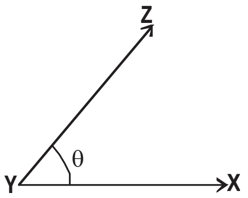
आकृति–1(ii)

djd n[k

vkÑfr&1¼ii½ e dk.k θ_2 o θ_3 d fy, lHkh f=dk.kferh; vuikr Kkr dhft,A

lkp ,o ppk dj

fn, x, $\angle XYZ = \theta$ d fy, f=dk.kferh; vuikr d lKkr djx\



f=dk.kferh; vuikrk d chp lc/k

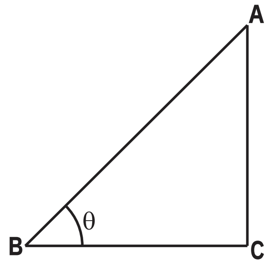
fiNyh d{kk e geu f=dk.kferh; vuikrk d chp dN lc/kk dk tkuk gA

vkb,] vc ge bu f=dk.kferh; vuikrk d chp dN vkj lc/k <<r g&

ledk.k f=Hkt ACB e dk.k C ledk.k gA¼vkdfr&2½ ikbFkkxkjl ie; l&

$$AC^2 + BC^2 = AB^2 \qquad .....(1)$$

mijkDr lehdj.k dk AB^2 l Hkkx nu ij



$$\frac{AC^2}{AB^2} + \frac{BC^2}{AB^2} = \frac{AB^2}{AB^2}$$

$$\left(\frac{AC}{AB}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 = \left(\frac{AB}{AB}\right)^2$$

$$(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1$$

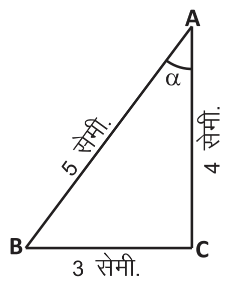
$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad .....(2)$$

$\sin\theta$ o $\cos\theta$ d chp ikIr ;g lc/k D;k θ d $0°$ l $90°$ rd d lHkh ekuk d fy, lR; g\ viu mÙkj d fy, mfpr rd nhft,A

djd n[k

(i) $\theta = 30°, 45°, 60°$ d fy, ikIr lc/k $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ dh lR;rk dh tkp dhft,A

(ii) nh xbZ vkÑfr d fy, $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ dh lR;rk dh tkp dhft,A



vki ik,x fd $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$, θ d $0°$ l $90°$ rd d lHkh ekuk d fy, lR; gA

D;k f=dk.kferh; vuikrk d chp blh idkj d vU; lc/k Hkh gk ldr g\ vkb, n[k& lehdj.k ¼1½ e BC^2 l Hkkx nu ij

$$\frac{AC^2}{BC^2} + \frac{BC^2}{BC^2} = \frac{AB^2}{BC^2}$$

$$\left(\frac{AC}{BC}\right)^2 + \left(\frac{BC}{BC}\right)^2 = \left(\frac{AB}{BC}\right)^2$$

$$(\tan\theta)^2 + 1 = (\sec\theta)^2$$

$$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta \qquad .....(2)$$

D;k mijkDr lc/k Hkh $0°$ l $90°$ rd d lHkh dk.kk d fy, lR; g\ vkb, dk.k d dN ekuk d fy, vuikrk d lc/k dk n[kA mnkgj.k d fy, tc $\theta = 0°$ gk&

L.H.S.	=	$1 + \tan^2\theta$
	=	$1 + \tan^2 0°$
	=	$1 + 0$
	=	1
R.H.S.	=	$\sec^2\theta$
	=	$\sec^2 0°$
	=	1

vr% ;g $\theta = 0°$ d fy, lR; gA

D;k ;g $\theta = 90°$ d fy, Hkh lR; g\ D;kfd $\theta = 90°$ d fy, $\tan\theta$ vkj $\sec\theta$ ifjHkkf"kr ugh g] vr% ge $\theta = 90°$ dk NkMdj dg ldr g fd $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$] θ d mu lHkh ekuk d fy, lR; g] tgk $0° \leq \theta < 90°$ gA

vkb,] vc ge f=dk.kferh; vuikrk d chp ,d vkj lc/k n[kr gA lehdj.k ¼1½ dk AC^2 l Hkkx nu ij ge fuEufyf[kr lc/k iklr gkrk g\

$$\frac{AC^2}{AC^2} + \frac{BC^2}{AC^2} = \frac{AB^2}{AC^2}$$

$$\left(\frac{AC}{AC}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$$

$$1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta \qquad .....(3)$$

ge tkur g fd $\theta = 0°$ d fy, $\cot\theta$ o $\operatorname{cosec}\theta$ ifjHkkf"kr ugh g vr%

$1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$] tgk $0° < \theta \leq 90°$ gA

lHkh f=dk.kferh; vuikrk dkfd lhHkh ,d f=dk.kferh; vuikr e0;Dr djuk

geu fofHkUu f=dk.kferh; vuikrk d chp lc/k n[k gA D;k ge fd lh Hkh ,d f=dk.kferh; vuikr e vU; f=dk.kferh; vuikrk dk :ikrfjr dj ldr g tSl ;fn ge $\cos A$ o $\tan A$ dk $\sin A$ d ink e 0;Dr djuk gk] rk

$$\because \sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

vr% $\cos^2 A = 1 - \sin^2 A$

$$\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A}$$

vkj $\tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A}$

$$= \frac{\sin A}{\sqrt{1 - \sin^2 A}}$$

,d f=dk.kferh; vuikr Kkr gku ij vU; f=dk.kferh; vuikr Kkr dj ldr gA

djd n[k

1- $\sec A$ dk $\sin A$ d ink e 0;Dr dhft,A

2- lHkh f=dk.kferh; vuikrk dk $\cos A$ d ink e 0;Dr dhft,A

geu f=dk.kferh; vuikrk d chp lc/kk dk v/;;u fd;k gA vkb,] vc uhp fy[k lc/k ij fopkj djr g&

$$\cot\theta + \tan\theta = \operatorname{cosec}\theta \cdot \sec\theta$$

D;k ;g lc/k lgh g] vkb, bldh tkp dj&

$$\cot\theta + \tan\theta = \operatorname{cosec}\theta \cdot \sec\theta$$

ck;k i{k $= \cot\theta + \tan\theta$

$$= \frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$= \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\sin\theta \cdot \cos\theta}$$

$$= \frac{1}{\sin\theta \cdot \cos\theta} \qquad [\because \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1]$$

$$= \frac{1}{\sin\theta} \cdot \frac{1}{\text{cosec}\theta}$$

$= \text{cosec}\theta \,.\, \sec\theta$

= nk;k i{k

vc ge blh idkj d dN vkj mnkgj.k yrs g&

mnkgj.k&1- fl) dhft, fd&

$$\sin^4\theta - \cos^4\theta = \sin^2\theta - \cos^2\theta$$

gy& ck;k i{k $= \sin^4\theta - \cos^4\theta$

$= (\sin^2\theta)^2 - (\cos^2\theta)^2$ $\quad \left[\because a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)\right]$

$= (\sin^2\theta - \cos^2\theta)(\sin^2\theta + \cos^2\theta)$ $\quad [\because \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1]$

$= (\sin^2\theta - \cos^2\theta) \,.\, 1$

$= \sin^2\theta - \cos^2\theta$

= nk;k i{k

mnkgj.k&2- fl) dhft, fd&

$$\sqrt{\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}} = \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$$

gy ck;k i{k $= \sqrt{\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}}$

$$= \sqrt{\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta} \times \frac{1+\sin\theta}{1+\sin\theta}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1+\sin\theta)^2}{1-\sin^2\theta}}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2}$$

$$= \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$$

= nk;k i{k

mngj.k&3- fl) dhft , fd&

$$\frac{\cos A}{1-\tan A}+\frac{\sin A}{1-\cot A}=\sin A+\cos A$$

gy%& ck;k i{k

$$=\frac{\cos A}{1-\frac{\sin A}{\cos A}}+\frac{\sin A}{1-\frac{\cos A}{\sin A}}$$

$$=\frac{\cos A\ .\ \cos A}{\cos A-\sin A}+\frac{\sin A\ .\ \sin A}{\sin A-\cos A}$$

$$=\frac{\cos^2 A}{\cos A-\sin A}-\frac{\sin^2 A}{\cos A-\sin A}$$

$$=\frac{\cos^2 A-\sin^2 A}{\cos A-\sin A}$$

$$=\frac{(\cos A-\sin A)(\cos A+\sin A)}{\cos A-\sin A}$$

$=\sin A+\cos A$ = nk;k i{k

mnkgj.k&4- fl) dhft , fd&

$$\frac{1+\cos\theta-\sin^2\theta}{\sin\theta+\sin\theta\ .\ \cos\theta}=\cot\theta$$

gy % ck;k i{k

$$=\frac{1+\cos\theta-\sin^2\theta}{\sin\theta+\sin\theta\ .\ \cos\theta}$$

$$=\frac{\cos\theta+1-\sin^2\theta}{\sin\theta(1+\cos\theta)}$$

$$=\frac{\cos\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta(1+\cos\theta)}$$

$$=\frac{\cos\theta(1+\cos\theta)}{\sin\theta(1+\cos\theta)}$$

$$=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$=\cot\theta$ = nk;k i{k

dHkh&dHkh ge fn, x, ifrc/kk dh lgk;rk l dN lc/kk dk fl) djuk gkrk g vkb, bl dN mnkgj.kk l le>r g&

mnkgj.k&5- ;fn $\sin\theta + \cos\theta = 1$ rk fl) dhft, fd $\sin\theta - \cos\theta = \pm 1$

gy& fn;k x;k g

$$\sin\theta + \cos\theta = 1$$

$$(\sin\theta + \cos\theta)^2 = 1$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta + 2\sin\theta \cdot \cos\theta = 1$$

$$1 + 2\sin\theta \cdot \cos\theta = 1 \qquad [\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1]$$

$$2\sin\theta \cdot \cos\theta = 1 - 1$$

$$\sin\theta \cdot \cos\theta = 0 \qquad .....(1)$$

vc

$$(\sin\theta - \cos\theta)^2 = 1 - 2\sin\theta \cdot \cos\theta$$

$$(\sin\theta - \cos\theta)^2 = 1 - 2 \times 0 \qquad \text{leh- ¼1½ l}$$

$$(\sin\theta - \cos\theta)^2 = 1$$

$$\therefore \sin\theta - \cos\theta = \pm 1$$

;gh fl) djuk FkkA

mnkgj.k&6- ;fn $\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\cos\theta$ gkA

rk fl) dhft, fd $\cos\theta - \sin\theta = \sqrt{2}\sin\theta$

gy& fn;k g

$$\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\cos\theta$$

$$\sin\theta = \sqrt{2}\cos\theta - \cos\theta$$

$$\sin\theta = \cos\theta(\sqrt{2} - 1)$$

$$\frac{\sin\theta}{\sqrt{2} - 1} = \cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{\sin\theta}{\sqrt{2} - 1} \times \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} + 1}$$

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{2}\sin\theta + \sin\theta}{2 - 1}$$

$$\cos\theta = \sqrt{2}\sin\theta + \sin\theta$$

$$\cos\theta - \sin\theta = \sqrt{2}\sin\theta$$

;gh fl) djuk FkkA

u, lc/k cukuk

;fn $x = \sin\theta$

$y = \cos\theta$

rk ge x o y d e/; lc/k dl irk djx\

ge f=dk.kferh; vuikrk d lc/kk l θ dk foykfir dj x o y d chp lc/k irk dj ldr gA

tl& $x^2 + y^2 = \sin^2\theta + \cos^2\theta$

$x^2 + y^2 = 1$

vkb,] bl dN vkj mnkgj.kk l le>&

mnkgj.k&7- ;fn $x = a\cos\theta - b\sin\theta$ vkj $y = a\sin\theta + b\cos\theta$ gk] rk fl) dhft, fd $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$

gy& fn;k g $x = a\cos\theta - b\sin\theta$ .....(1)

$y = a\sin\theta + b\cos\theta$ .....(2)

leh- ¼1½ o ¼2½ dk ox dju ij

$x^2 = (a\cos\theta - b\sin\theta)^2$

$y^2 = (a\sin\theta + b\cos\theta)^2$

$x^2 = a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta - 2ab\cos\theta\,.\,\sin\theta$ .....(3)

$y^2 = a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta + 2ab\sin\theta\,.\,\cos\theta$ .....(4)

leh- ¼3½ o ¼4½ dk tkMu ij

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta - 2ab\cos\theta\,.\,\sin\theta \\ &\quad + a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta + 2ab\sin\theta\,.\,\cos\theta \\ &= a^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) + b^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) \\ &= a^2 + b^2 \qquad [\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1] \end{aligned}$$

mnkgj.k&8- ;fn $\tan\theta + \sin\theta = m$ vkj $\tan\theta - \sin\theta = n$ gk rk fl) dhft, fd&

$$m^2 - n^2 = 4\sqrt{mn}$$

gy& fn;k g $m = \tan\theta + \sin\theta$

$n = \tan\theta - \sin\theta$

$m + n = 2\tan\theta$

$m - n = 2\sin\theta$

vc] $(m-n)(m+n) = 4\sin\theta \cdot \tan\theta$

$$m^2 - n^2 = 4\sin\theta \cdot \tan\theta \qquad .....(1)$$

$$m \cdot n = (\tan\theta + \sin\theta)(\tan\theta - \sin\theta)$$

$$= \tan^2\theta - \sin^2\theta$$

$$= \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} - \sin^2\theta$$

$$= \frac{\sin^2\theta - \sin^2\theta \cdot \cos^2\theta}{\cos^2\theta}$$

$$= \frac{\sin^2\theta[1-\cos^2\theta]}{\cos^2\theta}$$

$$= \sin^2\theta \cdot \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$$

$$= \sin^2\theta \cdot \tan^2\theta$$

$$4\sqrt{mn} = 4\sqrt{\sin^2\theta \cdot \tan^2\theta}$$

$$= 4\sin\theta \cdot \tan\theta$$

$4\sqrt{mn} = m^2 - n^2$ leh- ¼1½ l

;k $m^2 - n^2 = 4\sqrt{mn}$;gh fl) djuk FkkA

i'ukoyh&1

fuEufyf[kr lolfedk, fl) dhft,&

1- $\dfrac{1}{\sec\theta - 1} - \dfrac{1}{\sec\theta + 1} = 2\cot^2\theta$

2- $\sec^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta = \sec^2\theta \cdot \operatorname{cosec}^2\theta$

3- $\sin^4 A + \cos^4 A = 1 - 2\sin^2 A \cdot \cos^2 A$

4- $\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \operatorname{cosec}\theta - \cot\theta$

5- $(1 + \cot\theta - \operatorname{cosec}\theta)(1 + \tan\theta + \sec\theta) = 2$

6- $\dfrac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}-\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}=4\cot\theta\,\text{cosec}\theta$

7- $\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta}=2\,\text{cosec}\theta$

8- ;fn $\cos\theta-\sin\theta=\sqrt{2}\sin\theta$ gk rks fl) dhft, fd $\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{2}\cos\theta$

9- ;fn $\tan\theta=n\tan\phi$ rFkk $\sin\theta=m\sin\phi$ gk rks fl) dhft, fd $\cos^2\theta=\dfrac{m^2-1}{n^2-1}$

10- ;fn $x=a\,\text{cosec}\theta$ rFkk $y=b\cot\theta$ gks] rks fl) dhft, fd $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

11- ;fn $x=r\sin A\cos C,\ y=r\sin A\sin C$ vkSj $z=r\cos A$ gks rks fl) dhft, fd $r^2=x^2+y^2+z^2$

lozlfedk o f=dks.kferh; lehdj.k

geu f=dks.kferh; vuqikr $\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta, \sec\theta, \text{cosec}\theta, \cot\theta$ d vkil e lca/k dk tkuk gA bu lc/kk e geu ,d lc/k $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ n[kk gA ;g lc/k θ d lHkh ekuk d fy, lR; gA f=dks.kferh; vuqikrk d ,l lc/k dk] tk dk.k d :i e fn, x, pj d lHkh ekuk d fy, lR; gk]f=dks.kferh; lozlfedk dgk tkrk gA

rc] D;k lc/k $\sin\theta+\cos\theta=1$ Hkh ,d lozlfedk g\

vkb, n[k]

$\theta=0°$ yu ij

$=\sin 0°+\cos 0°$

$=0+1$

$=1$

$\theta=30°$ d fy,

$=\sin 30°+\cos 30°$

$=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$

$\neq 1$

EZ43XH

geu n[kk fd $\theta = 0°$ d fy, ;g lc/k lR; g yfdu $\theta = 30°$ d fy, lR; ugh gA vr% ge $\sin\theta + \cos\theta = 1$ dk lolfedk ugh dg ldr A

dk.k d :i e fn, x, pj d dN fo'k"k ekuk d fy, dN f=dk.kferh; lc/k lR; gkr g bUg f=dk.kferh; lehdj.k dgr gA rc D;k ge $\sin\theta + \cos\theta = 1$ dk f=dk.kferh; lehdj.k dg ldr g\ geu n[kk fd $\theta = 0°$ d fy, ;g lc/k lR; g yfdu $\theta = 30°$ d fy, lR; ugh g vr% $\sin\theta + \cos\theta = 1$ f=dk.kferh; lehdj.k gA

djd n[k

fn, x, lc/kk e $\theta = 0°, 30°, 45°, 60°, 90°$ ekuk dk jf[k, vkj tkp dhft , fd ;g θ d fdu ekuk d fy, lR; g&

1. $\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}$
2. $\tan^2\theta + \cot^2\theta = 2$
3. $2\cos^2\theta = 3\sin\theta$
4. $\tan\theta\,.\sec\theta = 2\sqrt{3}$

θ d ftu ekuk d fy, f=dk.kferh; lehdj.k lR; gA o eku f=dk.kferh; lehdj.k d gy dgykr gA

vkb,] vc dN f=dk.kferh; lehdj.kk dk gy dj&

mnkgj.k&9- $\sqrt{3}\tan\theta - 2\sin\theta = 0$ dk gy dhft ,A

gy&
$$\sqrt{3}\,\frac{\sin\theta}{\cos\theta} - 2\sin\theta = 0 \qquad \left[\because \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right]$$

$$\sqrt{3}\sin\theta - 2\sin\theta\,.\cos\theta = 0$$

$$\sin\theta\,(\sqrt{3} - 2\cos\theta) = 0$$

$$\sin\theta = 0$$

$$\theta = 0°$$

vc $\sqrt{3} - 2\cos\theta = 0$

$$\Rightarrow \quad -2\cos\theta = -\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\theta = 30°$$

vr% $\theta = 0°, 30°$

mnkgj.k&10- $\cos^2 x + \cos x = \sin^2 x$ dk gy dhft,A tgk $0° \le x \le 90°$

gy& $\cos^2 x + \cos x = \sin^2 x$

$\Rightarrow \quad \cos^2 x + \cos x = 1 - \cos^2 x$

$\Rightarrow \quad \cos^2 x + \cos^2 x + \cos x - 1 = 0$

$\Rightarrow \quad 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$

$\Rightarrow \quad 2\cos^2 x + 2\cos x - \cos x - 1 = 0$

$\Rightarrow \quad 2\cos x(\cos x + 1) - 1(\cos x + 1) = 0$

$\Rightarrow \quad (2\cos x - 1)(\cos x + 1) = 0$

$2\cos x - 1 = 0$

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

$x = 60°$

rFkk $(\cos x + 1) = 0$

$\Rightarrow \quad \cos x + 1 = 0$

$\cos x = -1$

D;kfd $0° \le x \le 90°$ d fy, $\cos x$ _.kkRed ugh gkrk gA vr% ge $\cos x = -1$ dk NkM nr gA blfy, lehdj.k dk gy $x = 60°$ gA

mnkgj.k&11- fuEufyf[kr f=dk.kferh; lehdj.k d gy Kkr dhft, tgk $0° \le \theta \le 90°$

$$\frac{\cos\theta}{\operatorname{cosec}\theta + 1} + \frac{\cos\theta}{\operatorname{cosec}\theta - 1} = 2$$

gy&

$$\frac{\cos\theta}{\operatorname{cosec}\theta + 1} + \frac{\cos\theta}{\operatorname{cosec}\theta - 1} = 2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\cos\theta(\operatorname{cosec}\theta - 1) + \cos\theta(\operatorname{cosec}\theta + 1)}{\operatorname{cosec}^2\theta - 1} = 2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\cos\theta\left[\operatorname{cosec}\theta - 1 + \operatorname{cosec}\theta + 1\right]}{\cot^2\theta} = 2 \qquad [\because \operatorname{cosec}^2\theta - 1 = \cot^2\theta]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\cos\theta \, . \, 2\operatorname{cosec}\theta}{\cot^2\theta} = 2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\cos\theta \, . \, 2 \, . \, \dfrac{1}{\sin\theta}}{\cot^2\theta} = 2$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{2\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}}{\cot^2\theta} = 2$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{2\cot\theta}{\cot^2\theta} = 2$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{2}{\cot\theta} = 2$$

$$\Rightarrow \qquad 2\tan\theta = 2$$

$$\Rightarrow \qquad \tan\theta = 1$$

$$\Rightarrow \qquad \tan\theta = \tan 45^\circ$$

$$\therefore \qquad \theta = 45^\circ$$

i'ukoyh&2

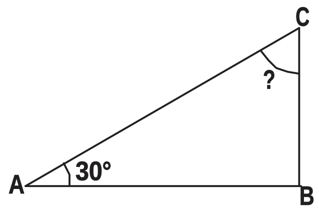
1- fn, x, f=dk.kferh; lehdj.kk dk gy dhft, tgk $0^\circ \le \theta \le 90^\circ$

(i) $2\cos^2\theta - \sqrt{3}\cos\theta = 0$ (ii) $2\sin^2\theta - \cos\theta = 1$

(iii) $3\tan^2\theta = 2\sec^2\theta + 1$ (iv) $\cos^2\theta - 3\cos\theta + 2 = \sin^2\theta$

(v) $\dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta} + \dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta} = 4$

ijd dk.kk d f=dk.kferh; vuikr



vkdfr&3

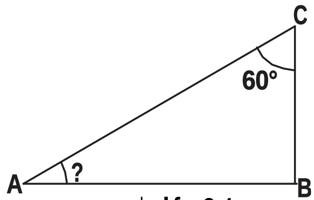
,d ledk.k ΔABC e ;fn $\angle A = 30^\circ$ rc $\angle C$ D;k gkxk\ ¼vkdfr&3½ vkj ;fn $\angle C = 60^\circ$ rk D;k $\angle A$ dk eku irk dj ldr g\ ¼vkdfr&4½ D;k $\angle A$ o $\angle C$ d chp dkb ,lk lc/k g ftlls ,d dk.k dk eku irk gku ij ge nlj dk.k dk eku irk dj ld \

ge tkur g fd ΔABC e

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

$$\because \angle B = 90^\circ$$

$$\therefore \quad \angle A + \angle C = 90^\circ$$



vkdfr&4

;kuh $\angle A$ o $\angle C$ ijd dk.k gA

vc f=Hkt ABC e ¼vkdfr&5½

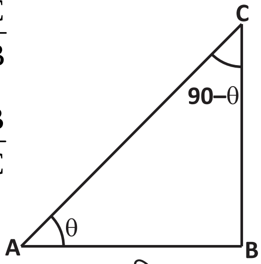
$\angle A = \theta$ rk $\angle C = 90^\circ - \theta$

rc D;k $\angle A$ o $\angle C$ d f=dk.kferh; vuikrk d chp Hkh dkb lc/k g \

D;k fn, x, f=Hkt e $(90° - \theta)$ dk.k d f=dk.kferh; vuikr dk θ dk.k d f=dk.kferh; vuikr e ifjofrr fd;k tk ldrk g\ dl\

$$\sin\theta = \frac{BC}{AC} \qquad \cos\theta = \frac{AB}{AC} \qquad \tan\theta = \frac{BC}{AB}$$

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{AC}{BC} \qquad \sec\theta = \frac{AC}{AB} \qquad \cot\theta = \frac{AB}{AC}$$



आकृति–5

vc $\angle C = (90° - \theta)$ d fy, ΔABC e f=dk.kferh; vuikr

$$\sin(90° - \theta) = \frac{AB}{AC}, \quad \cos(90° - \theta) = \frac{BC}{AC}, \quad \tan(90° - \theta) = \frac{AB}{BC},$$

$$\operatorname{cosec}(90° - \theta) = \frac{AC}{AB}, \quad \sec(90° - \theta) = \frac{AC}{BC}, \quad \cot(90° - \theta) = \frac{BC}{AB}$$

dk.k θ o $(90° - \theta)$ d fy, f=dk.kferh; vuikrk dh ryuk dju ij ge uhp fn, lc/k ikIr gkx&

$$\sin(90° - \theta) = \frac{AB}{AC} = \cos\theta, \quad \cos(90° - \theta) = \frac{BC}{AC} = \sin\theta$$

$\tan(90° - \theta) = \cot\theta$ vkj $\cot(90° - \theta) = \tan\theta$

$\sec(90° - \theta) = \operatorname{cosec}\theta$ vkj $\operatorname{cosec}(90° - \theta) = \sec\theta$

lkp ,o ppk dj

D;k mijkDr lc/k $0° \le \theta \le 90°$ d lHkh ekuk d fy, lR; g\

djd n[k

ijd dk.kk d f=dk.kferh; vuikrk d lc/k dk i;kx djd uhp dh lkj.kh dk i.k dhft,A

θ	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\theta$	0	....	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	....	1
$\cos\theta$	....	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	....	$\frac{1}{2}$	....

ijd dk.k d f=dk.kferh; vuikrk dk mi;kx

vkb, ge ;g n[k fd ijd dk.kk d f=dk.kferh; vuikrk dh lgk;rk l f=dk.kferh; lkj.kh dk fcuk i;kx fd, eku dl Kkr djr g\ D;k mu dk.kk d fy, ftud f=dk.kferh; vuikr irk djuk ljy ugh g] ge budk mi;kx dj ldr g\ tl $\theta = 31°$;k fQj $13°$ vkj $\phi = 20°$;k $43°$ vkfnA

vc ge $\dfrac{2\sin 30°}{\cos 60°}$ dk eku f=dk.kferh; lkj.kh dk i;kx fd, cxj gh Kkr djd n[kr gA

$$\frac{2\sin 30°}{\cos 60°}$$

$$= \frac{2\sin 30°}{\cos(90° - 30°)} \qquad [\because \cos(90° - \theta) = \sin\theta]$$

$$= 2\frac{\sin 30°}{\sin 30°}$$

$$= 2$$

blh idkj $\dfrac{3\tan 15°}{\cot 75°}$ dk eku Kkr djuk gk rk

$$\frac{3\tan 15°}{\cot 75°}$$

$$= \frac{3\tan 15°}{\cot(90° - 15°)}$$

$$= \frac{3\tan 15°}{\tan 15°}$$

$$= 3$$

mnkgj.k&12- fuEufyf[kr d eku Kkr dhft,A

(a) $\dfrac{\sin 31°}{2\cos 59°}$ (b) $\dfrac{\sec 70°}{\operatorname{cosec} 20°} + \dfrac{\sin 59°}{\cos 31°}$

gy& (a) $\dfrac{\sin 31°}{2\cos 59°}$

$$= \frac{\sin(90^0 - 59^0)}{2\cos 59^0}$$

$$= \frac{\cos 59^\circ}{2\cos 59^\circ} \qquad [\because \quad \sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta]$$

$$= \frac{1}{2}$$

(b) $\dfrac{\sec 70^\circ}{\operatorname{cos ec} 20^\circ} + \dfrac{\sin 59^\circ}{\cos 31^\circ}$

$$= \frac{\sec(90^\circ - 20^\circ)}{\operatorname{cos ec} 20^\circ} + \frac{\sin(90^\circ - 31^\circ)}{\cos 31^\circ} \qquad \left[\begin{array}{l} \therefore \sec(90^\circ - \theta) = \operatorname{cos ec}\theta \\ \sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta \end{array}\right]$$

$$= \frac{\operatorname{co sec} 70^\circ}{\operatorname{cos ec} 70^\circ} + \frac{\cos 31^\circ}{\cos 31^\circ}$$

$$= 1 + 1$$

$$= 2$$

mnkgj.k&13- $\left(\dfrac{\sin 47^\circ}{\cos 43^\circ}\right)^2 + \left(\dfrac{\cos 43^\circ}{\sin 47^\circ}\right)^2 - 4\cos^2 45^\circ$ dk eku Kkr dhft,A

gy& $\left(\dfrac{\sin 47^\circ}{\cos 43^\circ}\right)^2 + \left(\dfrac{\cos 43^\circ}{\sin 47^\circ}\right)^2 - 4\cos^2 45^\circ$

$$= \left(\frac{\sin(90^\circ - 43^\circ)}{\cos 43^\circ}\right)^2 + \left(\frac{\cos(90^\circ - 47^\circ)}{\sin 47^\circ}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$= \left(\frac{\cos\ 43^\circ}{\cos\ 43^\circ}\right)^2 + \left(\frac{\sin\ 47^\circ}{\sin\ 47^\circ}\right)^2 - 4 \times \frac{1}{2}$$

$$= 1 + 1 - 2$$

$$= 0$$

mnkgj.k&14- fl) dhft, fd&

$$\tan 7^\circ \tan 23^\circ \tan 60^\circ \tan 67^\circ \tan 83^\circ = \sqrt{3}$$

gy%& ck;k i{k $= \tan 7° \tan 23° \tan 60° \tan 67° \tan 83°$

$= \tan (90° – 83°) \tan (90° – 67°) \tan 60° \tan 67° \tan 83°$

$= \cot 83° \cot 67° \tan 60° \tan 67° \tan 83°$

$= \cot 83° \tan 83° \cot 67° \tan 67° \tan 60°$

$$= \cot 83° \times \frac{1}{\cot 83°} \times \cot 67° \times \frac{1}{\cot 67°} \times \sqrt{3}$$

$$= \sqrt{3}$$

f=dk.kferh; lehdj.k gy djuk

vc ge fuEufyf[kr lehdj.k ij fopkj djrs g&

$\cos(90° - \theta) = \frac{1}{2}$ e vKkr dk.k θ dk eku ekye dju fy, ge fuEufyf[kr rjhd dk mi;kx djxA

$$\cos (90°–\theta) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \sin\theta = \sin 30°$$

$$\theta = 30°$$

vkb, bl dN vkj mnkgj.kk l le>r gA

mnkgj.k&15- ;fn $\sin 55° \text{ cosec } (90° – \theta) = 1$, rk θ dk eku Kkr dhft, tgk $0° \le \theta \le 90°$

gy%& $\sin 55° \text{ cosec } (90° – \theta) = 1$

$\Rightarrow \quad \sin (90° – 35°) \sec\theta = 1$

$\Rightarrow \quad \cos 35° . \sec\theta = 1$

$$\Rightarrow \quad \sec\theta = \frac{1}{\cos 35°}$$

$\Rightarrow \quad \sec\theta = \sec 35°$

$\therefore \quad \theta = 35°$

mnkgj.k&16- ;fn $\sin 34° = p$ gk] rk $\cot 56°$ dk eku Kkr djkA

gy%& $\sin 34° = p$

$\sin(90° - 56°) = p$

$\cos 56° = p$ .....(1)

ge tkur g fd $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\Rightarrow \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

$\Rightarrow \sin^2 56° = 1 - \cos^2 56°$

$\Rightarrow \sin^2 56° = 1 - p^2$ .....(2)

$\Rightarrow \sin 56° = \sqrt{1 - p^2}$

vr% leh- ¼1½ o ¼2½ l

$$\cot 56° = \frac{\cos 56°}{\sin 56°}$$

$$= \frac{p}{\sqrt{1-p^2}}$$

mnkgj.k&17- ;fn $\cot 3A = \tan(A - 22°)$ tgk $3A$ U;u dk.k g rk A dk eku Kkr dhft,A

gy& fn;k g & $\cot 3A = \tan(A - 22°)$

$\Rightarrow \tan(90° - 3A) = \tan(A - 22°)$

$\Rightarrow 90° - 3A = A - 22°$

$\Rightarrow 90° + 22° = A + 3A$

$\Rightarrow 112° = 4A$

$\Rightarrow A = \frac{112°}{4}$

$\therefore A = 28°$

f=dk.kferh; vuikrk d lc/kk dk ijd dk.kk d f=dk.kferh; vuikrk dk i;kx dj fl) fd;k tk ldrk gA vkb, n[k&

mnkgj.k&18- fl) dhft, fd& $\frac{\sin(90° - \theta)\cos(90° - \theta)}{\tan\theta} = \cos^2\theta$

gy& ck;k i{k $= \frac{\sin(90° - \theta)\cos(90° - \theta)}{\tan\theta}$

$$= \frac{\cos\theta \sin\theta}{\tan\theta}$$

$$= \frac{\cos\theta \sin\theta}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$$

$$= \frac{\cos^2\theta \sin\theta}{\sin\theta}$$

$$= \cos^2\theta$$

= nk;k i{k

mnkgj.k&19- fl) dhft, fd $\sin(90° - \theta)\sec\theta + \cos(90° - \theta)\operatorname{cosec}\theta = 2$

gy& ck;k i{k $= \sin(90° - \theta)\sec\theta + \cos(90° - \theta)\operatorname{cosec}\theta$

$$= \cos\theta \sec\theta + \sin\theta \operatorname{cosec}\theta$$

$$= \cos\theta \times \frac{1}{\cos\theta} + \sin\theta \times \frac{1}{\sin\theta}$$

$$= 1 + 1$$

$$= 2$$

= nk;k i{k

mnkgj.k&20- ;fn $\angle A, \angle B$ o $\angle C$ f=Hkt ABC d vr% dk.k gk rk fl) dhft, fd&

$$\sin\left(\frac{A+B}{2}\right) = \cos\frac{C}{2}$$

gy& fn;k g fd A, B o C f=Hkt ABC d vr%dk.k gA

rk $A + B + C = 180°$

$A + B = 180° - C$ .....(1)

iu% ck;k i{k $= \sin\left(\frac{A+B}{2}\right)$

$$= \sin\left(\frac{180° - C}{2}\right)$$

$$= \sin\left(\frac{180°}{2} - \frac{C}{2}\right)$$

$$= \sin\left(90° - \frac{C}{2}\right)$$

$$= \cos\frac{C}{2}$$

= nk;k i{k

vkb, vc ge n[k fd fn, x, dk.kk d f=dk.kferh; vuikr dk 0° l 45° d f=dk.kferh; vuikr e d l ifjofrr dj ldr gA

mnkgj.k&21- tan 59° + cot 75° dk 0° l 45° d chp d dk.kk d f=dk.kferh; vuikr e 0;Dr dhft,A

gy& $\tan 59° + \cot 75° = \tan(90° - 31°) + \cot(90° - 15°)$

$= \cot 31° + \tan 15°$

$[\because \tan(90° - \theta) = \cot\theta$

$\cot(90° - \theta) = \tan\theta]$

i'ukoyh&3

1- fuEufyf[kr e 0° l 45° d chp d f=dk.kferh; vuikr e 0;Dr dhft,&

(i) $\sin 56°$ (ii) $\tan 81°$ (iii) $\sec 73°$

2- fuEufyf[kr dk eku Kkr dhft,&

(i) $\dfrac{\cos 80°}{\sin 10°}$ (ii) $\dfrac{\sin 37°}{2\cos 53°}$ (iii) $3\sin 17° \sec 73°$

3- fuEufyf[kr dk eku Kkr dhft,&

(i) $\sin 64° - \cos 26°$

(ii) $3\cos 80° \operatorname{cosec} 10° + 2\cos 59° \operatorname{cosec} 31°$

(iii) $2\dfrac{\cos 67°}{\sin 23°} - \dfrac{\tan 40°}{\cot 50°} + \cos 0°$ (iv) $\sin^2 35° + \sin^2 55°$

(v) $\left(\dfrac{5\sin 35°}{\cos 55°}\right) + \left(\dfrac{\cos 55°}{2\sin 35°}\right) - 2\cos 60°$

4- fl) dhft, fd&

(i) $\sin 63° \cos 27° + \cos 63° \sin 27° = 1$

(ii) $\tan 15° \tan 36° \tan 45° \tan 54° \tan 75° = 1$

(iii) $\sin^2 85° + \sin^2 80° + \sin^2 10° + \sin^2 5° = 2$

5- fl) dhft, fd&

$$\sin(90° - \theta)\cos(90° - \theta) = \frac{\tan\theta}{1 + \cot^2(90° - \theta)}$$

6- fl) dhft, fd&

$$\frac{\cos\theta}{\sec\ (90°–\theta) + 1} + \frac{\sin(90° - \theta)}{\operatorname{cosec}\theta - 1} = 2\cot(90° - \theta)$$

7- fl) dhft, fd&

$$\frac{\tan(90° - \theta)}{\operatorname{cosec}^2\theta . \tan\theta} = \cos^2\theta$$

8- ;fn $\sin A = \cos B$ rk fl) dhft, fd& $A + B = 90°$

9- ;fn $\operatorname{cosec} 2A = \sec(A - 36°)$, tgk¡ $2A$,d U;wu dks.k g rks A dk eku Kkr dhft,A

10- ;fn $A + B = 90°$, $\sec A = a$, $\cot B = b$ rc fl) dhft, fd& $a^2 - b^2 = 1$

11- ;fn A, B o C f=Hkqt ABC d vUr%dks.k gks rks fl) dhft, fd&

$$\tan\left(\frac{B + C}{2}\right) = \cot\left(\frac{A}{2}\right)$$

12- ;fn $\sec 34° = x$ rks $\cot^2 56° + \operatorname{cosec} 56°$ dk eku Kkr dhft,A

geus lh[kk

1- f=dk.kferh; vuikrks e fuEufyf[kr lc/k gkr g&

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ tgk¡ $0° \le \theta \le 90°$

$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ tgk¡ $0° \le \theta < 90°$

$1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$ tgk¡ $0° < \theta \le 90°$

2- fdlh Hkh f=dk.kferh; vuikr dk fdlh vU; f=dk.kferh; vuikr d inks e fy[kk tk ldrk gA

3- lolfedk, o lehdj.k g tks dks.kk d pj d lHkh ekuk d fy, lR; gkr gA

4- dk.k θ d fdlh eku d fy, ;fn ,d f=dk.kferh; vuikr Kkr gk rk 'k"k f=dk.kferh; vuikr Kkr fd, tk ldr gA

5- ijd dk.kk d f=dk.kferh; vuikrk e fuEufyf[kr lc/k gkr g&

$\sin(90° - \theta) = \cos\theta$, $\cos(90° - \theta) = \sin\theta$

$\tan(90° - \theta) = \cot\theta$, $\cot(90° - \theta) = \tan\theta$

$\sec(90° - \theta) = \text{coesc}\,\theta$, $\text{cosec}(90° - \theta) = \sec\theta$

6- lolfedkvk dk tkpuk o fl) djuk, dk.kk d dN ekuk d vk/kkj ij ugh fd;k tk ldrkA

mÙkjekyk&2

1(i).	$\theta = 30°, 90°$	1(ii).	$\theta = 60°$	1(iii).	$\theta = 60°$
1(iv).	$\theta = 0, 60°$	1(v).	$\theta = 60°$		

mÙkjekyk&3

1.	(i)	cos 34°	(ii)	cot 9°	(iii)	cosec 17°
2.	(i)	1	(ii)	$\frac{1}{2}$	(iii)	3
3.	(i)	0	(ii)	5	(iii)	2
	(iv)	1	(v)	$\frac{9}{2}$		

9. 42°

12. $x^2 + x - 1$

10

अध्याय

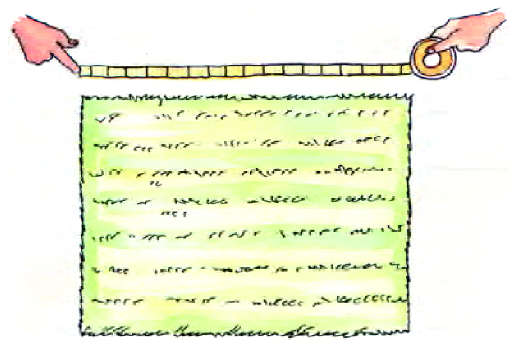
Åpkb ,o njh

[HEIGHT AND DISTANCE]

EZLV1S

vki viu fo|ky; d [ky enku dh yckb ,o pkMkb irk djuk pkgr g rk vki bldk ekiu dl djx\ bldk ekiu dju d fy, vkidk dkb ekiu := tl :yj ¼Ldy½] ekiu oky Qhr dh vko';drk gkxhA D;k ge :yj dh lgk;rk l enku dh yckb vklkuh l irk dj ldr g\ ble D;k dfBukb;k vk,xh\

jkt'k u dgk] :yj dh lgk;rk l ekiu ij ge :yj dk ckj&ckj mi;kx djuk gkxk D;kfd enku dh yckb vf/kd g ijr ckj&ckj mBku vkj j[ku e xyrh gk ldrh g vr% ge ekiu oky yc Qhr dk i;kx djxA



vkdfr&1

tkfgnk ckyh] enku dh yckb] pkMkb irk dju d fy, enku d ,d Nkj l nlj Nkj rd Qhr dk y tkuk gkxkA ,d Nkj ij ,d cPpk Qhr d ,d flj dk idM dj [kMk gk tk, vkj enku d nlj Nkj rd Qhr dk y tkdj ml i<u l njh irk py tk,xhA

teuk u iNk] D;k blh rjg ge [ktj d iM] okyhcky d enku e yx uV d [kHk dh Åpkb irk djuh gk rk bud Åijh flj l tehu rd dh njh ekiuh gkxh\ ij ;g FkkMk ef'dy gA iM vkj [kHk d f'k[kj rd ge dl igpx\

vlye u iNk] rk ge D;k djuk pkfg,\

;gk ge xf.kr dh dkulh rduhd dk i;kx dj\

D;k ge f=dk.kfefr dk i;kx dj Åpkb ,o njh irk dj ldr g\

vkb, n[k &

vki viu fo|ky; d >.M d [kHk dh Åpkb irk djuk pkgr gA ge tkur g fd f=dk.kferh; vuikr f=Hkt dh Hktkvk ,o dk.k d chp lc/k gA D;k vki >.M d [kHk dk ,d Hktk ydj ,d ledk.k f=Hkt cuk ldr g\ bl f=Hkt e [kHk dh Åpkb Kkr dju d fy; ge fdu ekuk dh vko';drk gkxh\

;fn fo|ky; d enku e dkb fcn A y tk [kHk d ikn fcn l 10 ehVj dh njh ij g ¼nf[k, vkÑfr&2 ½A fcn A l >.M d 'kh"k C dk feyku okyh j[kk] fcn A ij tehu d lkFk 60° dk dk.k cukrh gA rk ΔABC e

$\angle CAB = 60°$

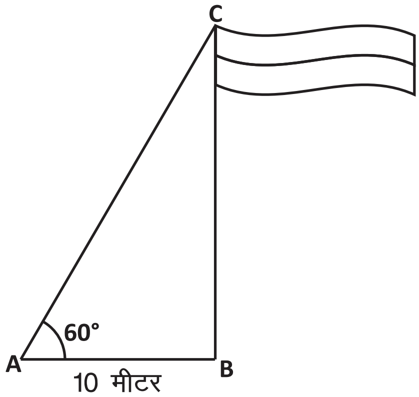
$AB = 10$ ehVj

$$\tan A = \frac{BC}{AB}$$

$$\tan 60° = \frac{BC}{10}$$

$BC = 10 \tan 60°$

$BC = 10\sqrt{3}$ ehVj



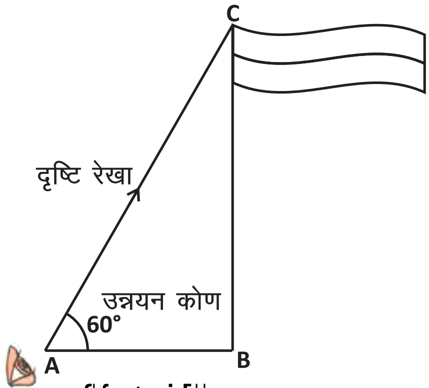
vkÑfr&2

bl idkj ge >.M d [kHk dh Åpkb f=dk.kfefr dk i;kx dj irk yxk ldr gA

mé;u dk.k

vkb, ge mijkDr vkÑfr&2 ij iu% fopkj djr gA ;fn vki enku e [kM gkdj >.M dk n[k rk vkidh vk[k dk fcn A ij yu ij vkidh vk[k l >.M d 'kh"k C dk feyku okyh j[kk AC nf'V j[kk dgykrh gA

>.M d [kHk dh Åpkb gekjh Åpkb l vf/kd gk rk mld 'kh"k dk n[ku d fy, ge Åij dh vkj n[kuk gkxkA



{kfrt j[kk

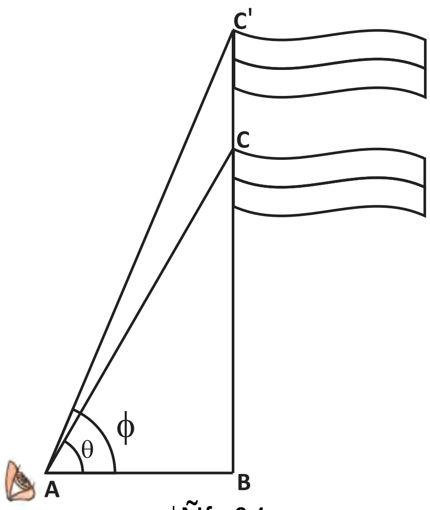
vkÑfr&3

gekjh vk[k l [kHk d 'kh"k dk feyku okyh nf'V j[kk AC o {kfrt j[kk AB d chp cuk dk.k mé;u dk.k dgykrk gA ¼nf[k, vkÑfr&3½ ;gk geu eku g fd vk[k A ij g vr% mé;u dk.k A l {kfrt j[kk vkj nf'V j[kk d chp dk dk.k gA

;fn [kHkk vkj Åpk gk rk flj dk vkj Åpk mBkuk iMxkA

bl fLFkfr e D;k mé;u dk.k igy l vf/kd gkxk\ ;kuh ϕ dk eku l θ l cMk gkxk\

>.M d [kHk dh Åpkb vkj vf/kd c<u d dkj.k vkidh nf'V j[kk o {kfrt j[kk d chp dk dk.k c< tkrk g ;kuh mé;u dk.k c< tkrk g¼vkdfr&4½



vkÑfr&4

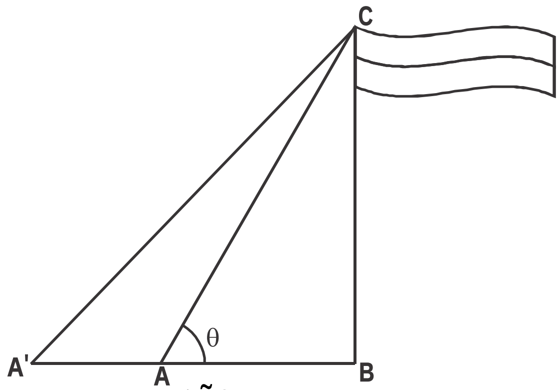
lkp ,o ppk dj

;fn >.M dh Åpkb de dj nh tk, rk mé;u dk.k d eku e D;k ifjoru vk,xk\

vkb,] vc ,d n l jh fLFkfr ij fopkj dj ;fn ge >.M dk fcn A l u n[kdj m l l FkkMk vkj nj A' l n[k ¼vkÑfr&5½

vki ik,x fd fcn A' l >.M d [kHk d 'kh"k dk n[k tku ij nf"V j[kk o {kfr t j[kk d chp dk dk.k de gk tkrk g ;kuh mé;u dk.k dk eku de gk tkrk gA

bl idkj geu ik;k fd mé;u dk.k dk eku oLr dh Åpkb d lkFk&lkFk c<rk g ijr oLr dh i{kd ¼n[ku oky½ l njh c<u ij Øe'k% de gkrk tkrk gA

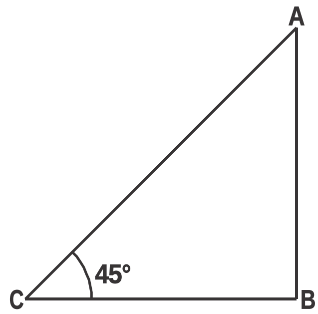


vkÑfr&5

f=dk.kfefr dk i;kx dj ior dh Åpkb] xgk d chp dh njh] egklkxj dh xgjkb dk ekiu fd;k tkrk gA [kxkyfon bldk i;kx] iFoh o l; d chp dh njh] egklkxj dh xgjkb dk ekiu fd;k tkrk gA [kxkyfon bldk i;kx] iFoh l xgk ,o rkjk dh nfj;k Kkr dju e djr gA

ge viu nfud thou e Hkh leL;kvk dk gy dju d fy, f=dk.kfefr dk mi;kx djr gA vkb, dN mnkgj.k n[k&

mnkgj.k&1- ,d Hkou d ikn fcn l 15 ehVj dh njh ij fLFkr fdlh fcn l Hkou d f'k[kj dk mé;u dk.k 45° gA Hkou dh Åpkb Kkr dhft,A



vkÑfr&6

gy& vkÑfr e AB Hkou dh Åpkb gA Hkou AB d ikn fcn B l 15 ehVj nj fLFkr fcn C l Hkou d f'k[kj A dk mé;u dk.k $\angle ACB = 45°$

eku yhft, Hkou dh Åpkb h ehVj g

rk ΔABC e $\tan 45° = \dfrac{AB}{BC}$

;k $\tan 45° = \dfrac{h}{15}$

;k $1 = \dfrac{h}{15}$ $\quad [\because \tan 45° = 1]$

$\therefore \quad h = 15$ ehVj

vr% Hkou dh Åpkb 15 ehVj gA

mnkgj.k&2- ,d lh/kh nhokj ij lh<h bl idkj j[kh xbZ g fd og tehu l $60°$ dk dk.k cukrh gA ;fn lh<h dk ikn fcnq nhokj l 4 ehVj njh ij gk rc lh<h dh yckbZ Kkr dhft,A

gy& ekuk fd AC lh<h g ftldh yckbZ x eh- g vFkkr $AC = x$ eh- fn;k x;k g fd lh<h dk ikn fcnq A nhokj l 4 eh- dh njh ij gA

vr% Δ ABC e $AB = 4$ eh-

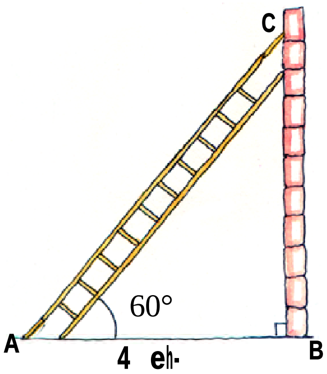
rFkk $\angle BAC = 60°$

rc $\cos 60° = \dfrac{AB}{AC}$

;k $\dfrac{1}{2} = \dfrac{4}{x}$

;k $x = 8$ ehVj

vr% lh<h dh yckbZ 8 ehVj gkxhA



vkÑfr&7

mnkgj.k&3- rt gok l VV ,d iM dk fljk >d dj iM d ikn l 6 ehVj dh njh ij tehu dk Nrk gA ;g fgLlk tehu l $60°$ dk dk.k cukrk gA ij iM dh Åpkb Kkr dhft,A

gy& iM dk VVk gvk Hkkx AC gA ¼nf[k,] vkdfr& 8½

fn;k x;k g fd VV fljs d 'kh"k l iM d ikn fcnq dh njh 6 eh- gA

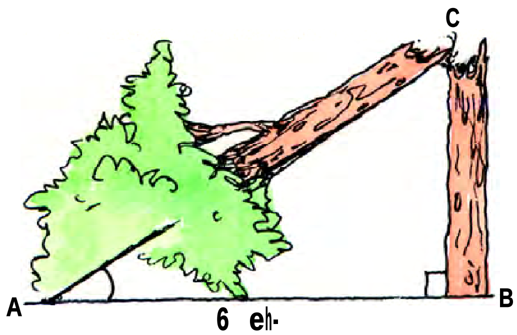
ledk.k ΔABC e

$$\tan 60° = \frac{BC}{AB}$$

$$\sqrt{3} = \frac{BC}{6}$$

$$BC = 6\sqrt{3} \text{ eh-}$$

iu% ledk.k ΔABC e



vkÑfr&8

$$\sin 60° = \frac{BC}{AC}$$

;k $\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{6\sqrt{3}}{AC}$

;k $AC = \dfrac{6\cancel{\sqrt{3}} \times 2}{\cancel{\sqrt{3}}}$

AC = 12 eh-

vr% iM dh Åpkb $= BC + AC$

$= 6\sqrt{3} + 12$

$= 6\left(\sqrt{3}+2\right)$ eh-

mnkgj.k%&4- 1-4 eh- yck ,d i{kd ,d ehukj l 25-6 eh- dh njh ij gA mldh vk[kk l ehukj d f'k[kj dk mé;u dk.k 45° gA ehukj dh Åpkb crkb,A

gy % ;gk BC ehukj g] AE i{kd g vkj $\angle CED$ mé;u dk.k gA

rFkk $AB = ED = 25.6$ eh-

$AE = BD = 1.4$ eh-

ledk.k ΔCDE e

$$\tan 45° = \frac{DC}{ED}$$

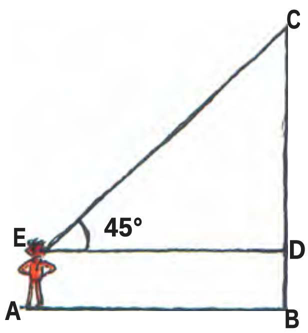
$$1 = \frac{DC}{25.6}$$

$DC = 25.6$ eh-

vr% ehukj dh Åpkb $= BD + DC$

$= 1.4 + 25.6$

$= 27$ eh-



vkÑfr&9

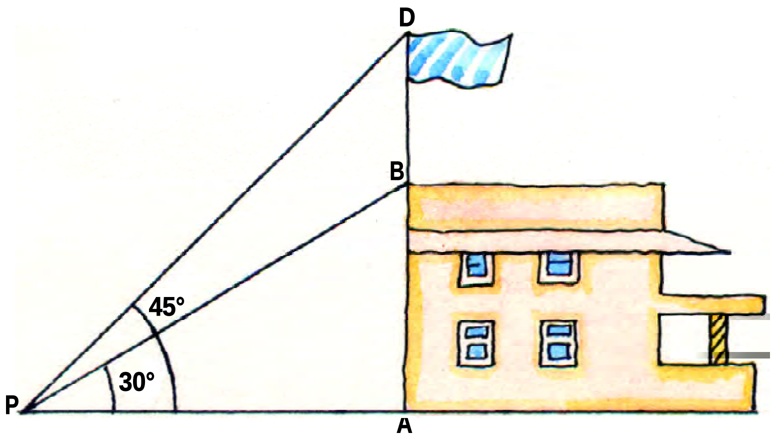
ukV % ;fn i{kd dh Åpkb u nh xb gk rk i{kd dk ,d fcn eku fy;k tkrk gA

Qjhnk d ?kj d ckgj ,d >.Mk yxk gvk g ¼nf[k, vkdfr&10½ Qjhnk bl >.M d MM dh yckb Kkr djuk pkgrh gA D;k >.M dk fcuk fudky MM dh yckb dk irk yxk ldr g\

vkb, n[k&

mnkgj.k%&5- Hkfe d ,d fcn P l 10 eh- Åp Hkou d f'k[kj dk mé;u dk.k 30° gA Hkou d f'k[kj ij ,d >.Mk yXkk;k x;k g vkj P l >.M d f'k[kj dk mé;u dk.k 45° gA rk >.M d MM dh yckb vkj fcn P l Hkou dh njh Kkr dhft,A

gy%& vkdfr&10 e AB Hkou dh Åpkb g] BD >.M d MM dh yckb g vkj P fn;k gvk fcn gA /;ku nhft, fd ;gk nk ledk.k f=Hkt PAB vkj PAD gA ge >.M d MM dh yckb ;kuh BD vkj fcn P l Hkou dh njh ;kuh PA irk djuk gA pfd ge Hkou dh Åpkb AB irk g blfy, igy ge ledk.k ΔPAB yxA



vkÑfr&10

;gk $\tan 30° = \dfrac{AB}{PA}$

⇒ ;kuh $\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{10}{PA}$

blfy, $PA = 10\sqrt{3}$ eh-

$\therefore$ P l Hkou dh njh $10\sqrt{3}$ eh-

vkb,] vc ge ;g eku y fd $BD = x$ eh- g

rFkk $AD = AB + BD = (10 + x)$ eh-

vc ledk.k ΔPAD e

$$\tan 45° = \frac{AD}{PA}$$

$$= \frac{10 + x}{10\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \quad 1 = \frac{10 + x}{10\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \quad 10\sqrt{3} = 10 + x$$

$$x = 10\left(\sqrt{3} - 1\right) \text{ eh-}$$

vr% >M d MM dh yckb $10\left(\sqrt{3}-1\right)$ eh- gA

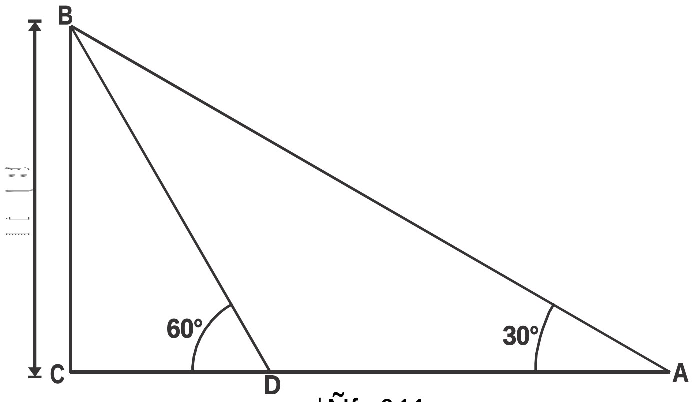
mé;u dk.k dk Åpkb ,o njh l lc/k ge n[k pd gA geu n[kk Fkk fd mé;u dk.k dk eku oLr dh Åpkb d c<u d lkFk c<rk g rFkk oLr dh i{kd l njh c<u d lkFk ?kVrk tkrk gA

vkb,] bu dFkuk ij vk/kkfjr mnkgj.kk dk gy dj&

mnkgj.k&6- ,d yMdk 30 eh- Åp ,d Hkou l dN njh ij [kMk gA tc og Åp Hkou dh vkj tkrk g rc mldh vk[k l Hkou d f'k[kj dk mé;u dk.k 30° l 60° gk tkrk gA crkb, fd og Hkou dh vkj fdruk pyk g\

gy& ekuk fd BC Hkou g rFkk fcn A ij yMdk [kMk gA

BC = 30 eh-ledk.k ΔABC e



vkÑfr&11

$$\tan 30° = \frac{BC}{AC}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{30}{AC}$$

$AC = 30\sqrt{3}$ eh-

iu% ledk.k ΔBCD e

$$\tan 60° = \frac{BC}{CD}$$

$$\tan 60° = \frac{30}{CD}$$

$$\sqrt{3} = \frac{30}{CD}$$

$$CD = \frac{30}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{10 \times 3}{\sqrt{3}}$$

$CD = 10\sqrt{3}$ eh-

vr% yMd }kjk Hkou dh vkj pyh xb njh $AD = AC - CD$

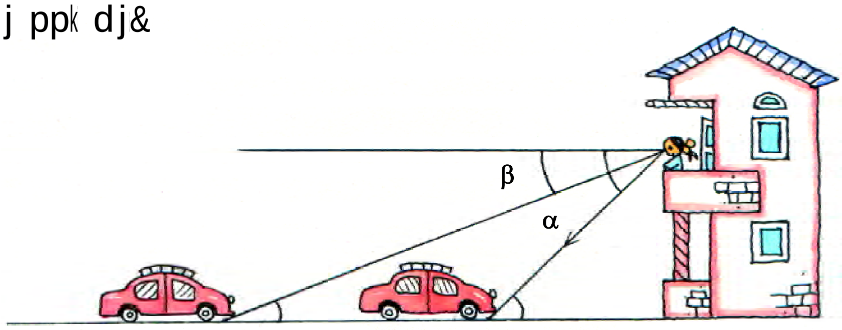
$= 30\sqrt{3} - 10\sqrt{3}$

$20\sqrt{3}$ eh- vr% yMdk Hkou dh vkj $20\sqrt{3}$ eh- pykA

voueu dk.k

vkb,] ,d vU; ifjfLFkfr ij ppk dj&

jek viu ?kj dh ckyduh e [kMh g vkj mld ?kj d rjQ vkrh gb dkj dk n[k jgh gA bl fLFkfr e {kfr t j[kk o nf"V j[kk d chp cuk dk.k voueu dk.k dgykrk gA ¼vkÑfr&12½



vkÑfr&12

vc ;fn ;g dkj ?kj d vkj ikl vk tk, rk ¼vkÑfr&12½ ml fLFkfr e voueu dk.k e D;k ifjoru vk,xk\

dk.k α o β e D;k lc/k gkxk\

D;k $\alpha > \beta$

$\alpha < \beta$

;k $\alpha = \beta$

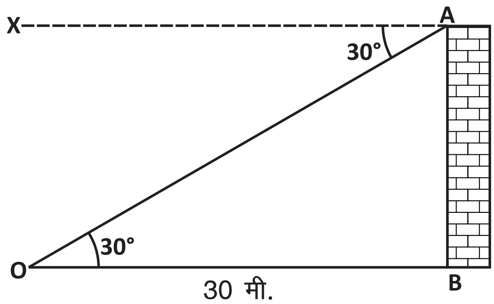
vki n[k ldr g fd dkj o ?kj d chp dh njh de gku ij voueu dk.k dk eku c<rk tkrk gA

;kuh $\alpha > \beta$

lkp ,o ppk dj

vkÑfr&12 e ;fn dkj jek d Bhd uhp vk tk, rc voueu dk.k D;k gkxk\

mnkgj.k&7- Hkou d f'k[kj l Hkfe ij fLFkr ,d xey dk voueu dk.k 30° gA ;fn xeyk Hkou d ikn fcn l 30 ehVj dh njh ij gk] rk Hkou dh Åpkb Kkr dhft,A



vkdfr&13

gy& ekuk AB Hkou g vkj fcUn O xeyk gA

voueu dk.k $\angle XAO = 30°$ vkj

$OB = 30$ ehVj

$\angle XAO = \angle AOB = 30°$

(,dkrj dk.k)

ΔOAB e

$$\tan 30° = \frac{AB}{OB}$$

$$AB = OB \tan 30°$$

$$= 30 \times \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{30}{\sqrt{3}}$$

$= 10\sqrt{3}$ ehVj

vr% Hkou dh Åpkb $10\sqrt{3}$ ehVj gA

mnkgj.k&8- ,d idk'k LrHk d f'k[kj l fdlh Hkou d f'k[kj ,o ry d voueu dk.k Øe'k% 45° o 60° gA ;fn Hkou dh Åpkb 12 eh- gk rk idk'k LrHk dh Åpkb ,o idk'k LrHk l Hkou dh njh Kkr dhft,A

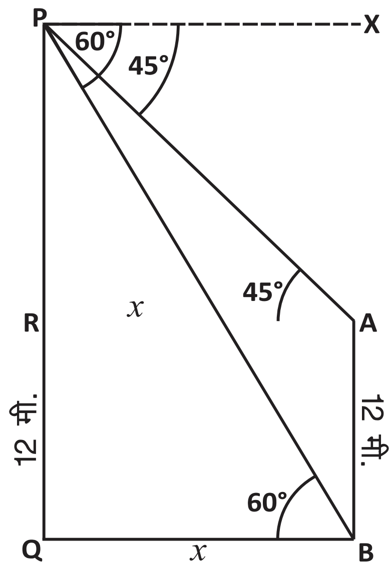
gy%& ekuk fd PQ ,d idk'k LrHk gA bl l x eh- njh ij ,d Hkou AB g ftl dh Åpkb 12 eh- gA

vr% QB = x eh-, AB = 12 eh-

idk'k LrHk d f'k[kj l Hkou d f'k[kj o ry dk voueu dk.k Øe'k% 45° o 60° gA

$\angle APX = 45°$ rFkk $\angle BPX = 60°$,o ekuk $PR = h$

ledk.k f=Hkt PRA e



vkÑfr&14

$$\tan 45° = \frac{PR}{RA}$$

$$\Rightarrow \quad 1 = \frac{PR}{x}$$

$$\Rightarrow \quad PR = x$$

$$\therefore h = x$$

ledk.k ΔPQB e

$$\Rightarrow \quad \tan 60° = \frac{PQ}{QB}$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{3} = \frac{h+12}{x}$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{3}x = h + 12$$

x dk eku j[ku ij

$$\Rightarrow \quad \sqrt{3}h = h + 12$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{3}h - h = 12$$

$$\Rightarrow \quad h\left(\sqrt{3}-1\right) = 12$$

$$\Rightarrow \quad h = \frac{12}{\sqrt{3}-1}$$

$$\Rightarrow \quad h = \frac{12}{\sqrt{3}-1} \times \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}$$ ¼gj dk ifje;hdj.k dju ij½

$$\Rightarrow \qquad h = \frac{12(\sqrt{3}+1)}{\left(\sqrt{3}\right)^2 - 1^2}$$

$$\Rightarrow \qquad h = \frac{12\left(\sqrt{3}+1\right)}{3-1}$$

$$\Rightarrow \qquad h = 6\left(\sqrt{3}+1\right)$$ eh-

idk'k LrHk dh Åpkb $= PR + RQ$

$= 6\left(\sqrt{3}+1\right)+12$

$= 6\sqrt{3}+6+12$

$= 6\sqrt{3}+18$

$= 6\left(\sqrt{3}+3\right)$ eh-

D;kfd $x = h$ blfy, $x = 6\left(\sqrt{3}+1\right)$ eh-

idk'k LrHk dh Åpkb $6\left(\sqrt{3}+3\right)$ eh- rFkk Hkou dh njh $6\left(\sqrt{3}+1\right)$ eh- gkxhA

mnkgj.k&9- fdlh Vhy d 'kh"k l enku e fLFkr nk edkuk] tk Vhy d foijhr vkj g]d ikn d voueu dk.k Øe'k% 30° o 60° gA ;fn Vhy dh Åpkb 60 eh- gk rc edkuk d chp dh njh Kkr dhft,A

gy& ekuk PQ Vhyk g rFkk A o B ml d foijhr vkj fLFkr nk edku gA

fn;k x;k g fd $PQ = 60$ eh-

$\angle XPA = 30°$

$\therefore \quad \angle PAQ = 30°$ ¼,dkrj dk.k½

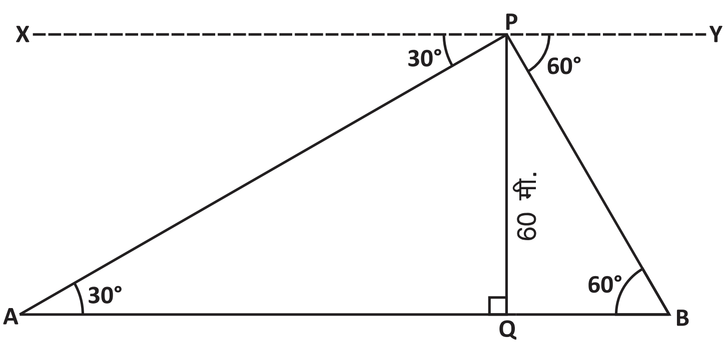
blh idkj

$\angle YPB = \angle PBQ = 60°$

ledk.k ΔPQA e

$$\tan 30° = \frac{PQ}{AQ}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{60}{AQ}$$



vkÑfr&15

AQ = $60\sqrt{3}$ eh-

iu% ΔPQB e

$$\tan 60° = \frac{PQ}{BQ}$$

$$\sqrt{3} = \frac{60}{BQ}$$

$$BQ = \frac{60}{\sqrt{3}}$$

$BQ = 20\sqrt{3}$ eh-

vr% edkuk d chp dh njh $AB = AQ + BQ$

$$= 60\sqrt{3} + 20\sqrt{3}$$

$AB = 80\sqrt{3}$ eh-

mnkgj.k&10- ,d lh/kh lMd ,d Hkou d ikn rd tkrh gA Hkou d f'k[kj ij [kMk ,d vkneh ,d dkj dk 30° d voueu dk.k ij n[krk gA dkj Hkou d ikn dh vkj ,d leku pky l tkrh gA 30 eh- pyu d ckn dkj dk voueu dk.k 60° gk tkrk gA ;fn bl fcn l Hkou d ikn fcn rd igpu e yxk le; 10 ld.M gk rk dkj dh pky ,o Hkou dh Åpkb Kkr dhft,A

gy% ekuk fd AB Hkou g ft ldh Åpkb h eh- g rFkk

BC = x eh-

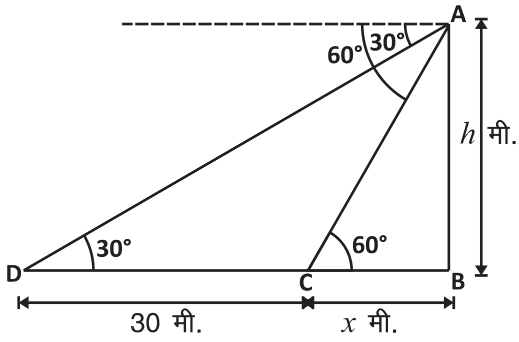
fn;k x;k g fd

CD = 30 eh-

$\angle ADB = 30°$

$\angle ACB = 60°$

rc ledk.k ΔABD e



vkÑfr&16

$$\tan 30° = \frac{AB}{DB}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{30+x}$$

$$h = \frac{30+x}{\sqrt{3}} \quad ....(1)$$

iu% ledk.k ΔABC e

$$\tan 60° = \frac{AB}{BC}$$

$$\sqrt{3} = \frac{h}{x}$$

$$h = x\sqrt{3} \qquad ....(2)$$

lehdj.k ¼1½ o ¼2½ l

$$\frac{30+x}{\sqrt{3}} = x\sqrt{3}$$

$\Rightarrow \quad 30 + x = 3x$

$\Rightarrow \quad 2x = 30$

$\Rightarrow \quad x = 15$ eh-

vr% Hkou dh Åpkb $h = x\sqrt{3} = 15\sqrt{3}$ eh-

i'u d vulkj

fcn C l Hkou d ikn fcn rd igpu e dkj dk 10 ld.M yxr g

$\therefore$ dkj dh pky ¾ $\frac{\text{njh}}{\text{le;}}$

$$= \frac{15}{10}$$

$= 1.5$ eh-@l-

i'ukoyh&1

1- tehu ij fLFkr fdlh fcn l 90 eh- nj fLFkr ehukj d f'k[kj dk mé;u dk.k 30° g rk ehukj dh Åpkb Kkr dhft,A

2- ,d mèok/kj LrHk ft ldh Åpkb $3h$ eh- g] d ikn fcn l $\sqrt{3}h$ njh ij fLFkr fdlh fcn l LrHk d f'k[kj dk mé;u dk.k Kkr dhft,A

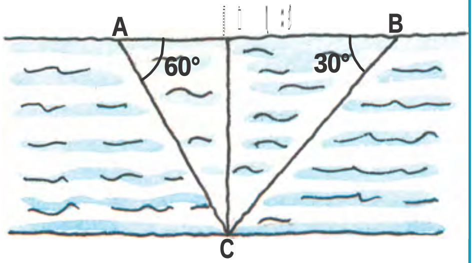
3- ,d irx Hkfe l 60 eh- Åpkb ij mM jgh gA irx e yxh Mkjh Hkfe d ,d fcn ij [kVh l cèkh gb gA Hkfe d lkFk Mkjh dk >dko 30° g rc ;g ekudj fd Mkjh i.kr% ruh gb g] mldh yckb Kkr dhft,A

4- fdlh LrHk d ikn fcn l 15 eh- Åp ,d Hkou d f'k[kj dk mé;u dk.k 30° g rFkk Hkou d ikn fcn l LrHk d f'k[kj dk mé;u dk.k 60° g rc LrHk dh Åpkb Kkr dhft,A

5- nk ehukjk d chp dh {kfrt njh 120 eh- gA nljh ehukj d 'kh"k l n[ku ij iFke ehukj d f'k[kj dk mé;u dk.k 30° gA ;fn nljh ehukj dh Åpkb 40 eh- g rk iFke ehukj dh Åpkb Kkr dhft,A

6- ,d ehukj d vk/kkj l ,d ljy j[kk e a vkj b njh ij fLFkr nk fcnvk l ehukj d f'k[kj d mé;u dk.k] ijd dk.k g rk fl) dhft, fd ehukj dh Åpkb $\sqrt{ab}$ gkxhA

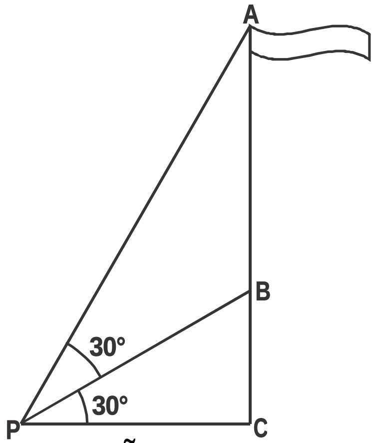
7- 15 ehVj Åp ,d Hkou d f'k[kj l fdlh ehukj dh pkVh dk mé;u dk.k 60° rFkk ehukj d ikn dk voueu dk.k 30° g rk ehukj dh Åpkb ,o Hkou l ehukj dh njh Kkr dhft,A



vkÑfr&17

8- unh d ,d fdukj ij nk fcn A vkj B d chp dh njh 40 eh- gA unh d ,d fdukj d lekrj nlj fdukj ij fcn C bl idkj g fd ∠BAC=60° rFkk ∠ABC=30°] rk unh dh pkMkb Kkr dhft,A ¼vkÑfr&17½

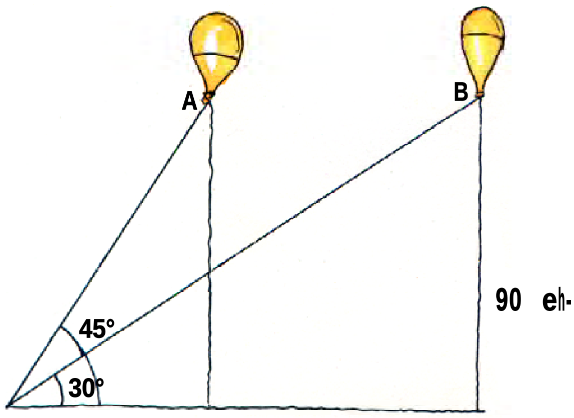
9- ,d efnj dk f'k[kj rFkk ml ij yxk >.Mk Hkfe d fdlh fcn ij Øe'k% 30° vkj 60° dk dk.k vrfjr djr gA ;fn efnj dh Åpkb 10 ehVj gk] rk >.M dh Åpkb Kkr dhft,A ¼vkÑfr&18½



vkÑfr&18

10- 40 ehVj pkMh lMd ij] nk leku Åpkb oky fctyh d [kHk ,d nlj d lkeu fLFkr gA nkuk [kHkk d chp lMd ij fLFkr fdlh ,d fcn l igy ,o nlj [kHk d mé;u dk.k Øe'k% 30° o 60° g rk [kHk dh Åpkb o [kHkk l ml fcn dh njh Kkr dhft,A

11- ,d i{kd Hkfe l 90 ehVj dh Åpkb ij {kfrt j[kk e mM jg xCckj dk n[krk gA ;fn fdlh {k.k i{kd dh vk[k l xCckj dk mé;u dk.k 45° g vkj dN le; ckn ;g mé;u dk.k ?kVdj 30° gk tkrk g rk xCckj }kjk fcn A l B rd r; dh xb njh Kkr dhft,A¼vkÑfr&19½



vkÑfr&19

geu lh[kk

1- f=dk.kferh; vuikrk dh enn l ge iMk]Hkouk]ehukjk]xgk] rkjk vkfn e ikjLifjd njh o Åpkb fudky ldr gA

2- nf"V j[kk & i{kd dh vk[k l i{kd }kjk n[kh xb oLr dk feyku okyh j[kk gkrh gA

3- n[kh xb oLr dk mé;u dk.k nf"V j[kk vkj {kfrt j[kk l cuk dk.k gkrk g tc oLr {kfrt j[kk l Åij gkrk gA

4- n[kh xb oLr dk voueu dk.k nf"V j[kk vkj {kfrt j[kk l cuk dk.k gkrk g tc oLr {kfrt j[kk l uhp gkrh gA

5- fdlh Hkou]ehukj vkfn d ikn d ikl fLFkr fdlh fcn l ¼Hkou ;k ehukj d½ f'k[kj dk mé;u dk.k] ikn l fcn dh njh c<u d lkFk&lkFk ?kVrk tkrk gA

6- fdlh Hkou]ehukj vkfn d f'k[kj l mld ikn d ikl fLFkr fdlh fcn d voueu dk.k dk eku ikn l fcn dh njh c<u d lkFk&lkFk ?kVrk tkrk gA

mÙkjekyk&1

¼1½ $30\sqrt{3}$ ehVj ¼2½ 60° ° ¼3½ 120 ehVj

¼4½ 45 ehVj ¼5½ $40\left(\sqrt{3}+1\right)$ ehVj

¼7½ 60 ehVj] $15\sqrt{3}$ ehVj ¼8½ $10\sqrt{3}$ ehVj ¼9½ 20 ehVj

¼10½ $10\sqrt{3}$ ehVj] igy [kHk l 30 ehVj]nlj [kHk l 10 ehVj

¼11½ $90\left(\sqrt{3}-1\right)$ ehVj

अध्याय
11

T;kferh; vkÑfr;k e le:irk

[SIMILARITY IN GEOMETRICAL SHAPES]

F15H53

ifjp; (Introduction)

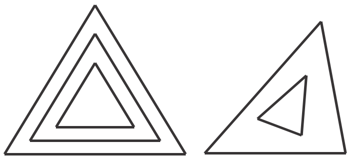
vkÑfr&1

ge viu vkl&ikl vyx&vyx rjg dh NkVh&cMh vk—fr;k n[kr gA bue l dN oÙkkdkj] dN ?kukdkj] dN f=Hk tkdkj t lh gkrh g vkj dN dk blh rjg dh vkdfr;k e ckV dj n[kk tk ldrk gA

vkÑfr&1 nf[k,] bl edku d fp= e Hkh fofHkUu T;kferh; vkÑfr;k n[kh tk ldrh gA bue dN vk;rkdkj g rk dN f=Hk tkdkjA

D;k vki bl e dN vkj vU; rjg dh vkÑfr;k << ldr g\ dku lh vkj vkdfr;k g\ lkfFk;k l ppk djA

leku vkdfr;k %& /;ku l n[ku ij ge ikr g fd bue l dN vkÑfr;k] vkdkj ¼size½ ,o vkÑfr ¼shape½ nkuk e leku gA ;kuh lokxle gA



(i) (ii)

vkÑfr&2

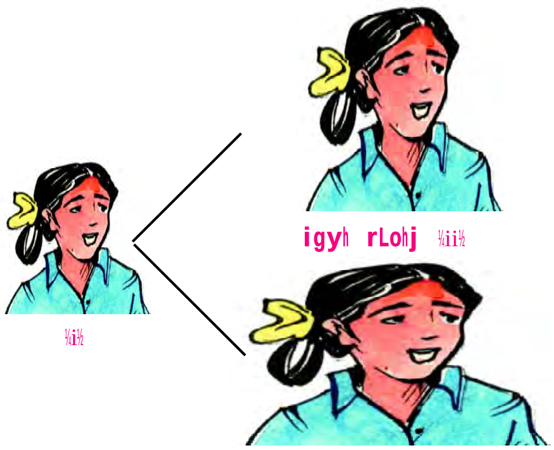
vc vkÑfr&2 n[k] 2¼i½ e rhu f=Hkt cu gA n[ku e bu rhuk f=Hktk d dk.k cjkcj yxr g ,o Hkqtk, ,d [kkl vuikr e cMh ;k NkVh fn[krh gA blfy, vkÑfr 2¼i½ e cu rhuk f=Hkt ,d tl yxr gA fdUr vkÑfr 2¼ii½ e nkuk f=Hkt d dk.k vyx&vyx gA vr% ;g nkuk f=Hkt fn[ku e gh fHkUu gA

lkekU;r% ,d tlh fn[ku okyh vkÑfr;k dk ge le:i dgk nr g ijUr xf.kr e le:i gku dh dN 'kr gkrh g D;k 2¼i½ e cu rhuk f=Hkt le:i g\ n[ku e rk ; f=Hkt le:i fn[k jg g] ij ;g dl fuf'pr dj\ vkx ge budh le:irk ij ppk djxA

Ldfyx ¼Scaling½

vDlj gekj lkeu ,lh ifjfLFk;k vkrh g] fd lh rLohj dk cMk djd n[kuk gk ;k fdlh [kr] edku] dkj[kku vFkok enku dk uD'kk] dkxt ij cukuk gA ;k fQj cu g, uD'k l okLrfod nfj;k] vkdkj] vk—fr] {k=Qy vkfn irk djuk gA bl rjg dh lHkh vko';drkvk d fy, ge Ldfyx dk mi;kx djr gA

Ldfyx dk vFk g vkdkj ¼size½ e cnyko djukA ;kuh vkdkj dk cMk ;k NkVk djukA fdUr cMk&NkVk dju e Hkh dN ckrk dk /;ku j[kuk iMrk g ft ll u;k fp= igy okys tlk fn[kA igy tl fn[ku dk D;k vFk g\



vkÑfr&3

vkdfr&3 d fp=k dk nf[k,A vkÑfr 3¼i½ dk cMk dju d i;kl e 3¼ii½ vkj 3¼iii½ iklr g, gA bu nkuk e l dku&lh rLohj pux\ tkfgj lh ckr g igyhA ble igyh rLohj bl rjg cMh dh xb g ftl l mldh vkdfr ey rLohj 3¼i½ d tlh gh jg blds fy, rLohj dk fuf'pr vuikr e cMk fd;k x;k gA ge ;g dg ldr g fd vkdfr 3¼i½ o 3¼ii½ le:i gA

vc vkdfr 3¼iii½ dk nf[k,A bl rLohj dh pkMkb] Åpkb d vuikr e ey rLohj dh pkMkb l vf/kd irhr gk jgh gA ;g ey rLohj l vyx fn[kkb iM jgh g vr% vkdfr 3¼i½ o 3¼iii½ le:i ugh gA

blfy, Ldfyx djr le; ge bl ckr dk /;ku j[kuk gkrk g fd vkdkj cMk ;k NkVk dj rk mldh vkdfr e dkb ifjoru u gk vkj le:irk dk x.k cjdkj jgA

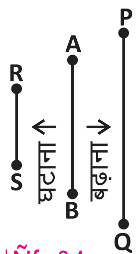
Ldy xq.kd ¼Scale Factor½

nk le:i vkdfr;k d eki e fo'k"k vuikr gkrk g ftl Ldy x.kd (Scale factor) dgr gA Ldy x.kd dk mi;kx djd fdlh vkdfr dk vko';drkuqlkj fuf'pr vuikr e cMk ;k NkVk fd;k tk ldrk gA

tl 5 leh- d j[kk[k.M dk 10 leh- dju d fy, Ldy x.kd 2 gkxk D;kfd $5\times2=10$A blh rjg 50 leh- × 20 leh- d uD'k dk 10 leh- × 4 leh- rd Ldy dju d fy, Ldy x.kd $\frac{1}{5}$;k 0-2 gkxkA $50\times\frac{1}{5}=10$ leh-]$20\times\frac{1}{5}=4$ leh-A ;kuh Ldfyx dju ij j[kk[k.M 2 xuk ¼cMk½ gk tk,xk vkj uD'kk $\frac{1}{5}$;k 0-2 xuk ¼NkVk½ gk tk,xkA

ge n[k ldr g fd ftl vuikr e uD'k dh ,d Hkktk de gbi g mlh vuikr e mldh nljh Hkktk Hkh de gb gA Ldy x.kd ;fn 1 l vf/kd g rk ub vkdfr cMh gkxh vkj ;fn Ldy x.kd 1 l de g rk ub vkdfr NkVh gkxhA

vc vkÑfr& 4 dk nf[k, j[kk[k.M $\overline{AB}$ dk cMk dju ij $\overline{PQ}$ vkj NkVk dju ij $\overline{RS}$ feyrk gA ekuk Ldy x.kd x gA



vkÑfr&4

(i) c<kuk (Dilation/Enlargement)

PQ $= x\,(AB)$ ¼pfd x Ldy x.kd g½

$$\frac{PQ}{AB}=x$$

D;kfd $PQ > AB$ g] blfy, $x > 1$

vr% vkdfr dk cMk dju (dilation) d fy, Ldy x.kd *1* l cMk gkuk pkfg,A

(ii) ?kVkuk (Reduction)

$RS = x(AB)$ ¼pfd x Ldy x.kd g½

$$\frac{RS}{AB} = x$$

D;kfd $RS < AB$ g] blfy, ;gk $x < 1$

Li"Vr% vkdfr dk NkVk dju (reduce) d fy, Ldy x.kd *1* l NkVk gkuk pkfg,A

djd n[k

1- 12 leh- yc ,d j[kk[k.M dk 36 leh- yck j[kk[k.M cuku d fy, Ldy x.kd D;k gkxk\ blh rjg 12 leh- d j[kk[k.M dh yckb dk 6 leh- djuk gk rk Ldy x.kd D;k gkuk pkfg,\

uD'kk vkj iSekuk

xko] ftyk] jkT; vkj jk"V d uD'kk dk cukr le; ,d cM {k= dk dkxt ij fn[kkuk gkrk gA ble vyx&vyx eki d ieku fy, tkr gA ;fn NÙkhlx< d uD'k e iekuk 1 leh- % 50]00]000 leh- ;k 1 leh- % 50 fdeh- fy[kk g rk bl D;k fu"d"k fudkyx\

jkfgr dgrk g fd 1 leh- % 50 fdeh- dk eryc uD'k ij 1 leh-, okLro e 50 fdeh- dk n'kkrk gA vr% 2 leh-] 50×2¾100 fdeh- dk rFkk 4 leh-] 50×4¾200 fdeh- dk n'kk,xkA

D;k vkidk jkfgr dh ckr Bhd yxh\ ;gk Ldy x.kd fdruk g\ nkLrk l ppk djA

lkp ,o ppk dj

¼1½ vki viu xko dk uD'kk cuku d fy, D;k iekuk yuk pkgx\ D;k\

¼2½ ¼i½ vkidk viuh fdrkc e cu Hkkjr d uD'k ¼20 leh-×20 leh-½ dk nhokj ¼3eh-×2eh½ ij cukuk gA D;k vki Ldy x.kd 1eh-¾12 leh- ydj ;g cuk ldr g\

¼ii½ ;fn ugh rk D;k\

¼iii½ Ldy x.kd vf/kdre fdruk fy;k tk, rkfd uD'kk 6eh-×4eh- nhokj ij cuk;k tk ld\

¼3½ viuh rglhy o ftyk d uD'kk dk cuku e vki dkulk Ldy yx vkj D;k\

i'zukoyh&1

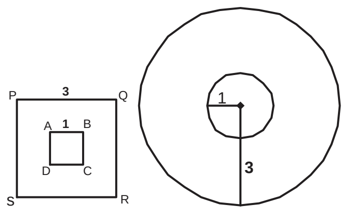
1- [kr d uD'k dk 1 lseh- ¾ 10 eh- Ldsy fd;k x;k gSA uD'ks esa [ksr dk eki 3 lseh-× 4 lseh- gSA [ksr dk okLrfod {ks=Qy oxZ eh- esa Kkr dhft,\

2- vkids ikl 3600 oxZ lseh- {ks=Qy dh oxkZdkj IysV gSA Ldsy x.kd 0-1 yrk gS, IysV dk Ldsy djsa Ldsfyx djus ds ckn HkqTkk dh eki Kkr dhft,\

3- fdlh 'kgj ds uD'ks esa jsyos LV'ku ls ,;jiksVZ ¼gokbZ vM~Mk½ dh nwjh 3 lseh- gSA ;fn uD'ks dk iSekuk 2 lseh- ¾ 7 fdeh- gks rks jsyos LV'ku ls ,;jiksVZ dh okLrfod nwjh fdeh- esa D;k gksxh\

oxZ, oa oÙk dh le:irk

bl Hkkx esa ge oxZ] oÙk] lekarj prqHkqZt vkfj f=Hkqt tSlh vkdfr;ksa esa le:irk ij ppkZ djsxsA ;gk vkdfr& 4 esa nks oxZ fn, x, gSa ftudh Hkqtk,a Øe'k% 1 lseh- vkSj 3 lseh- gSA D;k nksuks oxZ le:i gS\



vkÑfr&5 vkÑfr&6

pfd oxZ ds iR;sd dks.k dk eki 90° gksrk gS vkSj bud dks.k cjkcj ,o gjd dh pkjksa Hkqtk,sa lekuqikrh gksrh gSa] vr% nksuksa oxks± dh lHkh Hkqtk,¡ lekuqikrh gksxhA vr% nksuksa oxZ le:i gSA vc ge n[krs gSa fd oxZ ABCD dh iR;sd Hkqtk dk rhu xquk c<kus ij oxZ PQRS feyrk gSA ;gk Ldsy x.kd 3 gSA

vc vkdfr& 5 esa nks oÙk gSA ,d oÙk dh f=T;k 1 lseh- vkSj nwljs oÙk dh f=T;k 3 lseh- gSA D;k nksuksa oÙk le:i gS\

ge 1 lseh- f=T;k ds oÙk dks cMk djds 3 lseh- dk oÙk cuk ldrs gSA ;k 3 lseh- f=T;k ds oÙk ds vkdkj ¼lkbt½ dks ?kVkdj 1 lseh- f=T;k dk oÙk cuk ldrs gSA vr% ge dg ldrs gSa fd nksuksa oÙk le:i gSA

dkih esa vyx&vyx f=T;k ds oÙk cukb, vkSj irk dhft, fd os le:i gSa ;k ughaA

lkspsa ,oa ppkZ djsa

- D;k lHkh oxZ le:i gksrs gS\
- D;k lHkh oÙk le:i gksrs gS\

vU; vkÑfr;ksa esa le:irk %

oÙk o oxZ fo'ks"k rjg dh vkÑfr;k gSa] bUgsa doy ,d vo;o HkqTkk] f=T;k }kjk fu/kkZfjr fd;k tk ldrk gSA Ldsfyx djrs le; vkÑfr dk :i dk cjdjkj j[kuk gksrk gSA tgk bud fy, le:irk ds x.kksa ekius gSA vU; vkÑfr;ksa esa ,lk ugha gSA vyx&vyx idkj dh vk—fr;k d fy, le:irk tkpu d ekin.M vyx&vyx gkxA rk fQj ge d l irk py fd dkbZ nk vk—fr;k le:i g vFkok ugh A bl h d fy, le:i vk—fr;k dh dN fo'k"krk,¡ fuèkkfjr djuk mi;kxh gA

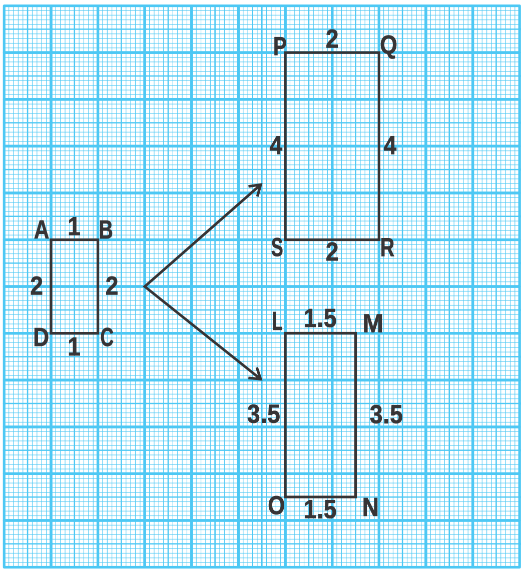
cgHkt k e le:irk %

nk cgHkt k d le:i gku dk vFk g fd ;fn mUg ,d fuf'pr Ldy x.kd l cMk vFkok NkVk fd;k tk,] ftl l mudh lHkh lxr Hkt k,¡ ,d gh vuikr e cMh vFkok NkVh ¼Ldy½ gk] rk o nkuk le:i gkxA vr% **cgHkt k e le:irk d fy, lHkh lxr dk.kk dk cjkcj gkuk rFkk lHkh lxr Hkt kvk dk ,d gh vuikr e gkuk vko';d g A**

vc ge vk;r vkj f=Hkt e le#irk dk le>x vkj le:irk tkpu d rjhd ij ckr djxA

vk;r e a le:irk dh st kp

xkQ ij cu vk;r d fp=k dk nf[k,¼vkÑfr&7½A ;fn vk;r ABCD ey vk—fr g rk D;k vk;r PQRS vkj vk;r LMNO] ey vkÑfr d le:i g\ n[ku ij rk ;g vkÑfr;k le:i fn[krh g ijUr okLro e ;g le:i g ;k ugh] ge irk djuk gkxkA



vkÑfr&7

vk;r d iR;d dk.k dk eki 90^0 gkrk g A vFkkr lHkh vk;rk d dk.k cjkcj gkxA pfd vk;r e vkeu&lkeu dh Hkt k,¡ cjkcj gkrh gA vr% vk;r e le:irk tkpu d fy, ge pkjk Hkt kvk dh ugh cfYd nk lyXu Hkt kvk d vuikr irk dju dh t :jr gkrh g A vkÑfr&7 n[kdj uhp cuh rkfydk ijh dhft ,

rkfydk&1

Hkt kvk dh eki		lxr Hkt kvk dk vuikr
vk;r ABCD	vk;r PQRS	
$AB = 1$	$PQ = 2$	$\frac{PQ}{AB} = \frac{2}{1}$
$BC = 2$	$QR = 4$	$\frac{QR}{BC} = \frac{4}{2} = \frac{2}{1}$

vk;r PQRS vkj vk;r ABCD dh lxr Hkktkvk dk vuikr leku gA ;g vuikr

$$\frac{PQ}{AB}=\frac{QR}{BC}=2$$

$$\therefore \frac{PQ}{AB}=\frac{QR}{BC}=\frac{RS}{CD}=\frac{SP}{DA}=2$$

pfd vk;r PQRS vkj ABCD d lHkh lxr Hkktkvk dk vuikr cjkcj gA ;gk Ldy x.kd '2' gA Hkktk PQ, Hkktk AB dh nxuh g A nkuk vk;r le:i gA bl xf.krh; :i e bl rjg fy[kx& vk;r ABCD ~ vk;r PQRS, tgk '~' le:irk dk fpà gA

rkfydk&2

Hkktkvk dh eki		lxr Hkktkvk dk vuikr
vk;r ABCD	vk;r LMNO	
AB= 1	LM = 1.5	$\frac{LM}{AB}=\frac{1.5}{1}$
BC = 2	MN = 3.5	$\frac{MN}{BC}=\frac{3.5}{2}=\frac{1.75}{1}$

vc rkfydk&2 dk n[kdj vk;r ABCD vkj LMNO d chp rYyuk dhft, A D;k vk;r ABCD vkj vk;r LMNO le:i g\

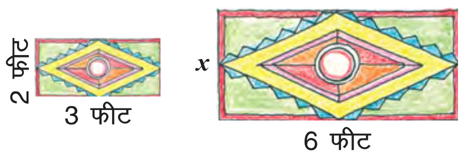
;gk ,d lxr Hkktk dk vuikr 1-5 g vkj nljh lxr Hkktk dk vuikr 1-75 gA pfd lxr Hkktk, lekuikfrd ugh gA blfy, vk;r ABCD vkj vk;r LMNO le:i ugh g A

djdsn[k

fp= e nkuk pknj le:i g] rk&

(i) Ldy x.kd fdruk gkxk\

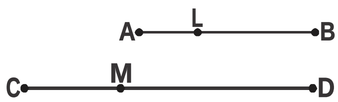
(ii) x dk eku Kkr dhft , A



(iii) pknjk d ifjeki vkj {k=Qy dk vuikr fdruk g\

js[kk[kMa dk lekuikfrd foHkktu

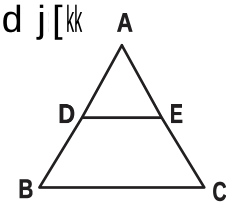
fcUn L vkj M, $\overline{AB}$ vkj $\overline{CD}$ ij fLFkr gA



;fn $\frac{AL}{LB}=\frac{CM}{MD}$ g rk ge dgr g fd $\overline{AB}$ vkj $\overline{CD}$ L vkj M }kjk lekuikfrd :i l foHkkftr gA bl fu;e dk mi;kx ge f=Hkktk dh le:irk dk ij[ku d fy, djxA

iżes; 1 %& ;fn fdlh f=Hkt dh ,d Hkktk d lekrj ckdh nk Hkktkvk dk fHkUu&fHkUu fcnvk ij ifrPNn djrh gb ,d j[kk [khph tk,] rk ;g j[kk mu nkuk Hkktkvk dk ,d gh vuikr e foHkkftr djrh gA

miifÙk % ge ,d f=Hkt ABC fn;k g] ft le Hkktk BC d lekrj [khph xb ,d j[kk vU; nk Hkktkvk AB vkj AC dk Øe'k% D vkj E ij dkVrh gA



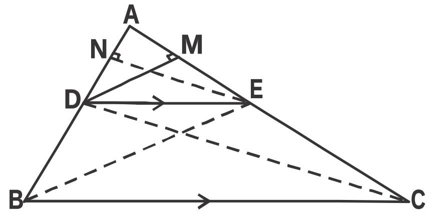
vkÑfr&8 (i)

ge fl) djuk g fd $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

B dk E l rFkk C dk D l feykb, rFkk $DM \perp AC$,o $EN \perp AB$ [khfp, A

pfd ΔADE dk {k=Qy ¾ $\frac{1}{2}$ × vk/kkj × Åpkb

¾ $\frac{1}{2} \times AD \times EN$



vkÑfr&8 (ii)

ΔADE d {k=Qy dk $ar\,(ADE)$ l Hkh 0;Dr fd;k tkrk gA

vr% $ar\,(ADE)$ ¾ $\frac{1}{2} \times AD \times EN$

rFkk $ar\,(BDE)$ ¾ $\frac{1}{2} \times DB \times EN$

blh idkj $ar\,(ADE)$ ¾ $\frac{1}{2} \times AE \times DM$ rFkk $ar\,(DEC)$ ¾ $\frac{1}{2} \times EC \times DM$

vr% $$\frac{ar(ADE)}{ar(BDE)} = \frac{\frac{1}{2}\times AD\times EN}{\frac{1}{2}\times DB\times EN} = \frac{AD}{DB}$$ ------------- ¼1½

rFkk $$\frac{ar(ADE)}{ar(DEC)} = \frac{\frac{1}{2}\times AE\times DM}{\frac{1}{2}\times EC\times DM} = \frac{AE}{EC}$$ -------------- ¼2½

/;ku nhft, fd ΔBDE vkj ΔDEC ,d gh vk/kkj DE rFkk lekrj j[kkvk BC vkj DE d chp cu nk f=Hkt gA

vr% $ar(BDE) = ar(DEC)$ -------------- ¼3½

blfy, ¼1½] ¼2½ vkj ¼3½ l

$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ ¼;g vk/kkjHkr lekuikfrd ie; g½ bl ie; dk foyke Hkh fl) fd;k tk ldrk g A vkb, n[k&

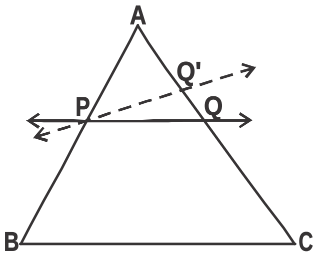
ie;s 2 %& ;fn ,d js[kk fdlh f=Hkt dh nks Hkqtkvksa dks ,d gh vuqikr esa foHkkftr djs] rks og rhljh Hkqtk ds lekarj gksrh gSA

miifÙk % bl ie; dks fl) djus ds fy, ge ,d js[kk PQ, bl izdkj ysrs gSa fd $\frac{AP}{PB}=\frac{AQ}{QC}$ vkSj blds foijhr ;g ekurs gSa fd PQ, Hkqtk BC ds lekarj ugha gSA

vc ;fn PQ, Hkqtk BC ds lekarj ugha gS] rks BC ds lekarj dksbZ nwljh js[kk gksxhA eku yks js[kk PQ' og js[kk gS tks BC ds lekarj gSA

vr% $\frac{AP}{PB}=\frac{AQ'}{Q'C}$ gksxk ¼vk/kkjHkwr lekuqikfrd ie; ls½

ijUrq $\frac{AP}{PB}=\frac{AQ}{QC}$ gSA



vkÑfr&9

blfy, $\frac{AQ}{QC}=\frac{AQ'}{Q'C}$

nksuksa i{kksa esa 1 tksMus ij

$$\frac{AQ}{QC}+1=\frac{AQ'}{Q'C}+1$$

$$\frac{AQ+QC}{QC}=\frac{AQ'+Q'C}{Q'C}$$

$$\therefore \frac{AC}{QC}=\frac{AC}{Q'C} \quad \text{vr\%} \quad QC=Q'C$$

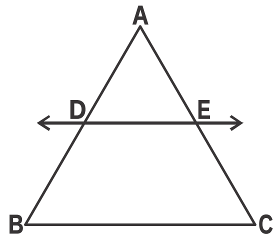
yfdu ,slk rHkh lEHko gksxk tc Q ,o Q' ,d gh fcUnq gksA

blfy, PQ || BC gSA

vkb,] bu ie;ksa ij vk/kkfjr dqN mnkgj.k n[ksa g&

mnkgj.k&1- ;fn dksbZ js[kk ΔABC dh Hkqtkvksa AB vkSj AC dks Øe'k% D vkSj E ij ifrPNn djs rFkk Hkqtk BC ds lekarj gks] rks fl) dhft, fd $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$A

gy%& DE || BC ¼fn;k g½



vkÑfr&10

vr% $$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$$

vFkkZr $$\frac{DB}{AD}=\frac{EC}{AE}$$

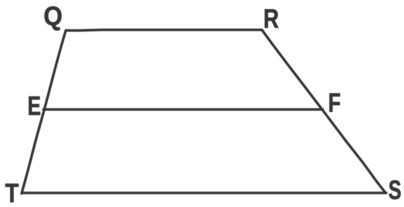
;k $$\frac{DB}{AD}+1=\frac{EC}{AE}+1$$

;k $$\frac{DB+AD}{AD}=\frac{EC+AE}{AE}$$

;k $$\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$$

vr% $$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$$

mnkgj.k&2- QRST ,d leyac prqHkqZt gS ftlesa QR || TS gSA vlekarj Hkqtkvksa QT vkSj RS ij Øe'k% fcUnq E vkSj F bl izdkj fLFkr gSa fd EF Hkqtk QR ds lekarj gSA n'kkZb, fd $\frac{QE}{ET}=\frac{RF}{FS}$ gSA



vkÑfr&11 (i)

gy& Q dks S ls feykb, tks EF dks fcanq G ij izfrPNsn djsA

QR || TS vkSj EF || QR ¼fn;k gS½ vkÑfr&10 (ii)

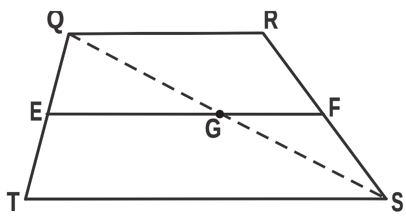
blfy, EF || TS ¼,d gh js[kk ds lekarj js[kk,¡ ijLij lekarj gksrh gSa½

vc ΔQTS esa EG || TS ¼D;ksafd EF || TS½

vr% $\frac{QE}{ET}=\frac{QG}{GS}$ ------ ¼1½

blh izdkj ΔSQR esa

$\frac{GS}{QG}=\frac{FS}{RF}$ vFkkZr $\frac{QG}{GS}=\frac{RF}{FS}$ ------ ¼2½



vkÑfr&11 (ii)

lehñ ¼1½ vkSj ¼2½ ls $\frac{QE}{ET}=\frac{RF}{FS}$

iźukoy h&2

1- ,d oÙkkdkj enku dh f=T;k 52 ehVj gA bl enku dk uD'kk dkxt ij cukb, ft le iekuk 13 ehVj % 1 l eh- gkA uD'k e enku dh f=T;k D;k gkxh\

2- fd lh vk;r dh nk vklUu Hkt kvk dh eki Øe'k% 5 l eh- vkj 7-5 l eh- gA fuEu Ldy x.kd ekur g, u, vk;rk dh Hkt kvk dh eki vkj {k=Qy irk dhft ,&

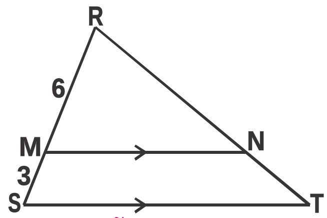
(i) 0.8

(ii) 1.2

(iii) 1.0

Ldy x.kd *1* ekuu ij feyk vk;r D;k okLrfod vk;r d lokxle g\

3- vkÑfr&12 (i) e $MN \parallel ST$ rc fuEufyf[kr dk eku irk dhft ,A



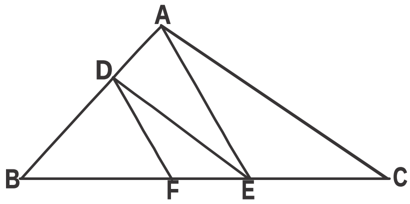
vkÑfr&12 (i)

(i) $\frac{TN}{NR}$ (ii) $\frac{TR}{NR}$

(iii) $\frac{TN}{RT}$

4- vk/kkjHkr lekuikfrd ie; (Basic proportionality theorem) dk mi;kx djr g, fl) dhft , fd ,d f=Hkt dh ,d Hkt k d e/;&fcUn l gkdj nl jh Hkt k d lekrj [khph xb j[kk rhl jh Hkt k dk lef}Hkkft r djrh gA

5- vk—fr e $DF \parallel AE$ vkj $DE \parallel AC$ gA fl) dhft , fd $\frac{BF}{FE} = \frac{BE}{EC}$ gA vkÑfr&12 (ii)



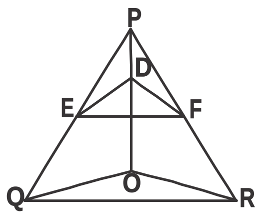
vkÑfr&12 (ii)

6. fd lh ΔPQR dh Hkt kvk PQ vkj PR ij Øe'k% fcn E vkj F fLFkr gA fuEufyf[kr e l iR;d fLFkfr d fy, crkb, fd D;k $EF \parallel QR$ g%

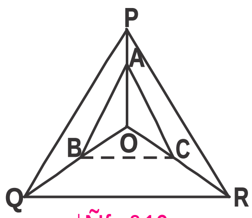
(i) PE = 3.9 l eh-, EQ = 3 l eh-, PF = 3.6 l eh- vkj FR = 2.4 l eh-

(ii) PE = 4 l eh-, QE = 4.5 l eh-, PF = 8 l eh- vkj RF = 9 l eh-

(iii) PQ = 1.28 l eh-, PR = 2.56 l eh-, PE = 0.18 l eh- vkj PF = 0.36 l eh-



vkÑfr&12 (iii)



vkÑfr&12 (iv)

7- vkÑfr&12 (iii) e $DE \parallel OQ$ vkj $DF \parallel OR$ gA n'kkb, fd $EF \parallel QR$ gA

8. vkÑfr&12 (iv) e OP, OQ vkj OR ij Øe'k% rhu fcUn A, B vkj C bl idkj fLFkr g fd $AB \parallel PQ$ vkj $AC \parallel PR$ gA n'kkb, fd $BC \parallel QR$ gA

lkdr %& ftu lokyk e vko';drk gk fp= cukdj gy djA blls vkluh gkxhA

lekarj prqHkqZt e al e:irk %&

D;k vk;rk dh le:irk dh dlkfV;k lekrj prHkt e le:irk tkpu d fy, i;kIr gkxh\ tkfgj g fd ;g i;kIr ugh g D;kfd lekrj prHkt d dk.k cjkcj ugh gkrA vr% ge ,d vkj ie; rd igpr gA

ire; 3 %& ;fn nk lekrj prHkt e lxr dk.k cjkcj gk] rk mudh lHkh lxr Hkt k,; ,d gh vuikr e ¼lekuikrh½ gkrh g] vr% ,l lekrj prHkt le:i gkr gA

miifÙk %& ie; d dFkuku lkj ,l nk lekrj prHkt ABCD vkj PQRS y tgk] $\angle A=\angle P, \angle B=\angle Q$

vkj $\angle C=\angle R$, $\angle D=\angle S$ ¼vkÑfr&13 (i), (ii)½

lekrj prHkt PQRS e S dk Q l feykb, rFkk PS vkj SR ij nk fcn Øe'k% A' rFkk C' bl idkj yhft , fd

$AD=A'S$, $DC=SC'$

rFkk $\angle DAB=\angle SA'B'$ fQj B' dk C' l feykb,A

vc $\triangle PSQ$ vkj $\triangle A'SB'$ e $\angle SPQ=\angle SA'B'$ ¼fn;k g½

$\therefore$ $A'B' \parallel PQ$ ¼ PQ vkj A'B' dk fr;d j[kk PS ifrPNn djrh g ,o bl l cu lxr dk.k cjkcj gA½

vc $\triangle PSQ$ e $A'B' \parallel PQ \parallel SR$] rk vk/kkjHkr lekuikfrd ie; l

$$\frac{PS}{A'S}=\frac{PQ}{A'B'}=\frac{QS}{B'S}$$ gkxk ¼D;k\½

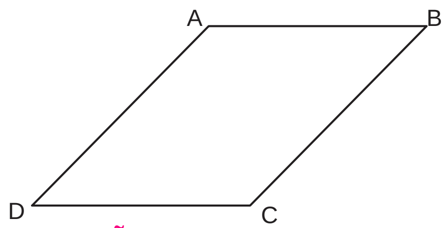
$$\frac{PS}{AD}=\frac{PQ}{AB}=\frac{QS}{B'S}$$ gkxk ¼D;k\½ -----------¼1½

blh idkj $\triangle SQR$ e Hkh $\frac{SR}{SC'}=\frac{QR}{B'C'}=\frac{QS}{B'S}$

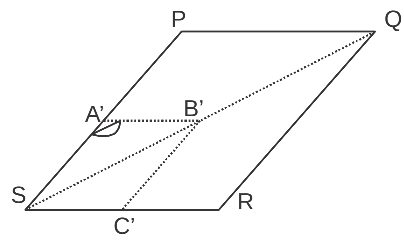
;k $\frac{SR}{CD}=\frac{QR}{BC}=\frac{QS}{B'S}$ ¼D;k\½ -----------¼2½

¼1½ vkj ¼2½ l

$$\frac{PQ}{AB}=\frac{QR}{BC}=\frac{SR}{CD}=\frac{PS}{AD}$$ ¼D;k\½



vkÑfr&13 (i)



vkÑfr&13 (ii)

vr% ;fn ge ;g eku fd nk lekrj prHkt d lxr dk.k cjkcj g] rk ge ikr g fd mudh pkjk lxr Hkt k,; lekuikfrd gkxhA

D;k bldk foykse Hkh lR; gkxk\

izes; 4 %& ;fn nk lekrj prHkt e lxr Hkt k, lekuikfrd rFkk mud lxr dk.k cjkcj gk rk o lekrj prHkt le:i gkx A

mi fÙk %& ;g dFku Lo; fl) dhft ,A

fu"d"kZ %&

Åij fy[k x, nkuk ie;k l ;g fu"d"k fudky ldr g fd nkuk dlkfV;k vFkkr ¼i½ lxr dk.k cjkcj gk ¼ii½ lxr Hkt k, ,d gh vuikr e gk] e l doy fdlh ,d dk lr"V gkuk i;klr gA lekrj prHkt e le:irk d fy, nkuk dlkfV;k dh vko';drk ugh gkrh D;kfd ,d l Lor% nljh dlkVh iklr gk tkrh gA

blh rjg vU; cgHkt k d tkMk ¼leyEc prHkt] le prHkt] ipHkt vkfn½ e le:irk dk tkpk tk ldrk g A

djds ns[ka

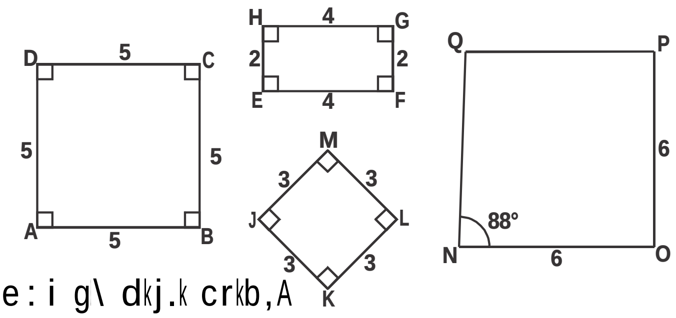
1- D;k fn, x, prHkt le:i g\ dkj.k lfgr fyf[k,&

(i) ABCD vkj EFGH

(ii) ABCD vkj JKLM

(iii) ABCD vkj NOPQ

(iv) JKLM vkj NOPQ



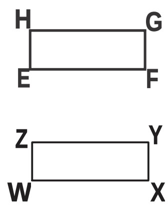
2- D;k EFGH vkj JKLM le:i g\ dkj.k crkb,A

3- EFGH d le:i ,d prHkt cukb,A

D;k lokxle vkÑfr;k le:i Hkh gkrh g \

vkb,] le:irk vkj lokxlerk e lc/k le>r gA

nk prHkt EFGH o WXYZ lokxle g vFkkr EFGH ≅ WXYZ, blfy, budh lxr vklUu Hkt kvk dh eki o lxr dk.k cjkcj gkx A



vkÑfr&14

$\therefore$ EF = WX, FG = XY, GH = YZ vkj HE = ZW

;k $\frac{EF}{WX}=1, \frac{FG}{XY}=1, \frac{GH}{YZ}=1$ vkj $\frac{HE}{ZW}=1$

$$\therefore \frac{EF}{WX}=\frac{FG}{XY}=\frac{GH}{YZ}=\frac{HF}{ZW}=1$$

Li"Vr% nkuk prHkt k dh Hkt k, lekuikfrd g blfy, ; prHkt le:i gkxA vFkkr lokxlerk e le:irk dh nkuk t:jr ijh gkrh gA

l kpa , oa ppkZ dja

D;k lHkh le:i vkdfr;k lokxle Hkh gkrh gA dkj.k lfgr le>k,A

le:i vkÑfr;k d ifjeki e lc/k

;fn nk vk—fr;k le:i gk] rk D;k ge mu vk—fr;k d ifjeki e lc/k crk ldr g\ ekuk ge nk le:i cgHkt fn, g] ftud Ldy x.kd m gA le:irk dh dlkVh d vulkj&

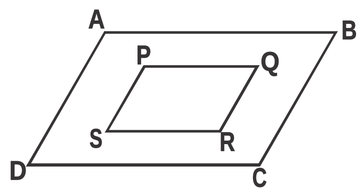
$$\frac{AB}{PQ}=\frac{BC}{QR}=\frac{CD}{RS}=\frac{DA}{SP}=m$$ ¼lxr Hkt k, lekuikfrd g½ ---------------¼1½

$AB = mPQ$ ------------- ¼2½

$BC = mQR$ ------------ ¼3½

$CD = mRS$ -------------- ¼4½

vkj $DA = mSP$---------------¼5½



vkb, bud ifjeki irk djr g&

cgHkt $ABCD$ dk ifjeki $= AB + BC + CD + DA$ --------------- ¼6½

rFkk cgHkt $PQRS$ dk ifjeki $= PQ + QR + RS + SP$ --------------- ¼7½

¼6½ o ¼7½ l

$$\frac{\text{cgHkt } ABCD \text{ dk ifjeki}}{\text{cgHkt } PQRS \text{ dk ifjeki}}=\frac{AB+BC+CD+DA}{PQ+QR+RS+SP}$$

¼2½] ¼3½] ¼4½ vkj ¼5½ l&

$$\frac{\text{cgHkt } ABCD \text{ dk ifjeki}}{\text{cgHkt } PQRS \text{ dk ifjeki}}=\frac{m(PQ+QR+RS+SP)}{(PQ+QR+RS+SP)}$$

$$\frac{\text{cgHkt } ABCD \text{ dk ifjeki}}{\text{cgHkt } PQRS \text{ dk ifjeki}}=m=\frac{AB}{PQ}=\frac{BC}{QR}=\frac{CD}{RS}=\frac{DA}{SP}$$ ¼1½ l

vFkkr fdUgh nk le:i cgHktk d ifjeki dk vuikr] mudh lxr Hktkvk d vuikr vkj Ldy x.kd d cjkcj gkrk gA

mnkgj.k&3- nh xbl vkdfr e ;fn prHkt $ABCD \sim$ prHkt $PQRS$ g rk&

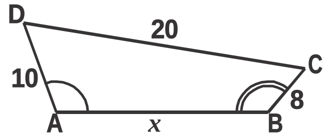
(i) Ldy x.kd D;k gkxk\ ¼prHkt $ABCD$ dk prHkt $PQRS$ l½

(ii) x, y vkj z dk eku Kkr dhft, A

(iii) prHkt ABCD dk ifjeki fdruk g\

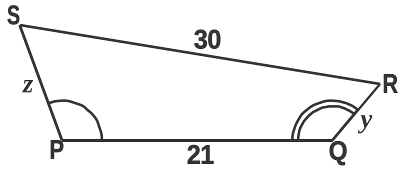
(iv) nkuk prHkt k d ifjekik dk vuikr D;k gkxk\

gy& (i) lxr Hkt kvk dk vuikr g&



$$\frac{CD}{RS} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3} \quad \text{¼Ldy x.kd½}$$

(ii) pfd fn, x, nkuk prHkt le:i g vr% mudh lxr Hkt k, lekuikfrd gkxh&



$$\frac{CD}{RS} = \frac{AB}{PQ}$$

$$\therefore \frac{2}{3} = \frac{x}{21}$$

$$x = 14$$

$$\text{rFkk} \quad \frac{CD}{RS} = \frac{BC}{QR}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{8}{y}$$

$$y = 12$$

$$\frac{CD}{RS} = \frac{AD}{PS}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{10}{z}$$

$$z = 15$$

(iii) prHkt ABCD dk ifjeki g %

10 $ 20 $ 8 $ 14 ¾ 52 bdkb

(iv) nkuk prHkt k dk ifjeki dk vuikr gkxk&

$$\frac{\text{prHkt ABCD dk ifjeki}}{\text{prHkt PQRS dk ifjeki}} = \frac{2}{3} \quad \text{tk fd Ldy x.kd d cjkcj gA}$$

i'zukoyh 8&3

1- fn, x, fp= e cgHkt le:i g rk fuEu d eku Kkr dhft,A

(i) OP

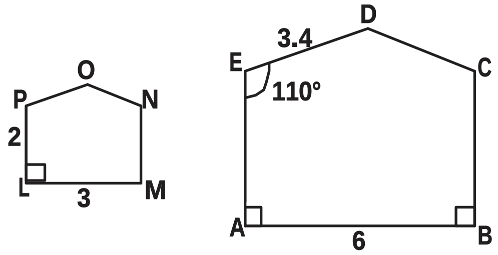
(ii) EA

(iii) m ∠OPL

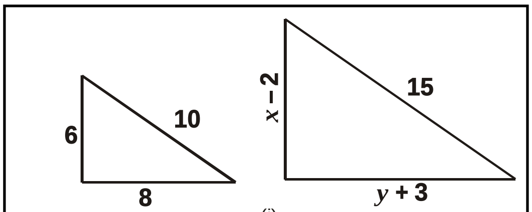
(iv) m ∠LMN

(v) cgHkt DEABC ~ ?

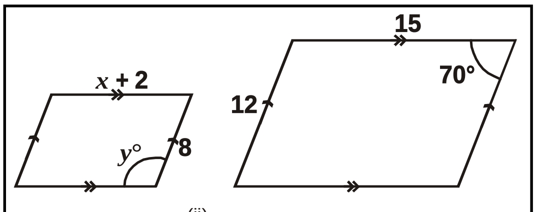
(vi) cgHkt BCDEA ~ cgHkt NOPLM, dFku Bhd ugh fy[kk gA bl Bhd djd fy[kA



2- fp= (i) d f=Hkt vkj (ii) d lekrj prHkt le:i g rk x vkj y dk eku irk dhft,A

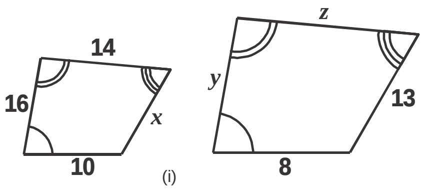


(i)

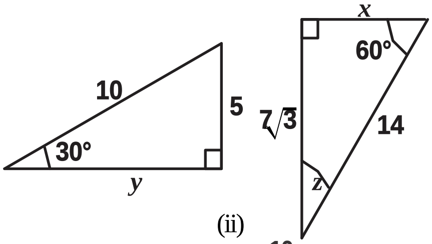


(ii)

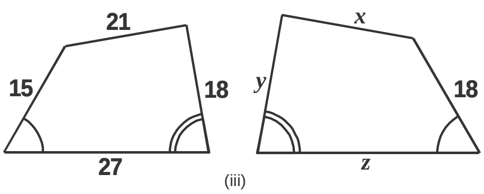
3- uhp fn, x, iR;d fp= d nkuk cgHkt le:i g rk iR;d e x, y vkj z dk eku Kkr dhft,A



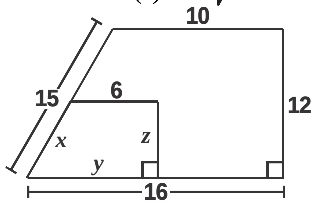
(i)



(ii)



(iii)



(iv)

4- ,d prHkt dh Hkqtkvk dh eki 4 lseh-] 6 lseh-] 6 lseh- o 8 lseh- gA nljk prHkt] tk igy prHkt d le:i g] mldh Hkqtkvk dh eki 6 lseh-] 9 lseh-] 9 lseh- vkj 12 lseh- gA

(i) Ldy x.kd D;k gkxk\ ¼nljk prHkt dk igy prHkt l½

(ii) nkuk prHktk d ifjeki Kkr dhft,A

(iii) bud ifjekik dk vuikr D;k g\ ¼nljk prHkt dk igy prHkt l½

5- fuEufyf[kr d fy, mnkgj.k n ,o mud dkj.k fyf[k, A

(i) ;fn nk cgHkt lokxle g] rk o le:i gkx ghA

(ii) ;fn nk cgHkt le:i g] rk t:jh ugh fd o lokxle gkA

(iii) ,l gh rhu vkj dFku lkp dj fy[kA

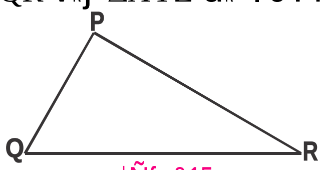
F1NE8D

f=Hkqtka ea le:irk dh s tkpa

vHkh rd geu n[kk fd dkbZ Hkh nk f=Hkt ΔPQR vkj ΔXYZ dk le:i fl) dju d fy, nk dlkfV;k gA

(i) lxr dk.k cjkcj gk

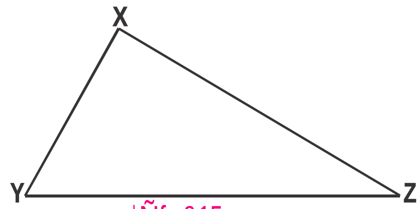
$\angle P = \angle X, \quad \angle Q = \angle Y, \quad \angle R = \angle Z$



vkÑfr&15 (i)

(ii) lxr Hkktkvk d vuikr leku gk ¼lekuikfrd gk½

$$\frac{PQ}{XY} = \frac{QR}{YZ} = \frac{RP}{ZX}$$



vkÑfr&15 (ii)

rc $\Delta PQR \sim \Delta XYZ$ gkxA

bue l dkbZ Hkh ,d ijh gku ij ge dg ldr g fd nkuk f=Hkt le:i gA

dk.k&dk.k&dk.k (AAA) le:irk dlkVh &
;fn nk f=Hktk e Lkxr dk.k cjkcj gk] rk mudh lxr Hktk, ,d gh vuikr e ¼lekuikrh½ gkrh g vkj blhfy, ; f=Hkt le:i gkr gA bl dlkVh dk nk f=Hktk dh le:irk dh dk.k&dk.k&dk.k **(AAA)** dlkVh dgk tkrk gA

vkb, n[k fd bu dlkfV;k dk ijk dju d fy, U;ure dku lh 'krk <<h tk ldrh gA **dk.k&dk.k (AA) le:irk** ¼;fn ,d f=Hkt d nk dk.k ,d vU; f=Hkt d Øe'k% nk dk.kk d cjkcj gk] rk o nkuk f=Hkt le:i gkr gA

;g f=Hktk dh le:irk dh dk.k&dk.k dlkVh gA

bl dlkVh dk mi;kx dj ge nk vU; dlkfV;k SAS vkj SSS, dk xf.krh; :i l ¼ie;½ fl) djxA

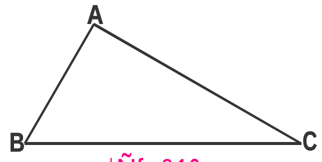
ie; 5 %& SAS ¼Hkt&dk.k&Hkt½ **le:irk ie;** % ;fn ,d f=Hkt dk ,d dk.k] nlj f=Hkt d ,d dk.k d cjkcj gk rFkk bu dk.kk dk vrxr dju okyh Hktk, lekuikrh gk] rk nkuk f=Hkt le:i gkr gA

miifÙk % bl ie; dk fl) dju d fy, ge nk ,l f=Hkt ABC vkj DEF yx ftue

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} \ (<1)$$;kuh DE cMk g AB Lk rFkk $\angle A = \angle D$ gkA

ΔDEF e DE rFkk DF ij Øe'k% nk fcn P o Q bl idkj yr g fd DP = AB vkj DQ = AC

vc P l Q dk feykb, A



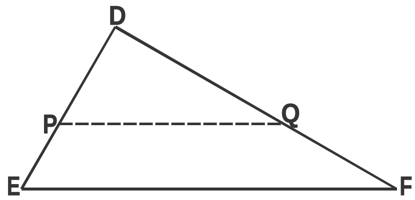
vkÑfr&16 (i)

$$\frac{DP}{DE} = \frac{DQ}{DF} \qquad \left(\because \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}\right)$$

$\therefore$ PQ || EF ¼vk/kkjHkr lekuikfrd ie; l½

vr% $\angle P = \angle E$ vkj $\angle Q = \angle F$ ¼D;k\½

;gk $\Delta ABC \cong \Delta DPQ$



vkÑfr&16 (ii)

(AB = DP; AC = DQ vkj

$\angle BAC = \angle PDQ$)

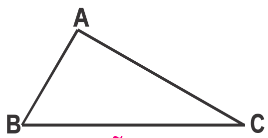
$\therefore$ $\angle B = \angle E$ vkj $\angle C = \angle F$

dk.k&dk.k le:irk d vulkj ΔABC vkj ΔDEF le:i f=Hkt gA

;kuh $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

ize; 6 %& SSS ¼**Hktk&Hktk&Hktk**½ **le:irk ie; %** ;fn nk f=Hkt k e ,d f=Hkt dh Hktk, nl j f=Hkt dh Hktkvk d lekuikrh gk] rk o nkuk f=Hkt le:i gkr gA

miifÙk % bl ie; dk fl) dju d fy, ,l nk f=Hkt ABC vkj DEF yr g ftue



vkÑfr&17

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD} \text{ gA}$$

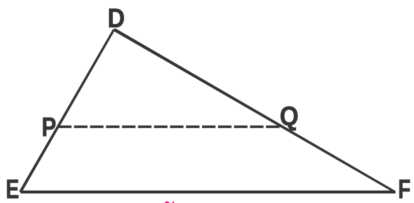
ΔDEF e DE rFkk DF ij Øe'k% nk fcn P o Q bl idkj yr g fd DP = AB vkj DQ = AC rFkk P l Q dk feykb,A

;gk $\frac{DP}{DE} = \frac{DQ}{DF}$ ¼$\because \frac{AB}{DE} = \frac{CA}{FD}$ vkj DP = AB, DQ = AC g½

$\therefore$ PQ || EF ¼D;k\½ ¼ie; 2½

vr% $\angle P = \angle E$ vkj $\angle Q = \angle F$

$\therefore$ $\Delta DEF \sim \Delta DPQ$ ¼dk.k&dk.k le:irk½



vkÑfr&18

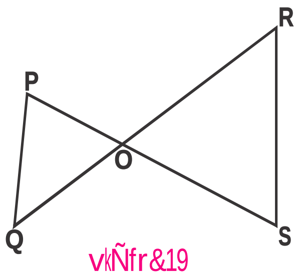
ge tkur g fd $\Delta ABC \cong \Delta DPQ$ ¼fn, g, in o jpuk l½

$\therefore$ $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ vkj $\angle C = \angle F$

;kfu $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ ¼dk.k&dk.k le:irk vfHk/kkj.kk l½

mnkgj.k&4- ;fn $PQ \parallel RS$ g] rks fl) dhft, fd

$\Delta POQ \sim \Delta SOR$ gA ¼vkdfr 19½



vkÑfr&19

gy& $PQ \parallel RS$ ¼fn;k g½

$\angle P = \angle S$ ¼,dkUrj dks.k½

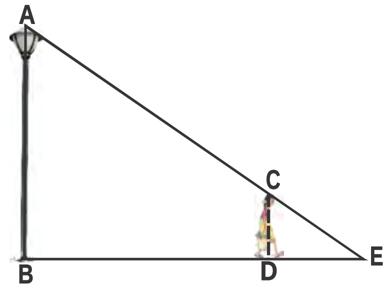
vkj $\angle Q = \angle R$ ¼,dkUrj dks.k½

lkFk gh $\angle POQ = \angle SOR$ ¼'kh"kkfHkeq[k dks.k½

$\therefore \Delta POQ \sim \Delta SOR$ ¼dks.k&dks.k&dks.k le:irk dlkSVh½

mnkgj.k&5- ,d yMdh ftldh Åpkb 90 lseh- g] ,d yEiiksLV ftl ij 3-6 ehVj Åpkb ij cYc yxk g] ls 1.2 eh- ifr lsdM dh pky ls nj tk jgh gA 4 lsdM ckn mlds yMdh dh ijNkb dh yckb Kkr dhft,A

gy& ekuk yEiiksLV d cYc dh Åpkb AB rFkk yMdh dh Åpkb CD gA fp= e vki n[k ldr g fd yMdh dh ijNkb DE gA



ekuk $DE = x$ eh-

pfd njh = pky × le;

blfy, $BD = 1.2 \times 4 = 4.8$ eh-

ΔABE vkj ΔCDE e]

$\angle B = \angle D$ ¼iR;d 90° g] yEiiksLV vkj yMdh Hkfe ls Å/ok/kj g½

vkÑfr&20

$\angle E = \angle E$ ¼mHk;fu"B dks.k½

vr% $\Delta ABE \sim \Delta CDE$ ¼dks.k&dks.k le:irk dlkSVh½

blfy, $\dfrac{BE}{DE} = \dfrac{AB}{CD}$ ¼le:i f=Hkqtks dh laxr Hkqtk,½

$\dfrac{4.8 + x}{x} = \dfrac{3.6}{0.9}$ ¼pfd 1 eh- = 100 lseh-½

$4.8 + x = 4x$

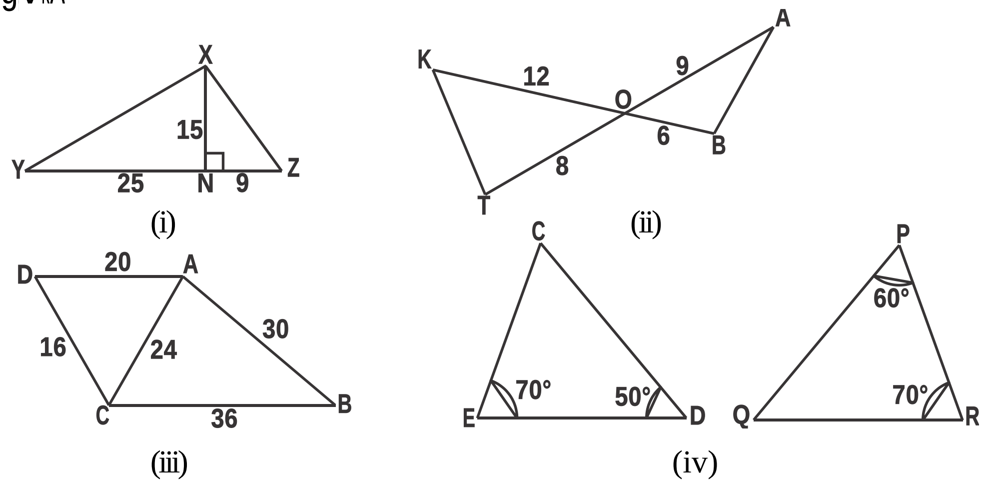
$3x = 4.8$

$x = 1.6$

vr% 4 lsdM pyu d ckn yMdh dh ijNkb dh yckb 1-6 eh- gA

djds nsf[k,

1- bu f=Hkqtk e le:irk dh tkp dhft, vkj crkb, fd dkulh dlkVh dk mi;kx gqvkA



(i) ΔYXN vkj ΔXNZ (ii) ΔOAB vkj ΔOKT

(iii) ΔADC vkj ΔACB (iv) ΔCED vkj ΔPRQ

le:i f=Hkqtk d {k=Qyk e lc/k

geu n[kk fd le:i cgHkqtk d ifjeki dk vuikr budh lxr Hkqtkvk d vuikr d cjkcj gkrk gA rc nk f=Hkqt ABC rFkk PQR e

$$\frac{\Delta ABC \text{ dk ifjeki}}{\Delta PQR \text{ dk ifjeki}} = \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CA}{RP}$$

;k

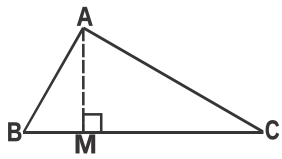
$$\frac{AB+BC+CA}{PQ+QR+RP} = \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CA}{RP}$$

D;k bu f=Hkqtk d {k=Qyk d vuikr vkj budh lxr Hkqtkvk d vuikr e dkb lcèk g\

bl lc/k dk vxy ie; e n[kxA

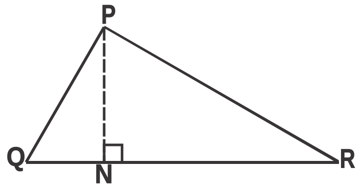
ie;s 7 %& nk le:i f=Hkqtk d {k=Qyk dk vuikr budh lxr Hkqtkvk d vuikr d ox d cjkcj gkrk gA

miifÙk % ge nk f=Hkqt ABC vkj PQR ,l fn, g fd ΔABC ~ ΔPQR gA ge fl) djuk g fd ¼



$$\frac{ar(ABC)}{ar(PQR)}=\left(\frac{AB}{PQ}\right)^2=\left(\frac{BC}{QR}\right)^2=\left(\frac{CA}{RP}\right)^2$$

nkuk f=Hkt k d {k=Qy irk dju d fy, ge bud 'kh"kyc Øe'k AM vkj PN [khpr gA



vc $ar(ABC)=\frac{1}{2}\times BC\times AM$ vkj

$$ar(PQR)=\frac{1}{2}\times QR\times PN$$

$$\frac{ar(ABC)}{ar(PQR)}=\frac{\frac{1}{2}\times BC\times AM}{\frac{1}{2}\times QR\times PN}=\frac{BC\times AM}{QR\times PN} \quad \text{------------} \ (1)$$

vc ΔABM vkj ΔPQN e]

$\angle B=\angle Q \qquad (\Delta ABC \sim \Delta PQR)$

$\angle M=\angle N \qquad$ ¼iR;d dk.k 90° dk g½

$\therefore \Delta ABM \sim \Delta PQN$ ¼dk.k&dk.k le:irk vfHk/kkj.kk½

blfy, $\frac{AM}{PN}=\frac{AB}{PQ}$ ------------- ¼2½

ge tkur g fd

$\Delta ABC \sim \Delta PQR$ ¼fn;k g½

rc $\frac{AB}{PQ}=\frac{BC}{QR}=\frac{CA}{RP}$ ------------- ¼3½

lehdj.k ¼1½ vkj ¼3½ l]

$$\frac{ar(ABC)}{ar(PQR)}=\frac{AB}{PQ}\times\frac{AM}{PN}$$

lehdj.k ¼2½ l]

$$\frac{ar(ABC)}{ar(PQR)}=\frac{AB}{PQ}\times\frac{AB}{PQ}=\left(\frac{AB}{PQ}\right)^2$$

vr% leh- ¼3½ l $\frac{ar(ABC)}{ar(PQR)}=\left(\frac{AB}{PQ}\right)^2=\left(\frac{BC}{QR}\right)^2=\left(\frac{CA}{RP}\right)^2$

djd n[k

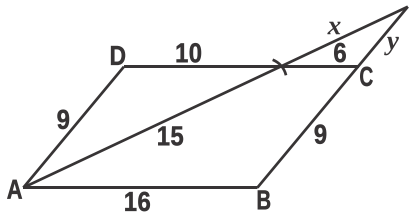
1- ;fn nk le:i f=Hkqtk d {k=Qy dk vuikr 25%9 gA rk mud lxr Hkqtkvk dk vuikr D;k gkxk\

2- f=Hkqt TFR vkj f=Hkqt SPM le:i g] ftudk Ldy x.kd $7:4$ gA bud {k=Qyk dk vuikr D;k gkxk\

3- $\Delta PQR \sim \Delta XYZ$ g] tgk $PQ = 3XY$ gA

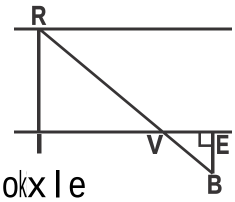
bud {k=Qyk dk vuikr D;k gkxk\

i'ukoyh 8-4



1- ABCD ,d lekrj prHkqt gA x vkj y dk eku irk dhft,A

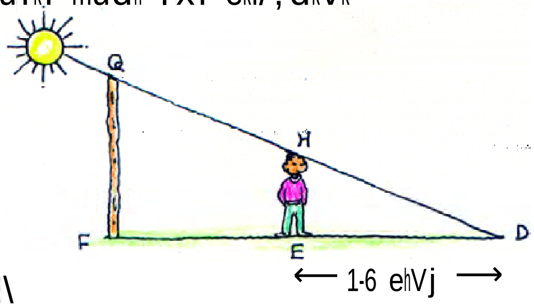
2- ,d leyc prHkqt ABCD ftle $AB \parallel DC$ g] d fod.k ijLij fcn O ij ifrPNn djr gA ;fn $AB = 2\,CD$ gk rk f=Hkqt AOB vkj COD d {k=Qy dk vuikr Kkr dhft,A



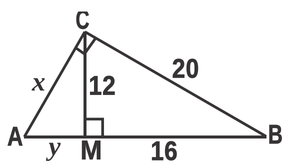
3- fp= e ;fn $IV = 36$ ehVj] $VE = 20$ ehVj vkj $EB = 15$ ehVj fn;k g rk unh dh pkMkb (RI) fdruh gkxh\

4- ;fn nk le:i f=Hkqtk d {k=Qy cjkcj gk rk fl) dhft, fd o f=Hkqt lokxle gkr gA

5- fl) dhft, fd nk le:i f=Hkqtk d {k=Qyk dk vuikr mudh lxr ekf/;dkvk d vuikr dk ox gkrk gA



6- 'kkfgn ,d [kHk dh ycbk dk vueku yxkr le; bl idkj [kMk gkrk g fd mld flj H dh Nk;k o [kHk d f'k[kj Q dh Nk;k ,d gh fcn D ij iMrh gA ;fn DE=1.6 ehVj vkj DF= 4.4 ehVj gk rk [kHk dh ycbk D;k gkxh] tcfd 'kkfgn dh ycbk 1.2 ehVj g\



7- (i) fp= e dku l nk f=Hkqt] ΔABC d le:i g\ uke fyf[k,A

(ii) x vkj y dk eku D;k gkxk\

8- ABC vkj BDE nk leckg f=Hkqt bl idkj g fd D Hkqtk BC dk e/; fcn gA f=Hkqtk ABC vkj BDE d {k=Qyk dk vuikr g&

(i) 2:1 (ii) 1:2 (iii) 4:1 (iv) 1:4

9- nk le:i f=Hkqtk e $9\,ar(ABC) = 16\,ar(PQR)$ g rk $\dfrac{AB}{PQ}$ dk eku gkxk&

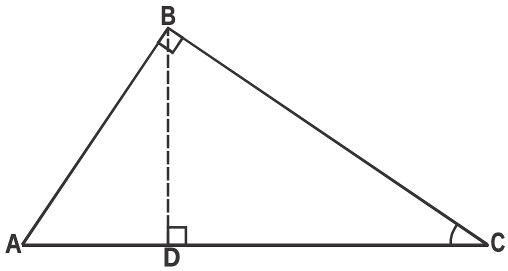
(i) 4:3 (ii) 16:3 (iii) 3:4 (iv) 9:4

ikbFkkxkjl ie;

vkiu fiNyh d{kkvk e ikbFkkxkjl ie; dh enn l db i'u gy fd, g o xfrfof/k;k d }kjk bl ie; dk lR;kiu Hkh fd;k gA D;k f=Hkt k e le:irk dh vo/kkj.kk dk mi;kx djd ikbFkkxkjl ie; fl) dj ldr g \ vkb, n[kA

ie; 8 %& ;fn fdlh ledk.k f=Hkt d ledk.k oky 'kh"k l d.k ij yc Mkyk tk, rk bl yc d nkuk vkj cu f=Hkt lai.k f=Hkt d le:i gkr g rFkk ijLij le:i gkr gA

miifÙk % fn;k g % ,d ΔABC g ftldk dk.k B ledk.k g rFkk BD d.k AC ij yc gA



ge fl) djuk g fd

(i) $\Delta ADB \sim \Delta ABC$

(ii) $\Delta BDC \sim \Delta ABC$

(iii) $\Delta ABD \sim \Delta DBC$

ge n[k ldr g fd ΔADB vkj ΔABC e

$\angle A = \angle A$ ¼mHk;fu"B dk.k½

$\angle ADB = \angle ABC$ ¼nkuk 90^{o} d dk.k g½

$\therefore \Delta ADB \sim \Delta ABC$ ¼dl\½ ------- ¼1½

blh idkj ΔBDC vkj ΔABC e

$\angle C = \angle C$ vkj $\angle BDC = \angle ABC$ ¼D;k\½

blfy, $\Delta BDC \sim \Delta ABC$ ------- ¼2½

¼1½ vkj ¼2½ l ge feyrk g&

$\Delta ADB \sim \Delta BDC$ ------- ¼3½

¼;fn dkb nk f=Hkt fdlh rhljs f=Hkt d le:i gk] rk o nkuk f=Hkt Hkh vkil e le:i gkxA½

vc ge bl ie; dk mi;kx djd] ikbFkkxkjl ie; dk fl) djxA

ie; 9 %& ,d ledk.k f=Hkt e d.k dk oxZ 'kk"k nk Hkt kvk d oxk d ;kx d cjkcj gkrk gA

miifÙk % ge ,d ledk.k f=Hkt ABC fn;k x;k g ftldk $\angle B$ ledk.k gA

ge fl) djuk g fd $AC^2 = AB^2 + BC^2$

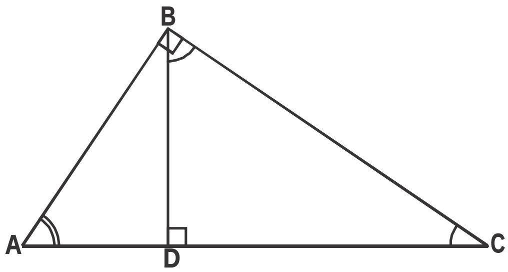
bl ie; dk fl) dju d fy, jpuk dh vko';drk g blfy, vc ge f=Hkt d 'kh"k B l AC Hkt k ij BD yc [khp,A

vc ΔADB o ΔABC e

$\angle ADB = \angle ABC = 90°$

$\angle A = \angle A$ ¼mHk;fu"B dk.k½

$\therefore \triangle ADB \sim \triangle ABC$ ¼dk.k&dk.k le:irk l½



$\therefore \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AB}{AC}$ ¼lekuikfrd Hktk,½

;k $AD.\,AC = AB^2$ ¼1½

blh idkj $\triangle BDC \sim \triangle ABC$ gA

$\therefore \dfrac{CD}{BC} = \dfrac{BC}{AC}$ ¼lekuikfrd Hktk,½

;k $CD.\,AC = BC^2$ ¼2½

¼1½ vkj ¼2½ dk tkMu ij

$AD.\,AC + CD.\,AC = AB^2 + BC^2$

;k $AC\,(AD + CD) = AB^2 + BC^2$

;k $AC.AC = AB^2 + BC^2$

;k $AC^2 = AB^2 + BC^2$

D;k ikbFkkxkjl ie; d foyke dk Hkh fl) fd;k tk ldrk g\

ize; 10 %& ;fn fdlh f=Hkt dh ,d Hktk dk ox vU; nk Hktkvk d oxk d ;kx d cjkcj gk rk igyh Hktk dk lEe[k dk.k ledk.k gkrk gA

miifÙk % bl vki Lo; fl) dhft, A

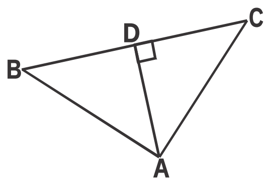
bu ie;k ij vk/kkfjr dN loky djr g A

djds nsf[k,

,d lh<h fdlh nhokj ij bl idkj fVdh gb g fd fupyk fljk nhokj l 2.5 ehVj dh njh ij g rFkk blds Åijh fljk Hkfe l 6 ehVj dh Åpkb ij cuh ,d f[kMdh rd igprk gA lh<h dh yckb D;k gkxh\

mnkgj.k&6- fp= e $AD \perp BC$ gA

fl) dhft, fd $AB^2 + CD^2 = BD^2 + AC^2$ gA



gy%& $\triangle ADC$ e

$AC^2 = AD^2 + CD^2$ ¼ikbFkkxkjl ie;½ -------------- ¼1½

vc $\triangle ADB$ e

$AB^2 = AD^2 + BD^2$ -------------- ¼2½

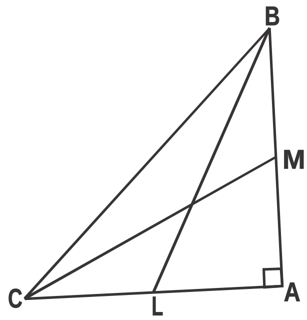
¼2½ e l ¼1½ dk ?kVku ij

$AB^2 - AC^2 = BD^2 - CD^2$

;k $AB^2 + CD^2 = BD^2 + AC^2$

mnkgj.k&7- BL vkj CM ,d ledks.k f=Hkqt ABC dh ekf/;dk,¡ g rFkk f=Hkt e dk.k A ledk.k gA fl) dhft , fd $4(BL^2 + CM^2) = 5\,BC^2$

gy& ΔABC e $\angle A = 90^\circ$ g rFkk BL vkj CM mldh ekf/;dk,¡ gA



ΔABC e] $BC^2 = AB^2 + AC^2$ ¼D;k\½

ΔABL e] $BL^2 = AL^2 + AB^2$

$$BL^2 = \left(\frac{AC}{2}\right)^2 + AB^2$$

¼AC dk e/; fcn L g½

$$BL^2 = \frac{AC^2}{4} + AB^2$$

$$4BL^2 = AC^2 + 4AB^2 \quad \text{-----------} \quad (2)$$

ΔCMA e] $CM^2 = AC^2 + AM^2$

$$CM^2 = AC^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2$$

¼AB dk e/; fcn M g½

$$4\,CM^2 = 4\,AC^2 + AB^2 \quad \text{-----------} \quad (3)$$

¼2½ vkj ¼3½ dk tkMu ij

$$4BL^2 + 4CM^2 = AC^2 + 4AB^2 + 4AC^2 + AB^2$$

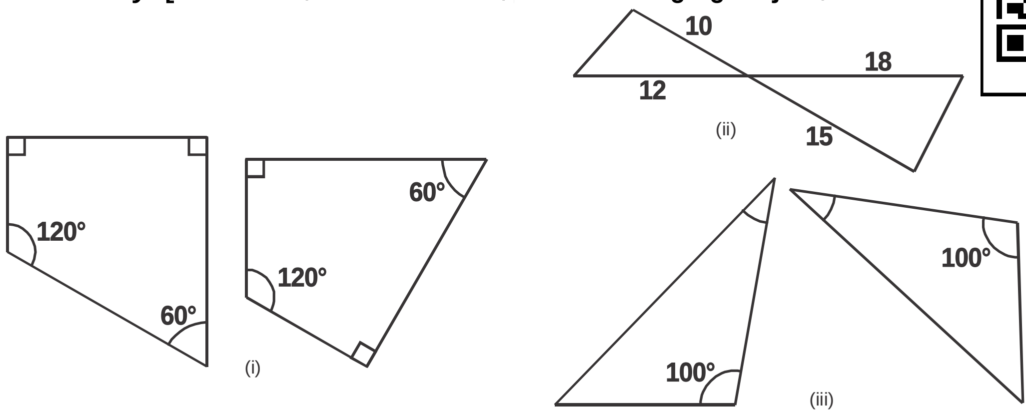
$$4\left(BL^2 + CM^2\right) = 5AC^2 + 5AB^2$$

$$4\,(BL^2 + CM^2) = 5\,(AC^2 + AB^2)$$

$$4\,(BL^2 + CM^2) = 5\,BC^2$$ ¼1½ l

i'zukoyh&5

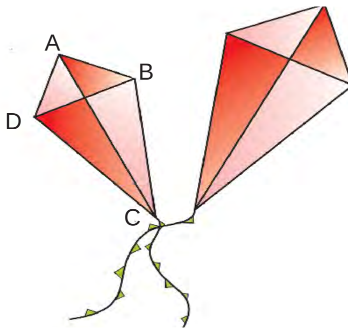
1- fuEufyf[kr vk–fr;k dk dku lk ;Xe le:i ugh g vkj D;k\



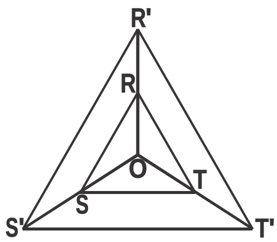
2- e?kk u nk le:i irx cukbA cMh irx dk fod.k, NkVh irx d fod.k dk 1-5 xuk g rc

(i) Ldy x.kd D;k gkxk\

(ii) cMh irx d fod.kk dh eki Kkr dhft,A tcfd $BD = 40$ leh- vkj $AC = 68$ leh-



3- ,d ledk.k ΔPQR e dk.k P ledk.k g rFkk QR ij fcn M bl idkj fLFkr g fd $PM \perp QR$ ij n'kkb,, fd $PM^2 = QM.MR$



4- ,d leckg f=Hkt ABC dh Hkt k $2a$ gA mld iR;d 'kh"kyc dh yckb Kkr dhft,A

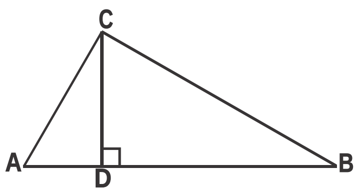
5- ΔABC ,d lef}ckg f=Hkt g ftle $\angle C = 90^\circ$ gA fl) dhft, $AB^2 = 2AC^2$ gA

6- ;fn fn, x, fp= e $OR' = 2.OR$

$OS' = 2.OS$

$OT' = 2.OT$

fl) dhft, fd $\Delta RST \sim \Delta R'S'T'$



7- ,d f=Hkt ABC ftle $\angle C$ ledk.k gA Hkt kvk CA vkj CB ij Øe'k% fcn D vkj E fLFkr gA fl) dhft, $AE^2 + BD^2 = AB^2 + DE^2$

8- ΔACB e $\angle ACB = 90°$ rFkk $CD \perp AB$ gA fl) dhft , fd $\frac{BC^2}{AC^2} = \frac{BD}{AD}$

9- ;fn iFoh dk 0;kl yxHkx 8000 ehy g] l; dk 0;kl yxHkx 864000 ehy gA iFoh vkj l; dh njh yxHkx 92 fefy;u ehy gA

;fn dkxt ij iFoh dk 1 bp 0;kl d oÙk l n'kk, rk l; dk 0;kl vkj iFoh l l; dh njh dkxt ij fdruh gkxh\ (1fefy;u = 10^6)

10- ;fn nk le"kVHkt k d ifjeki dk vuikr 5%4 g rk mudh Hkt kvk dk vuikr D;k gkxk\

geu lh[kk

1- nk le:i vk—fr;k dh eki e fo'k"k vuikr gkrk g] ftl Ldy x.kd (scale factor) dgr gA

2- nk cgHkt ftudh Hkt kvk dh l[;k leku gk] le:i gkr g] ;fn

(i) mudh lxr Hkt k, lekuikrh gkA

(ii) mud lxr dk.k cjkcj gkA

3- ;fn fdlh f=Hkt dh ,d Hkt k d lekUrj vU; nk Hkt kvk dk fHkUu&fHkUu fcnvk ij ifrPNn dju d fy, ,d j[kk [khph tk,] rk ;g j[kk vU; nk Hkt kvk dk ,d gh vuikr e foHkkfTkr djrh gA

4- ;fn ,d j[kk fdlh f=Hkt dh nk Hkt kvk dk ,d gh vuikr e foHkkfTkr dj] rk og rhljh Hkt k d lekUrj gkrh gA

5- lHkh lokxle cgHkt le:i Hkh gkr gA

6- fdUgh nk le:i cgHkt k d ifjeki dk vuikr] mudh lxr Hkt kvk d vuikr ;k Ldy x.kd d leku gkrk gA

7- ;fn nk f=Hkt k e ,d f=Hkt d nk dk.k nlj f=Hkt d Øe'k% nk dk.kk d cjkcj gk] rk o nkuk f=Hkt le:i gkr gA

8- ;fn ,d f=Hkt dk ,d dk.k] nlj f=Hkt d ,d dk.k d cjkcj gk rFkk bu dk.kk dk vrxr dju okyh Hkt k, lekuikrh gk] rk nkuk f=Hkt le:i gkr gA ¼SAS le:irk dlkVh½

9- ;fn nk f=Hkt k e lxr Hkt k, ,d gh vuikr e gk] rk mud lxr dk.k cjkcj gkr g vkj blfy, nkuk f=Hkt le:i gkr g A

10- nk le:i f=Hkt k d {k=Qyk dk vuikr mudh lxr Hkt kvk d vuikr d ox d cjkcj gkrk gA

11- ;fn fdlh ledk.k f=Hkt d ledk.k oky 'kh"k l d.k ij yc Mkyk tk, rk bl yc d nkuk vkj cu f=Hkt] ey f=Hkt d le:i gkr g rFkk ijLij Hkh le:i gkr gA

12- ,d ledk.k f=Hkt e d.k dk ox 'k"k nk Hkktkvk d oxk d ;kx d cjkcj gkrk gA

13- ;fn fdlh f=Hkt dh ,d Hktk dk ox vU; nk Hktkvk d oxk d ;kx d cjkcj gk rk igyh Hktk dk lEe[k dk.k ledk.k gkrk gA

mÙkjekyk&1

1- 1200 oxehVj 2- 6 leh- 3- 10-5 fdeh-

mÙkjekyk&2

1- 4 leh-

2- ¼i½ 4 leh-] 6 leh-] 24 leh- ¼ii½ 6 leh-] 9 leh-] 54 leh-
¼iii½ 5 leh-] 7-5 leh-] 37-5 leh-]gk

3- ¼i½ $\frac{1}{2}$ ¼ii½ $\frac{3}{2}$ ¼iii½ $\frac{1}{3}$

6- ¼i½ ugh ¼ii½ gk ¼iii½ gk

mÙkjekyk&3

1- ¼i½ 1-7 ¼ii½ 4 ¼iii½ $110°$ ¼iv½ $90°$ ¼v½ cgHkt OPLMN
¼vi½ cgHkt BCDEA Lke:i g cgHkt MNOPL d

2- ¼i½ $x = 11, \quad y = 9$
¼ii½ $x = 8, \quad y = 110°$

3- ¼i½ $x = 16.25, \quad y = 20, \quad z = 17.5$
¼ii½ $x = 7, \quad y = 5\sqrt{3}, \quad z = 30°$
¼iii½ $x = 25.2, y = 21.6, z = 32.4$ ¼iv½ $x = 9, y = 9.6, z = 7.2$

4- ¼i½ 1-5 ¼ii½ 24 leh-] 36 leh- ¼iii½ 1-5

mÙkjekyk&4

1- $x=9, y=\frac{27}{5}$ 2- 4%1 3- 27 ehVj 6- 3-3 ehVj

7- ¼i½ f=Hkt ACM o f=Hkt CBM ¼ii½ $x=15, y=9$

8- ¼iii½ 4%1 9- ¼i½ 4%3

mÙkjekyk&5

1- (i½ ,d leyc prqHkZt g n lajk ugha

¼iii½ ,d gh dk.k dk eku Kkr gA vr% vU; dk.kk dh lekurk d ckj e dN ugh dg ldrA

2- ¼i½ 1-5 ¼ii½ 102 leh- o 60 leh-

4- $\sqrt{3}a$ 9- 108 bp] 11500 bp 10- 5%4

अध्याय 12

oÙk ,o Li'k j[kk,

[CIRCLE AND TANGENTS]

ifjp; (Introduction)

ge viu vkl&ikl fofHkUu vkdfr;k dh oLr, n[kr gA tl fLDdk] pMh] lkbfdy dk ifg;k] ?kMh vkfn lc e dN ,d tl x.k gA

fLDd dk fdukjk
fp=&1

pMh dk fdukjk
fp=&2

ifg; dk fdukjk
fp=&3

?kMh dk fdukjk
fp=&4

bu lHkh vkdfr;k d fdukj oÙk dh rjg fn[kkb nr gA ge ,lh vkj cgr lh oLr, << ldr g tk bUgh dh rjg dh gA D;k vki dN ,lh vkj oLr, tYnh l lkp ldr g\ xn] dkp dh xkyh] ikuh dh cn tlh vkj Hkh oLr, xkykdkj gkrh gA

xn
fp=&5

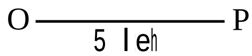
dkp dh xkyh
fp=&6

; ¼ fp=&5]6½ or l vyx g vkj Åij fn, x, fp=k l HkhA vkil e ppk djd fLDd tlh oLr, o xn tlh oLrvk d vrj fyf[k,A

bl v/;k; e fLDd tlh ;kuh oÙkuek lrg okyh oLrvk dh lrg d x.k n[kxA

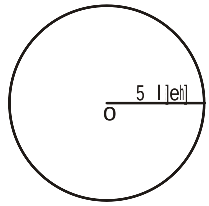
oÙk D;k g \

dkxt ij ,d fcnq ^O* ydj bl ls 5 lseh- dh njh ij fcnq P yA



D;k dN vkj Hkh fcnq gk ldr g tk fcUnq O l 5 lseh- dh njh ij gk\ bl dl <<x\ fdru ,l vkj fcnq gkx\

ijdkj dk 5 lseh- Qykdj O fcnq ij ijdkj dh ukd dk j[k] O l 5 lseh- njh ij fcnvk dk fpfàr dj A dkxt ij O l 5 lseh- dh njh ij fLFkr lHkh fcnvk dk feyku ij ge vkdfr 1¼ii½ iklr gkxhA fd lh ry ij [khph xb bl idkj dh cn vkdfr oÙk gkrh gA mu lHkh fcnvk dk leg tk ry e ,d fu;r fcnq l fuf'pr njh ij fLFkr gk rFkk ,d cn vkdfr cukrk gk] oÙk dgykrk gA fcnq O dk oÙk dk dUnz dgr gA dUæ l oÙk d fdlh Hkh fcnq rd dh njh oÙk dh f=T;k dgykrh gA D;k ifg;k] ?kMh] pMh] fldDd vkfn oLrvk ij Hkh ,d fcnq << ldr g ftll flj rd njh cjkcj gkA



vkdfr&1¼ii½

djd n[k

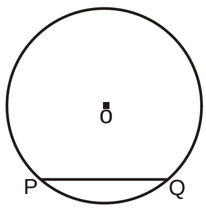
lR; ;k vlR; fyf[k,A dkj.k o mnkgj.k l le>kb, A

1- oÙk dh vud f=T;k, gkrh gA

2- oÙk dh lHkh f=T;k, leku ugh gkrh gA

thok (Chord)

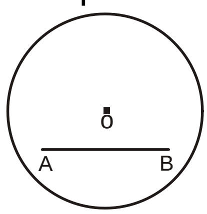
dkxt ij ,d oÙk [khpdj] mlk dh ifjf/k ij dkb Hkh nk fcnq yA vkdfr&2 e nk fcnvk P vkj Q dk fn[kk;k x;k gA nkuk fcnvk dk feyku ij j[kk[k.M PQ curk g ;g j[kk[k.M oÙk dh ,d thok gA D;k vki lkp ldr g fd ,l fdru j[kk[k.M gkx ftud vr fcnq oÙk ij gk\ vki ik,x fd ,lh vur thok, gA



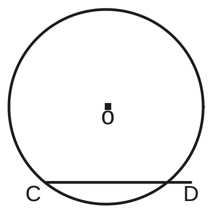
vkdfr&2

djd n[k

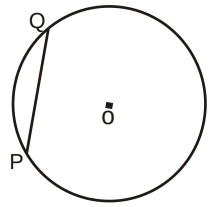
¼i½ uhp nh xb vkdfr;k e thok dh igpku djA



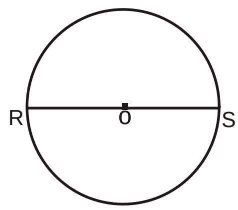
vkdfr&3



vkdfr&4



vkdfr&5



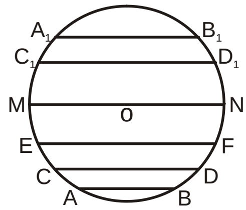
vkdfr&6

¼ii½ D;k thok, ,d gh yckb dh g\

¼iii½ lcl ych thok dku lh g\

oÙk dh leku cM+h thok

,d oÙk ftldk dsUnz O gS bles foftHkUu thok,¡ AB, CD, EF vkSj MN vkfn [khph xbZ gSa ¼vkd`fr 7½A bu lHkh thokvksa dh yEckbZ;ksa dk voyksdu djsaA



vkd`fr&7

AB o MN esa dkSu cM+h gS\

CD o MN esa dkSu cM+h gS\

blh izdkj thok EF o MN esa fdldh yEckbZ vf/kd gS\

thok A_1B_1 vkSj MN esa lcls vPNh n[kkbZ lefr gS fd thok MN dh yEckbZ lcls vf/kd gSA D;ksa thok MN esa dksbZ fo'ks"k x.k n[kk iM+jgk gS tks 'ks"k thokvksa esa ugha gS\

thok MN oÙk ds dsUnz ls gksdj xqtjrh gSA mlls thok dks tks oÙk ds dsUnz ls gksdj tkrh gS] oÙk dk O;kl dgrs gSaA D;k vki oÙk esa O;kl ls Hkh cM+h thok [khap ldrs gSa\

ugha] vki ik,saxs fd O;kl] oÙk dh lcls cM+h thok gksrh gSA

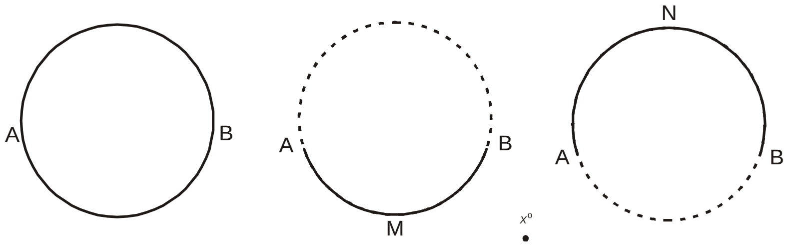
lkspsa ,oa ppkZ djsa

D;k vkd`fr&7 esa MN ds vfrfjDr vkSj Hkh O;kl [khaps tk ldrs gSa\

;fn gka rks] ,sls fdrus O;kl [khaps tk ldrs gSa\

oÙk dk pki ¼Arc of a circle½

oÙk dh ifjf/k ij dksbZ nks fcUnq A vkSj B gksa rks oÙk nks Hkkxksa esa caV tkrk gSA ¼vkd`fr 8]9]10½



vkd`fr&8 vkd`fr&9 vkd`fr&10

bueas oÙk dk ,d Hkkx NksVk rFkk ,d Hkkx cM+k gSA oÙk ds NksVs Hkkx dks y?kq pki $\widehat{AMB}$ ¼vkd`fr&8½ rFkk cM+s Hkkx dks nh?kZ pki $\widehat{ANB}$ ¼vkd`fr&9½ dgrs gSaA

iqu% vkd`fr&8 esa ;fn ;g eku ysa fd dksbZ fcUnq A ls oÙkkdkj iFk ij xfr djrk gqvk fcUnq A ij okil igqap tk,] rks fcUnq ds }kjk r; dh xbZ iFk dh yEckbZ oÙk dh ifjf/k dgykrh gSA

,d oÙk ds vUnj'kh ,d ckj pyus esa r; dh xbZ njh mldk ifjeki gksrk gS] ftls lkekU;r% ifjf/k dgk tkrk gSA

oÙk[kaM ¼Segment of a circle½

vkd`fr&11

fdlh oÙk ij ,d thok AB [khafp,A D;k vki crk ldrs gSa fd thok oÙk ds vUr% Hkkx dks fdru Hkkxksa esa foHkkftr djrh gSA ¼vkd`fr&11½A vki n[kk ldrs gSa fd thok oÙk ds vUr% Hkkx dks nks Hkkxksa esa foHkkftr djrh gSA thok rFkk pki ds eè; {ks= dks oÙk[k.M dgrs gSaA thok rFkk y?kq pki ds e/; {ks= dks y?kq oÙk[k.M rFkk thok vkSj nh?kZ pki ds e/; {ks= dks nh?kZ oÙk[k.M dgrs gSaA

djd n[k

dkxt ij ,d oÙk [khfp, rFkk vyx&vyx eki dh thok [khpdj thok dh yckbZ rFkk lxr y?k oÙk[k.M e lc/k <f<,A

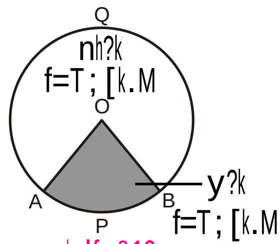
ge n[k ldr g fd thok dh yckbZ de gkxh rk y?k oÙk[k.M dk {k= Hkh de gkxkA

lkp ,o ppk dj

¼1½ ,d oÙk dh f=T;k 6 lseh- gA oÙk dh thokvk dh yckbZ;k Øe'k% 4 lseh-] 6 lseh-]10 lseh-o 8 lseh- gA bu thokvk d lxr nh?k oÙk[k.M dk NkV l cM d Øe e fyf[k,A

¼2½ mijkDr 6 lseh- f=T;k oky oÙk e tc thok 12 lseh- dh gk rk nh?k oÙk[k.M vkj y?k oÙk[k.M e D;k lc/k n[kr g \

f=T;[kM ¼Sector½



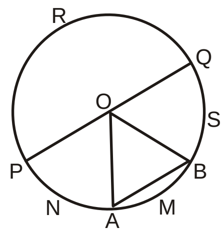
vkdfr&12

,d oÙk ij nk fcn A vkj B yhft,A ¼nf[k, vkdfr&12½ pki AB d fljk dk oÙk d dUn O l feykb,. dUn dk pki AB d fljk l feyku oky f=T;kvk ,o pki d chp d {k= dk f=T;[kM dgr gA

oÙk[k.M dh rjg vki ikr g fd y?k pki rFkk f=T;kvk l f?kjk {k= y?k f=T;[k.M vkj nh?k pki rFkk f=T;kvk l f?kjk {k= nh?k f=T;[k.M gkrk gA OAPB y?k f=T;[k.M g vkj OAQB nh?k f=T;[k.M g A

djd n[k

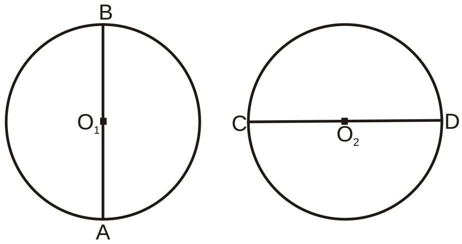
nh xbZ vkdfr e f=T;k] thok] 0;kl] pki] f=T;[k.M] oÙk[k.M dh igpku dj nh x;h rkfydk e fy[kA



vkdfr&13

f=T;k	thok	0;kl	pki	f=T;[k.M	oÙk[k.M

lokZxle oÙk ¼Congruent circles½



vkdfr&14 vkdfr&15

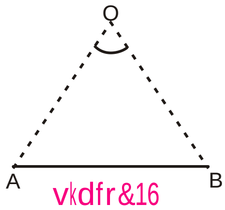
geu n[kk Fkk fd ,lh nks vkdfr;k¡ tks ,d nwljs dks iwjh rjg <d ysrh gS] lokZxle vkdfr;k¡ dgykrh gSA

vxj ge cjkcj f=T;k ds nks oÙk ysa ftuds dsUnz O_1 o O_2 gksA iqu% O_1 dsUnz okys oÙk esa ,d O;kl AB rFkk O_2 dsUnz okys oÙk esa O;kl CD ysa ¼vkdfr&14]15½

,d oÙk dks nwljs oÙk ij bl izdkj j[kk fd dsUnz O_1 dsUnz O_2 ij iM+s rFkk O;kl AB ds vUr fcUnq A o B Øe'k% fcUnq C o fcUnq D ij iM+sA vki n[ksa ldrs gS fd ,d oÙk nwljs oÙk dks iw.kZr;k <d ysrk gS vr% ge dg ldrs gS fd ,sls x, nksuksa oÙk lokZxle gSA blls xf.krh; dk cjkcj f=T;k ds vU; oÙk [khapdj nsf[k,A

vki ik,¡xs fd cjkcj f=T;kvksa okys oÙk lokZxle gksrs gSA

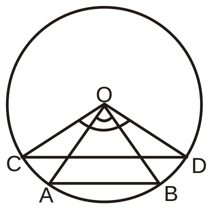
thok }kjk dsUnz ij vfrfjr dks.k



vkdfr&16

,d js[kk[k.M AB rFkk ,d fcUnq O tks js[kk[k.M esa ugha gS] fn, x, gSA ¼vkdfr&16½

O dks A vkSj B ls feykb,A ∠AOB] js[kk[k.M AB }kjk fcUnq O ij vfrfjr dks.k dgykrk gSA



vkdfr&17

,d oÙk ftldk dsUnz O gS rFkk nks thok,¡ AB vkSj CD gSA ¼vkdfr&17½ thok AB rFkk CD }kjk dsUnz ij vfrfjr dks.k Øe'k% ∠AOB rFkk ∠COD gSA D;k vki crk ldrs gSa ∠AOB vkSj ∠COD esa dkSu lk dks.k cM+k gS\ D;k vki thok dh yackbZ rFkk thok }kjk dsUnz ij vfrfjr dks.k esa dksbZ lEca/k n[k ikrs gS\ vki dg ldrs gSa fd thok dh yackbZ vf/kd gksxh rks dsUnz ij cuk dks.k Hkh vf/kd gksxkA

djds n[ksa

5 lseh- f=T;k dk ,d oÙk [khpsA oÙk esa 3] 5] 8] 10 rFkk 6 lseh- yackbZ dh nks&nks thok,¡ [khpsA pkns dh lgk;rk ls bu thokvksa }kjk dsUnz ij cus dks.kksa dh eki djsa vkSj nh xbZ rkfydk esa fy[ksaA

thok dh yackbZ	3 lseh-	5 lseh-	6 lseh-	8 lseh-	10 lseh-
dks.k					

mijksDr rkfydk dks i.kZ djus ij vki ik,¡xs fd ,d oÙk dh cjkcj thok,¡ dsUnz ij cjkcj dks.k vfrfjr djrh gSA

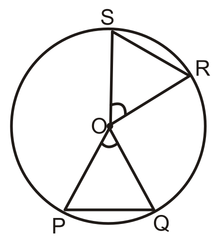
oÙk d dN ie;

geu T;kferh; dFkuk dk fl) djuk lh[kk gA vc ge oÙk d ckj e dN dFkuk dk tk mld x.k crkr g fl) dju d rjhd n[kxA igyk dFku ge ogh yr g tk geu Åij n[kkA fdlh oÙk e cjkcj thok,] dUn ij cjkcj dk.k vrfjr djrh gA

ie; & 1

dFku & fdlh oÙk dh cjkcj thok,] dUn ij cjkcj dk.k vrfjr djrh gA

Kkr g & ,d oÙk ftldk dUn O gA bldh nk cjkcj thok,] PQ vkj RS gA



vdfr&18

fl) djuk g & $\angle POQ = \angle ROS$

miifÙk & ΔPOQ rFkk ΔROS e

$OP = OR$ ¼,d gh oÙk dh f=T;k,½

$OQ = OS$ ¼,d gh oÙk dh f=T;k,½

$PQ = RS$ ¼Kkr g½

vr% $\Delta POQ \cong \Delta ROS$ ¼Hk-Hk-Hk- lokxlerk½

$\therefore$ $\angle POQ = \angle ROS$ ¼lokxle f=Hkt d lxr Hkkx½

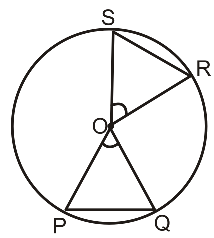
D;k bl dFku dk foyke Hkh lR; g] vFkkr ;fn ,d oÙk dh thokvk }kjk dUn ij vrfjr dk.k cjkcj gk] rk o thok,] cjkcj gkrh gA vkb, bl dFku dk fl) djd n[kr gA

ie; & 2

dFku & ;fn ,d oÙk dh thokvk }kjk dUn ij vrfjr dk.k cjkcj gk] rk o thok,] cjkcj gkrh gA

Kkr g & ,d oÙk ftldk dUn O gA bldh nk thok,] PQ vkj RS g rFkk $\angle POQ = \angle ROS$

fl) djuk g & $PQ = RS$



vkdfr&19

miifÙk & ΔPOQ rFkk ΔROS e]

$OP = OR$ ¼,d gh oÙk dh f=T;k,½

$OQ = OS$ ¼,d gh oÙk dh f=T;k,½

$\angle POQ = \angle ROS$ ¼fn;k g½

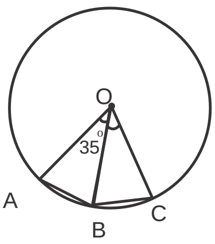
vr% $\Delta POQ \cong \Delta ROS$ ¼Hk-dk-Hk- lokxlerk½

$\therefore$ $PQ = RS$ ¼lokxle f=Hkt d lxr Hkkx½

;fn fdlh oÙk dh nk thok,] cjkcj gk] rk mud lxr pki lokxle gkr g rFkk foyker% ;fn nk pki lokxle gk] rk mud lxr thok,] cjkcj gkrh gA mnkgj.k&1- vkdfr&20 e thok AB vkj BC cjkcj g rFkk $\angle AOB = 35°$ g rk $\angle AOC$ Kkr dhft,A

gy& $\angle AOB = \angle BOC$ ¼oÙk dh cjkcj thok, dUn ij cjkcj dk.k vrfjr djrh gA½

$\angle BOC = 35°$ ¼$\angle AOB = 35°$ fn;k gA½



vkdfr&20

vr% $\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC$

$= 35° + 35°$

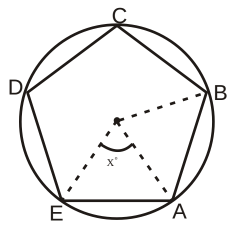
$= 70°$

$\therefore$ $\angle AOC = 70°$

mnkgj.k&2- ,d oÙk d vUrxr leipHkt [khpk x;k gA leipHkt dh iR;d Hktk dUn ij fdru va'k dk dk.k cuk,xh\

gy& leipHkt dh ikpk Hktk,¡ cjkcj gkrh g vr% o oÙk d dUn ij cjkcj dk.k cukrh gA

ekuk leipHkt dh iR;d Hktk dUn ij $x°$ dk dk.k cukrh gA



vkdfr&21

vr% $5x° = 360°$ ¼D;k\½

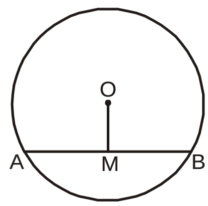
$$x° = \frac{360°}{5}$$

$\therefore$ $x° = 72°$

djd n[k

1- ,d oÙk d vrxr lecgHkt [khpk x;k gA lecgHkt dh iR;d Hktk dn ij $60°$ dk dk.k vrfjr djrh g rk lecgHkt dh Hktkvk dh l[;k Kkr dhft,A

dUn l thok ij yc



vkdfr&22

dkxt ij ,d oÙk [khfp,A blds dUn O rFkk AB bldh ,d thok gA dUn l thok AB ij yc Mkfy, ¼vkdfr 22½ tk AB l M ij feyrk gkA AM vkj BM d ckj e vki D;k dg ldr g\

D;k o cjkcj g \ dl irk djx \ ;gk ge xf.kr d dku l rdk dk i;kx dj\ D;k ge f=Hktk dh lokxlerk dk i;kx dj ldr g \

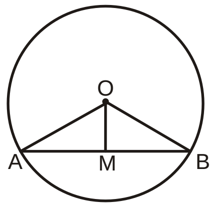
ie; & 3

dFku & fdlh oÙk d dUn l thok ij Mkyk x;k yc thok dk lef}Hkkftr djrk gA

Kkr g & ,d oÙk ftldk dUn O g rFkk AB mldh ,d thok g rFkk $OM \perp AB$

fl) djuk g & $AM = MB$

jpuk & O dk A vkj B l feykb,



vkdfr&23

miifÙk & ΔOMA rFkk ΔOBM e]

$OA = OB$ ¼,d gh oÙk dh f=T;k,½

$OM = OM$ ¼mHk;fu"B Hkt k½

$\angle OMA = \angle OMB$ ¼ledk.k g½

$\Delta OMA \cong \Delta OMB$ ¼ledk.k&d.k Hk tk lokx lerk l½

vr% $AM = MB$ ¼lokx le f=Hk t d lxr Hkkx½

bl ie; dk foyke D;k g \ D;k oÙk d dUn l ,d thok dk lef}Hkkftr dju d fy, [khph xb j[kk thok ij yc gkrh g\

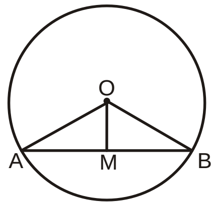
ie; & 4

dFku & ,d oÙk d dUn vkj thok d e/; fcn dk feyku okyk j[kk[kM thok ij yc gkrk gA

Kkr g & ,d oÙk ftldk dUn O gA AB mldh ,d thok g rFkk M thok dk e/; fcn gA

fl) djuk g & $OM \perp AB$

jpuk & O dk A vkj B l feykb,A



vkdfr&24

miifÙk & ΔOMA rFkk ΔOMB e

$OA = OB$ ¼,d gh oÙk dh f=T;k,½

$AM = MB$ ¼fn;k g½

$OM = OM$ ¼mHk;fu"B Hk tk½

$\Delta OMA \cong \Delta OMB$ ¼Hk-Hk-Hk- lokx lerk½

vr% $\angle OMA = \angle OMB$ ¼lokx le f=Hk t d lxr Hkkx½

$\angle OMA + \angle OMB = 180°$ ¼j[kh; ;Xe vfHkxghr½

$\angle OMA + \angle OMA = 180°$ ¼$\angle OMA = \angle OMB$½

$2\angle OMA = 180°$

$\angle OMA = 90°$

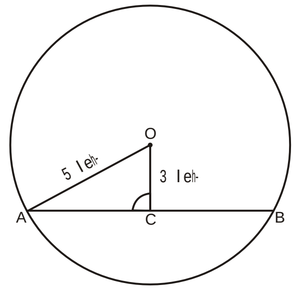
vr% $OM \perp AB$

vkb, vc ge oÙk d bu x.kk dk mi;kx djd dN mnkgj.k gy djr gA

mnkgj.k&3- ,d oÙk dh f=T;k 5 leh- g rFkk dUn l 3 leh- dh njh ij fLFkr thok dh yckb Kkr dhft,A

gy& ΔOAC e $OA = 5$ leh-] $OC = 3$ leh- gA ikbFkkxkjl ie; l

$$OA^2 = OC^2 + AC^2$$
$$5^2 = 3^2 + AC^2$$
$$AC^2 = 5^2 - 3^2$$
$$AC^2 = 25 - 9$$
$$AC^2 = 16$$
$$AC = 4$$



vkdfr&25

vr% thok $AB = 2 \times AC = 8$ leh-

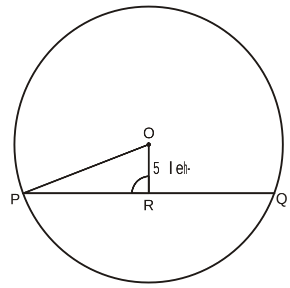
mnkgj.k&4- fdlh oÙk d dUnz l 5 leh- dh njh ij fLFkr thok dh eki 24 leh- gA oÙk dk 0;kl Kkr dhft,A

gy& $OR = 5$ leh-] thok $PQ = 24$ leh-

$$PR = \frac{1}{2} PQ \text{ leh-}$$
$$= \frac{1}{2} \times 24$$
$$= 12 \text{ leh-}$$

ΔOPR e ikbFkkxkjl ie; l]

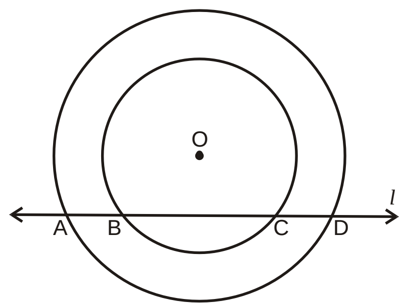
$$OP^2 = PR^2 + OR^2$$
$$= 12^2 + 5^2$$
$$= 144 + 25$$
$$= 169$$
$$OP = 13$$



vkdfr&26

vr% oÙk dk 0;kl $= 2 \times OP$
$= 2 \times 13$
$= 26$ leh-

mnkgj.k&5- ,d j[kk l nk ldUnh; oÙkk ¼,d gh dUn oky oÙk½] dk A, B, C vkj D fcnvk ij ifrPNn djrh g ¼nf[k, vkdfr&27½A ;fn $AD = 18$ leh- rFkk $BC = 8$ leh- gk rk AB dk eku Kkr dhft,A oÙkk dk dUn O gA



vkdfr&27

gy& dUn O l j[kk l ij yc OM [khp, ¼nf[k, vkdfr&28½A

$$OM \perp BC$$

$\therefore$ $BM = MC$ ------ ¼i½

$BM + MC = BC$

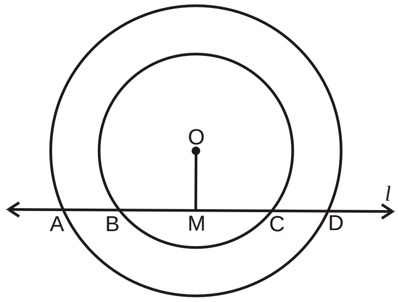
$BM + BM = 8$

$2BM = 8$

$BM = 4$ lseh-

blh izdkj $OM \perp AD$

$AM = MD$ ------ ¼ii½



vkdfr&28

$AM + MD = AD$

$2AM = 18$

$AM = 9$ lseh-

vr% $AB = AM - BM$

$= 9 - 4$ $= 5$ lseh-

mnkgj.k&6- ,d oÙk dh nks thok,¡ PQ vkSj RS lekUrj gSa vkSj AB, thok PQ dk yEc lef}Hkktd gSA fl) dhft, fd AB thok RS dk Hkh lef}Hkktu djrh gSA

gy%& ge tkurs gSa fd oÙk dh thok dk yEc)d oÙk d dsUnz ls gksdj tkrk gSA

AB thok PQ dk yEc lef}Hkktd gSA

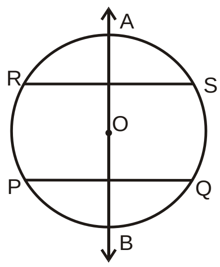
$\therefore$ AB oÙk d dsUnz ls gksdj tk,xkA

$AB \perp PQ$ vkSj $PQ \parallel RS \Rightarrow AB \perp RS$

vr% $AB \perp RS$ vkSj AB oÙk d dsUnz ls gksdj tkrk gSA

$\therefore$ AB thok RS dk Hkh yEc lef}Hkktd gksxkA

vr% AB thok RS dk Hkh lef}Hkktu djxkA



vkdfr&29

djds nsf[k,

$5x$ f=T;k okys oÙk d dsUnz ls $6x$ yEckbZ dh thok ij Mkys x, yEc dh yEckbZ Kkr dhft,A

i'ukoyh 1

1- oÙk dh thok dh yckb Kkr dhft,] ;fn

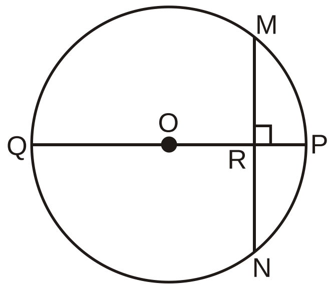
(i) f=T;k ¾ 13 lseh- rFkk thok dh dsUn l njh ¾ 12 lseh-

(ii) f=T;k ¾ 15 lseh- rFkk thok dh dsUn l njh ¾ 9 lseh-

2- oÙk dh f=T;k Kkr dhft, ;fn thok dh yckb rFkk dsUn l njh Øe’k%

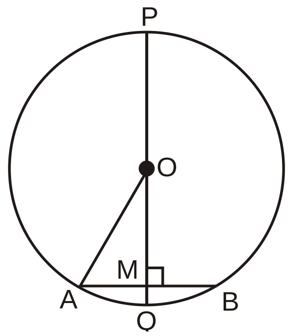
(i) 8 lseh- vkj 3 lseh- (ii) 14 lseh- vkj 24 lseh-

3- vkdfr&30 e] PQ oÙk dk O;kl gA $MN \perp PQ$ rFkk PQ=10 lseh- vkj PR=2 lseh- gS rks MN dh yckb Kkr dhft,A



vkdfr&30

4- vkdfr&31 e thok AB= 18 lseh- g rFkk PQ, thok AB dh yc lef}Hkkt d g tk thok dk M fcn ij feyrh g] ;fn MQ=3 lseh- gk rk oÙk dh f=T;k Kkr dhft,A



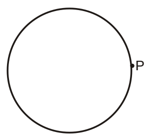
vkdfr&31

5- ,d oÙk ft ldk dsUn O g] dh nk thok, PQ vkj QR g rFkk $\angle PQO = \angle OQR = 55^\circ$A fl) dhft, fd PQ=QR.

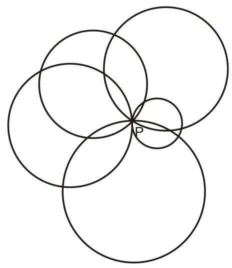
6- dsUn O okys ,d oÙk e AB vkj AC nk leku thok, gA ;fn $OD \perp AB$ vkj $OE \perp AC$ rk fl) dhft, fd ΔADE lef}ckg f=Hkt gA

rhu vlj[k fcnvk l gkdj tku okyk oÙk

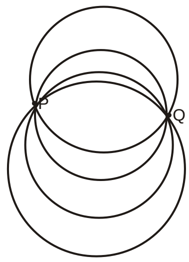
dkxt ij ,d fcn P yA ijdkj dh lgk;rk l ,d oÙk [khp tk fcn P l gkdj tkrk gA D;k ge fcn P l gkdj tku okyk ,d vkj oÙk [khp ldr g\ ,l fdru oÙk [khp tk ldr g \ ¼nf[k, vkdfr&33½A



vkdfr&32



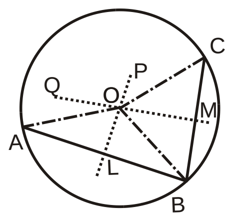
vkdfr&33



vkdfr&34

vki n[k ldr g fd ,l vud oÙk [khp tk ldr gA blh rjg nk fcnvk P o Q l gkdj tku oky vud oÙk [khp tk ldr g ¼nf[k, vkdfr&34½A D;k rhu vlj[k fcnvk P, Q o R l gkdj tku oky vud oÙk [khp tk ldr g\

ie; & 5



vkdfr&35

dFku & rhu vlj[k fcnvk l gkdj ,d vkj doy ,d oÙk [khpk tk ldrk gA

Kkr g & A, B vkj C rhu vlj[k fcn gA

fl) djuk g & A, B vkj C l ,d vkj doy ,d oÙk [khpk tk ldrk gA

jpuk & fcn A dk B l rFkk B dk C l feykb,A AB vkj BC d yEck)d Øe'k% PL vkj QM [khfp,A ekuk PL vkj QM ,d nlj dk fcn O ij ifrPNn djr gA O dk A,B vkj C l feykb,A

miifÙk & fcn O, AB d yEck)d PL ij fLFkr gA

$\therefore$ OA = OB ----- (i) ¼fdlh j[kk[k.M d yEck)d e fLFkr iR;d fcn j[kk[k.M d vr fcnvk l leku njh ij gkrk gA½

blh idkj O, BC d yck)d MQ ij fLFkr gA

$\therefore$ OB = OC ----- (ii)

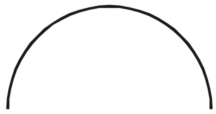
OA = OB = OC = r ¼ekuk½ ¼PL vkj QM ,d gh fcn ij ifrPNn djxA½ O ,dek= fcn g tk A, B vkj C l leku njh ij gkxkA

vr% rhu vlj[k fcnvk l ,d vkj doy ,d oÙk gkdj tkrk gA

ge bl rF; dk mi;kx f=Hkt d rhuk 'kh"kk l gkdj ,d oÙk [khpu e djr gA bl oÙk dk f=Hkt ABC dk ifjoÙk vkj bld dUn dk f=Hkt dk ifjdUn dgk tkrk gA

djd n[k

,d oÙk dk pki fn;k x;k g ¼nf[k, vkdfr&36½A oÙk dk dUnz Kkr dj oÙk dk ijk dhft,A



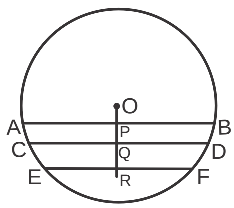
vkdfr&36

lkp o ppk dj

D;k rhu lj[k fcnvk l gkdj tku okyk dkb oÙk [khpk tk ldrk g\

thok,¡ vkj dUnz l mudh nfj;k

,d oÙk e vl[; thok,¡ gkrh gA fdlh Hkh f=T;k dk ,d oÙk [khfp,A oÙk ij ,d nlj d lekUrj thok,¡ [khfp, ¼nf[k, vkdfr&37½A D;k vki thok dh yckbZ rFkk thok dh dUnz l njh e dkb lEcU/k n[kr g\ nh xb vkdfr e thok AB, CD o EF dk dUnz l njh d ?kVr Øe e fyf[k,A vki n[kx fd thok dh yckbZ c<r tku ij mldh dUnz l njh de gkrh tkrh gA 0;kl oÙk dh lcl cMh thok gA mldh dUnz l njh 'kU; gA D;k ,d oÙk ij cjkcj thok,¡ y rk mudh dUnz l njh leku gkxh\ vkb, vc ge bl dFku dh lR;rk dh tkp djr gA

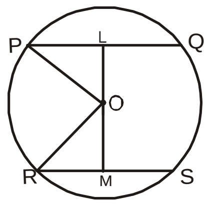


vkdfr&37

ie; & 6

dFku & fdlh oÙk ¼vFkok lokxle oÙkk½ dh cjkcj thok,¡ dUnz l ¼;k dUnzk l½ leku njh ij gkrh gA

Kkr g & oÙk e PQ vkj RS nk leku thok,¡ g rFkk O l PQ vkj RS ij Øe'k% OL vkj OM yc Mkyk x;k gA



vkdfr&38

fl) djuk g & $OL = OM$

jpuk & O dk P rFkk R l feykb,A

miifÙk & $PQ = RS$ ¼Kkr g½

$$\frac{1}{2}PQ = \frac{1}{2}RS$$

$PL = RM$ ¼dUnz l thok ij Mkyk x;k yEc mls leku Hkkxk e ckVrk gA½

$OP = OR$ ¼,d gh oÙk dh f=T;k½

$\angle OLP = \angle OMR = 90^\circ$ ¼jpuk l½

$\Delta OLP \cong \Delta OMR$ ¼R.H.S lokxlerk ie; l½

$\therefore$ OL = OM ¼lokxle f=Hkt d lxr Hkkx½

djd n[k

,d oÙk d dUn l lenjLFk thok, yckb e cjkcj gkrh gA mi ifÙk nA

vkb, vc ge mijkDr ifj.kkek dk mi;kx dj dN mnkgj.k gy djr g &

mnkgj.k&7- ,d oÙk dh f=T;k 20 leh- gA nk cjkcj vkj lekrj thokvk d chp dh njh 24 leh- gA thok dh yckb Kkr dhft,A

gy&

OM = ON ---- (i) ¼cjkcj thok, dUn l cjkcj njh ij gkrh gA½

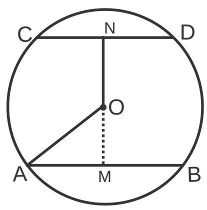
MN = OM + ON

MN = OM + OM (i) l

24 = 2 OM

OM = 12 leh-

OA = 20 leh-



vkdfr&39

ΔOAM e]

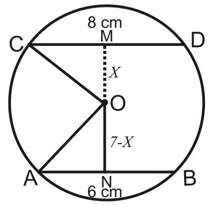
$$OA^2 = OM^2 + AM^2$$
$$AM^2 = OA^2 - OM^2$$
$$= 20^2 - 12^2$$
$$= 400 - 144$$
$$= 256$$
$$AM = 16$$

vr% thok dh yckb $AB = 2 \times AM$

$= 2 \times 16$

$= 32$ leh-

mnkgj.k&8- ,d oÙk dh 6 leh- rFkk 8 leh- ych nk thok, AB vkj CD lekrj g vkj dUn dh foijhr fn'kk e fLFkr gA ;fn AB vkj CD d chp dh njh 7 leh- gk] rk oÙk dh f=T;k Kkr dhft,A



vkdfr&40

gy& ;gk $AB = 6$ lseh-

$$AN = \frac{1}{2} AB$$

$$= \frac{1}{2} \times 6$$

$AN = 3$ lseh-

¼dsUn l thok ij Mkyk x;k yc thok dk lef}Hkkftr djrk gS½

blh idkj $CD = 8$ lseh

$$CM = \frac{1}{2} CD$$

$$= \frac{1}{2} \times 8 = 4 \text{ lseh-}$$

ΔOAN e

$$OA^2 = ON^2 + AN^2$$

$$OA^2 = (7 - x)^2 + 3^2 \quad (\because MN = 7CM, \text{ ekuk } OM = x \text{ rc } ON = 7 - x)$$

ΔOCM e]

$$OC^2 = OM^2 + CM^2$$

$$OC^2 = x^2 + 4^2$$

$\because$ $OA = OC$ ¼,d gh oÙk dh f=T;k,½

$\therefore$ $OA^2 = OC^2$

vr% $(7 - x)^2 + 3^2 = x^2 + 4^2$

$$x^2 - 14x + 58 = x^2 + 16$$

$$-14x = 16 - 58$$

$$14x = 42$$

$x = 3$ lseh-

vr% oÙk dh f=T;k

$$OA^2 = (7 - x)^2 + 3^2$$

$$= (7 - 3)^2 + 3^2$$

$$= 16 + 9$$

$$= 25$$

$OA = 5$ lseh-

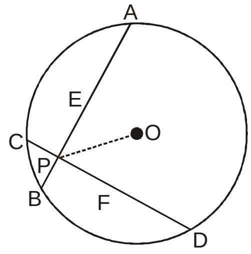
oÙk dh f=T;k $OA = 5$ lseh-

i'ukoyh 2

1- ,d oÙk dh nk thok,¡ AB vkj AC cjkcj gA fl) dhft, fd oÙk dk dUn $\angle BAC$ d lef}Hkktd ij fLFkr gA

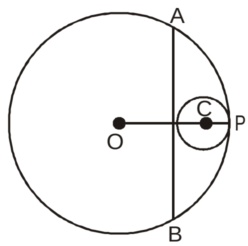
2- 10 leh- vkj 24 leh- dh nk lekrj thok,¡ oÙk d dUn d foijhr vkj gA thokvk d chp dh njh 17 leh- gA oÙk dk 0;kl Kkr dhft,A

3- ,d oÙk dk dUn O g RkFkk $\angle APD$ dk dk.k lef}Hkktd PO g ¼nf[k, vkdfr&41½A fl) dhft, AB=CD.



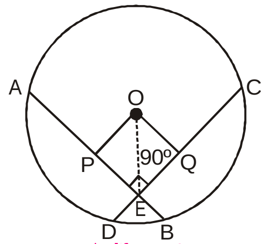
vkdfr&41

4- nk oÙk g ftudk dUn O vkj C g rFkk f=T;k Øe'k% 13 leh- vkj 3 leh- g ¼nf[k, vkdfr&42½A ;fn OC dk yc lef}Hkktd] cM oÙk dk A vkj B ij feyrk g rk ABdh yckbZ Kkr dhft,A



vkdfr&42

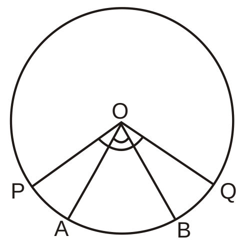
5- vkdfr&43 e dUn O okys ,d oÙk e AB vkj CD nk leku thok,¡ fcn E ij ledk.k ij feyrh gA ;fn P vkj Q thok AB vkj CD d e/; fcn gk rk fl) dhft, fd OPEQ ,d ox gA



vkdfr&43

oÙk d pki }kjk oÙk d dUn ij vrfjr dk.k &

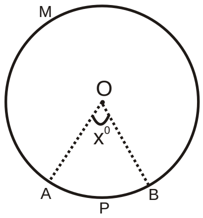
oÙk ij dkb nk fcUn A vkj B gk rk oÙk nk pkik e cV tkrk g A y?k pki AB d vr fcn A vkj B dk dUn O l feykb,A pki AB d }kjk dUn ij cuk $\angle AOB$ dUnh; dk.k dgykrk gA iu% oÙk ij nk fcn P vkj Q bl idkj yr g fd mul cu y?k pki PQ dh yckb] y?k pki AB l vf/kd gk rFkk og dUn O ij $\angle POQ$ Ckukrk gk ¼nf[k, vkdfr&44½A D;k pki dh yckb rFkk pki }kjk dUn ij cuk, x, dk.k e dkb lc/k n[k ik jg g\ vkdfr&44 e vki n[k ldr g fd pki dh yckb vf/kd gku ij dUn e cuk dk.k Hkh vf/kd gkrk gA



vkdfr&44

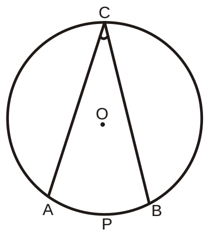
lkp ,o ppk dj

,d oÙk d y?kpki APB dk v’k eki ¼vkdfr&45½ $x°$ gk rk nh?k pki AMB dk v’k eki ¼$360° - x°$½ gkrk gA D;k\



vkdfr&45

oÙk d pki d vr fcnvk dk oÙk dh ’k"k ifjf/k e fLFkr fdlh fcn l feykb,A tl vkdfr&46 e fn[kk;k x;k g rc $\angle ACB$ pki APB }kjk ifjf/k d C fcn ij cuk;k x;k dk.k dgykrk gA



vkdfr&46

vkb, vc ge ,d pki }kjk dUn ij vrfjr dk.k rFkk oÙk d ifjf/k d ’k"k Hkkx d fdlh fcn ij vrfjr dk.k e lc/k n[kr gA

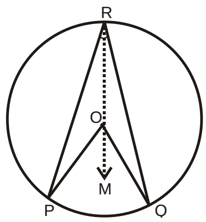
ie; & 7

dFku & oRr d fdlh pki }kjk dUn ij vrfjr dk.k] oÙk d ifjf/k d ’k"k Hkkx d fdlh fcn ij vrfjr dk.k dk nxuk gkrk gA

Kkr g & oÙk d ,d pki PQ }kjk dUn ij cuk dk.k $\angle POQ$ vkj ’k"k ifjf/k d R fcn ij cuk dk.k $\angle PRQ$ gA

fl) djuk g & $\angle POQ = 2\angle PRQ$

jpuk & fcn R dk dUn O l feykr g, M rd vkx c<k;kA



vkdfr&47

miifÙk &

ΔPOR e]

$OP = OR$ ¼,d gh oÙk dh f=T;k,½

$\angle OPR = \angle ORP$ ¼f=Hkt dh cjkcj Hkt kvk d lEe[k dk.k cjkcj gkr gA½

$\angle POM = \angle OPR + \angle ORP$ ¼cfg"dk.k ie;½

$\angle POM = 2\angle ORP$ ----------¼1½

ΔQOR e]

$OQ = OR$ ¼,d gh oÙk dh f=T;k,½

$\angle OQR = \angle ORQ$ ¼f=Hkt dh cjkcj Hkt kvk d lEe[k dk.k½

$\angle QOM = \angle ORQ + \angle OQR$ ¼cfg"dk.k ie;½

$\angle QOM = 2\angle ORQ$ ------------¼2½

vr% $\angle POM + \angle QOM = 2\angle ORP + 2\angle ORQ$ ------------¼1½ o ¼2½ dk tkMu ij

$$\angle POQ = 2(\angle ORP + \angle ORQ)$$

$$\angle POQ = 2\angle PRQ$$

vkb, vc ge ie; ¼7½ dh ,d fLFkfr ij fopkj djrs gSa tc pki ,d v)ZoÙk gksA

ie; & 8

dFku & oÙk dh ifjf/k ds fdlh fcn ij 0;kl }kjk vrfjr dks.k ledks.k gksrk gSA

Kkr gS & oÙk ij 0;kl }kjk vrfjr dks.k $\angle LNM$ gSA

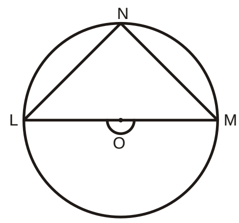
fl) djuk gS & $\angle LNM = 90°$

miifRr & $\angle LOM = 180°$ ¼ljy js[kk½

$\angle LOM = 2\angle LNM$ ¼ie; 7 ls½

$\therefore \quad 2\angle LNM = 180°$

;k $\quad \angle LNM = \dfrac{180°}{2} = 90°$



vkdfr&48

vr% ge dg ldrs gSa fd ,d oÙk dh ifjf/k ds fdlh fcn ij 0;kl }kjk vrfjr dks.k ledks.k gksrk gSA

mnkgj.k&9- vkdfr&49 esa O oÙk dk dsUnz rFkk $\angle OPR = 30°$ rFkk $\angle OQR = 40°$ gSA rc $\angle POQ$ Kkr dhft,A

gy & ΔPOQ esa]

$OP = OR$ ¼,d gh oÙk dh f=T;k,¡½

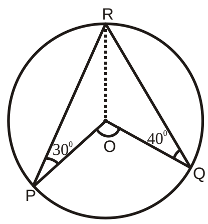
$\therefore \quad \angle OPR = \angle ORP = 30°$ ¼lef}ckgq f=Hkqt ds dks.k½

blh izdkj ΔOQR esa]

$\angle OQR = \angle ORQ = 40°$

vr% $\quad \angle PRQ = \angle ORP + \angle ORQ$

$= 30° + 40°$



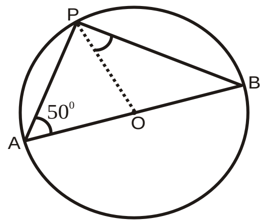
vkdfr&49

$\angle PRQ = 70°$

$\therefore \quad \angle POQ = 2\angle PRQ$ ¼dsUnz ij cuk dks.k 'ks"k [k.M esa cus dks.k dk nxuk gksrk gS½

$\angle POQ = 2 \times 70° = 140°$

mnkgj.k&10- vkdfr&50 e AB oÙk dk 0;kl vkj O dUn gA ;fn $\angle OAP = 50°$ rk $\angle OPB$ Kkr dhft,A



vkdfr&50

gy&
ΔAOP e

$OA = OP$ ¼,d gh oÙk dh f=T;k,½

$\therefore \quad \angle OAP = \angle OPA = 50°$

$\angle APB = 90°$ ¼0;kl }kjk vrfjr dk.k½

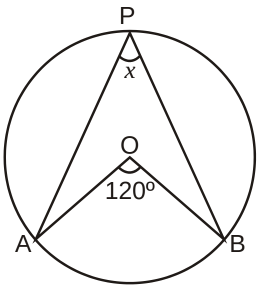
vr% $\angle APB = \angle OPA + \angle OPB$

$90° = 50° + \angle OPB$

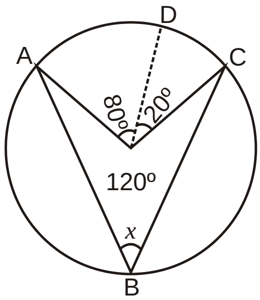
$\therefore \quad \angle OPB = 40°$

djd n[k

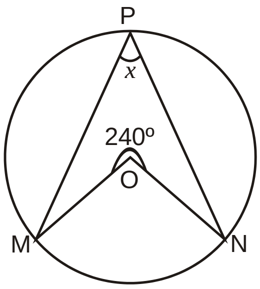
nh xbl vkdfr;k e x dk eku Kkr dhft,



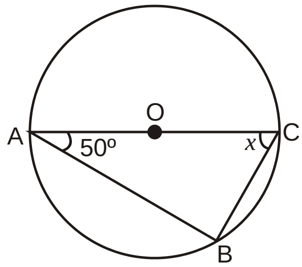
vkdfr&51



vkdfr&52



vkdfr&53



vkdfr&54

vkb, vc ge oÙk d ,d gh [k.M e cu dk.kk d chp lc/k n[krs gA

ie; & 9

dFku & oÙk d ,d gh [k.M e cu dk.k vki l e cjkcj gkr gA

Kkr g & oÙk dk dUn O, oÙk d ,d gh [k.M e cu $\angle ACB$ vkj $\angle ADB$ g

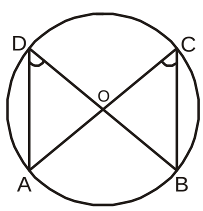
fl) djuk g & $\angle ACB = \angle ADB$

miifÙk & $\angle AOB = 2\angle ACB$ ¼pfd oÙk d fdlh pki }kjk dUn ij vrfjr dk.k oÙk dh ifjf/k d 'k"k Hkkx d fdlh fcUn ij vrfjr dk.k dk nxuk gkrk gA½

$\angle AOB = 2\angle ADB$

vr% $2\angle ACB = 2\angle ADB$

$\angle ACB = \angle ADB$

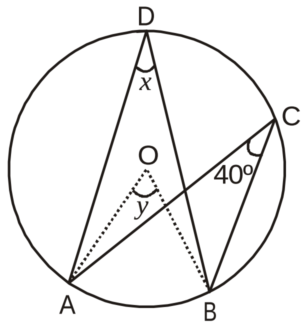


vkdfr&55

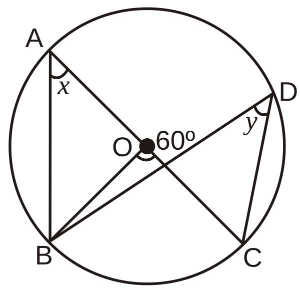
vr% ge dg ldr g fd oÙk d ,d gh [k.M e cu dk.k vki l e cjkcj gkr gA

djd n[k

nh xb vkdfr e x vkj y dk eku Kkr dhft,



vkdfr&56



vkdfr&57

mnkgj.k&11- vkdfr&58 e $\angle CAB = 25°$ vkj $\angle ADB = 35°$ gA rc $\angle ABC$ Kkr dhft,A

gy& ;gk vkdfr e $\angle ADB = \angle ACB$ ¼,d gh oÙk[k.M d dk.k½

$\therefore \quad \angle ACB = 35°$

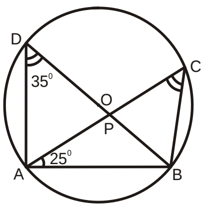
ΔABC e]

$\angle ABC + \angle ACB + \angle CAB = 180°$

$\angle ABC + 35° + 25° = 180°$

$\angle ABC = 180° - 60°$

$\angle ABC = 120°$



vkdfr&58

mnkgj.k&12- fl) dhft, fd lef}ckgq f=Hkt dh cjkcj Hkktkvk e l fdlh ,d Hkt k dk O;kl ekudj [khpk x;k oÙk f=Hkt d vk/kkj dk lef}Hkkftr djrk gA

gy& ΔABC e $AB = AC$ rFkk AB dk O;kl ekudj [khpk x;k oÙk BC dk fcn D ij dkVrk gA

pfd oÙk ij O;kl }kjk cuk dk.k ledk.k gkrk gA

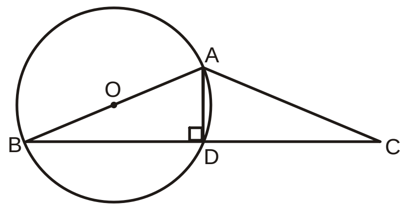
$\therefore \quad \angle ADB = 90°$

ijUr $\quad \angle ADB + \angle ADC = 180°$

$90° + \angle ADC = 180°$

$\angle ADC = 90°$

ΔADB vkj ΔADC e]



vkdfr&59

$AB = AC$ ¼fn;k g½

$AD = AD$ ¼mHk;fu"B Hk tk½

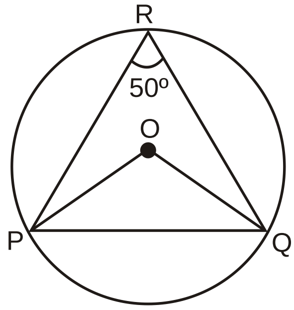
vkj $\angle ADB = \angle ADC = 90°$

$\therefore$ $\Delta ADB \cong \Delta ADC$ ¼ledk.k&d.k&Hk tk lokx lerk½

$BD = DC$

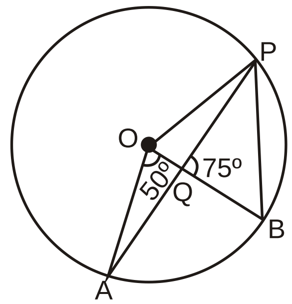
i'ukoyh 3

1- vkdfr&59 e] O oÙk dk dUn g] PQ ,d thok gA ;fn $\angle PRQ = 50°$ gk rk $\angle OPQ$ Kkr dhft,A



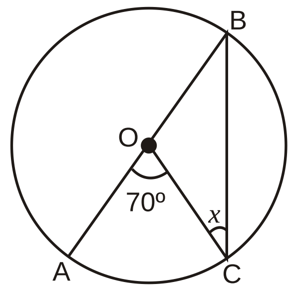
vkdfr&60

2- vkdfr e $\angle PBO$ dk eku Kkr dhft, ;fn $\angle AOB = 50°$ rFkk $\angle PQB = 75°$ gA



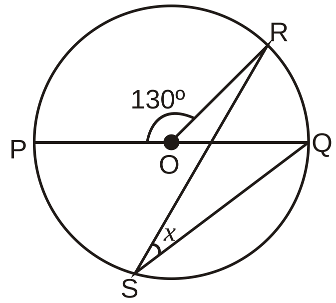
vkdfr&61

3- vkdfr e x dk eku Kkr dhft,A O oÙk dk dUn gA



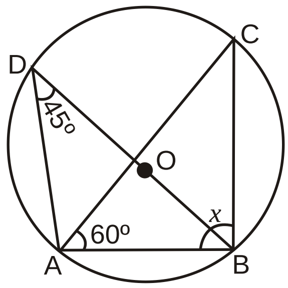
vkdfr&62

4- ;fn O oÙk dk dUn g rk x dk eku Kkr dhft,A



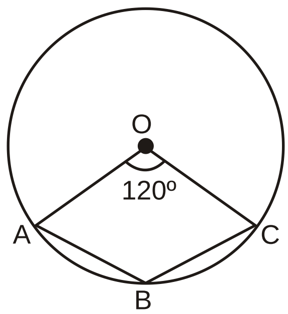
vkdfr&63

5- ;fn O oÙk dk dUn g rk nh xb vkdfr e x dk eku Kkr dhft,A



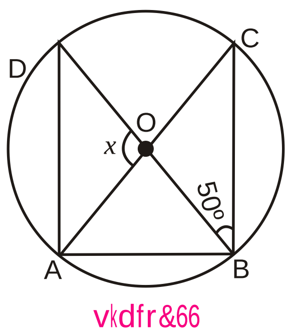
vkdfr&64

6- vkdfr e $\angle ABC$ dk eku Kkr dhft,A



vkdfr&65

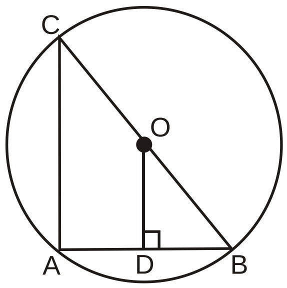
7- vkdfr e x dk eku Kkr dhft, RkFkk fl) dhft, fd $AD \parallel BC$.



vkdfr&66

8- vkdfr e] O oÙk dk dUn rFkk $OD \perp AB$;fn OD=5 lseh- gk rk AC dk eku

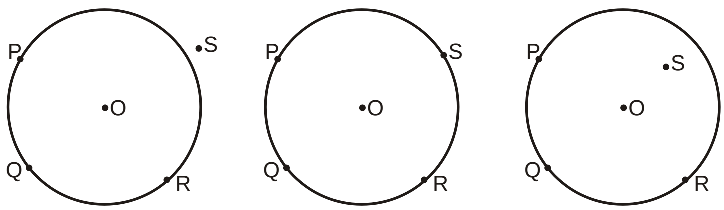
Kkr dhft,A



vkdfr&67

pØh; prHkt

vkiu n[kk g fd rhu vlj[k fcUnvk l gkdj ,d vkj doy ,d gh oÙk [khpk tk ldrk gA D;k ge pkj vlj[k fcnvk ¼ftue dkb rhu fcn lj[k ugh g½ dk ydj ,d oÙk [khp ldr g\ dkb rhu vlj[k fcn P, Q, R ydj ,d oÙk [khpu ij ge pkFk fcn S dh fLFkfr fuEu idkj ikIr gk ldrh gA

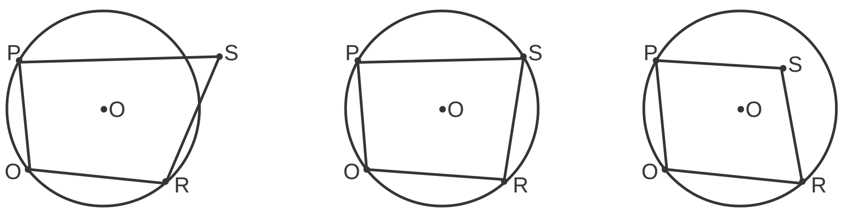


fLFkfr I fLFkfr II fLFkfr III

vkdfr&68

fLFkfr I e fcn S oÙk d ckg; Hkkx e] fLFkfr II e oÙk ij rFkk fLFkfr III e oÙk d vUrHkkx e fLFkr gA vr% ge dg ldr g fd pkj vlj[k fcn l gkdj ,d oÙk [khpu ij pkjk fcn ,d oÙk e gk ldr g vkj ugh HkhA

mijkDr vkdfr e fcn P, Q, R, S dk feyku ij prHkt iklr gkxkA ¼nf[k, vkdfr&69½



fLFkfr I fLFkfr II fLFkfr III

vkdfr&69

fLFkfr II e iklr prHkt PQRS d pkjk 'kh"k oÙk ij fLFkr gA ;fn fd lh prHkt d pkjk 'kh"k ,d oÙk ij fLFkr gkr g rk og pØh; prHkt dgykrk gA D;k bl prHkt dk dkb fo'k"k x.k gkrk g tk vU; prHkt e lkekU;r% ugh gkrk g\

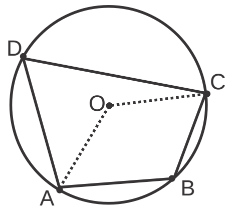
djd n[k

fd lh Hkh f=T;k dk ,d oÙk [khfp,A oÙk ij dkb pkj fcn ydj prHkt cukb,A mud lEe[k dk.kk dk eki dj mudk ;kxQy Kkr dhft,A

vki ik,x fd , lk prHkt ftld pkjk 'kh"k oÙk ij gk mud lEe[k dk.kk dk ;kxQy $180°$ gkrk gA

vkb, vc ge mijkDr dFku dk rkfdd #i Kkr djxA

ie; & 10



vkdfr&70

dFku & pØh; prHkt d lEe[k dk.kk dk ;kxQy $180°$ gkrk gA

Kkr g & ABCD ,d pØh; prHkt gA

fl) djuk g & $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180°$

jpuk & O l A vkj C dk feykb,A

miifÙk & pki ABC dk dUn ij cuk dk.k $\angle AOC = 2\angle ADC$ ¼i½

pki CDA dk dUn ij cuk dk.k $\angle COA = 2\angle ABC$ ¼ii½

vr% $\angle AOC + \angle COA = 2(\angle ADC + \angle ABC)$

$$360° = 2(\angle D + \angle B)$$

$$\angle B + \angle D = \frac{360°}{2}$$

$$\angle B + \angle D = 180°$$

prHkt ABCD e]

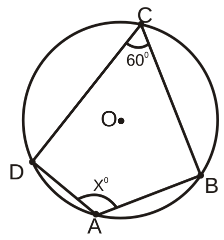
$$\angle A + \angle C + \angle B + \angle D = 360°$$

$$\angle A + \angle C + 180° = 360°$$

$$\angle A + \angle C = 180°$$

vr% ge dg ldr g fd pØh; prHkt d lEe[k dk.kk dk ;kxQy $180°$ gkrk gA

D;k bl dFku dk foykse Hkh lR; g\ gk] ;fn fd lh prHkt d lEe[k dk.kk d fd lh ,d ;Xe dk ;kx $180°$ gk rk prHkt pØh; prHkt gkrk g] vFkkr prHkt d pkjk 'kh"k l gkdj ,d oÙk [khpk tk ldrk gA mnkgj.k&13- nh xbZ vkdfr&71 esa x dk eku Kkr dhft,A



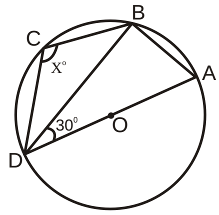
vkdfr&71

gy& $\angle A + \angle C = 180^o$ ¼pØh; prqHkZqt dk lEeq[k dks.kksa dk ;ksx 180^o gksrk gSA½

$x + 60^o = 180^o$

$x = 120^o$

mnkgj.k&14- nh xbZ vkdfr&72 esa x dk eku Kkr dhft,A



vkdfr&72

gy& $\angle ABD = 90^o$ ¼oÙk ij 0;kl }kjk cuk dks.k½

$\angle ABD + \angle BDA + \angle DAB = 180^o$

$90^o + 30^o + \angle DAB = 180^o$

$\angle DAB = 180^o - 120^o$

$\angle DAB = 60^o$

$\angle DCB + \angle DAB = 180^o$ ¼pØh; prqHkZqt dk lEeq[k dks.kksa dk ;ksx½

$x + 60^o = 180^o$

$x = 120^o$

mnkgj.k&15- f=Hkqt ABC dh Hkqtk BC ij fcUnq P bl çdkj fLFkr gS fd AB=AP A fcUnq A vkSj C ls Øe'k% BC vkSj PA ds lekUrj js[kk,¡ [khap tks fcUnq D ij feyrh ¼nsf[k, vkdfr&73½A fl) dhft, fd ABCD ,d pØh; prqHkZqt gSA

vkdfr&73

gy& ΔABP esa

AB=AP ¼fn;k gS½

vr% $\angle ABP = \angle APB$

¼leku Hkqtk ds lEeq[k dks.k½

AP II CD rFkk AD II BC ¼fn;k gS½

vr% APCD ,d lekarj prqHkZqt gSA

$\angle APC = \angle ADC$

¼lekarj prqHkZqt ds lEeq[k dks.k½

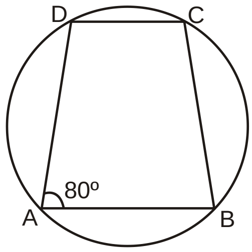
pwafd $\angle APB + \angle APC = 180^o$ ¼js[kh; ;qXe vfHkxghr ls½

$\angle ABP + \angle ADC = 180^o$ ¼$\angle APB = \angle ABP$ vkSj $\angle APC = \angle ADC$½

fdlh prqHkZqt ds lEeq[k dks.kksa ds fdlh ,d ;qXe dk ;ksx 180^o gks rks prqHkZqt pØh; prqHkZqt gksrk gSA

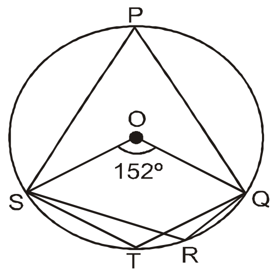
i'ukoyh 4

1- nh xb vkdfr e AB II CD ;fn $\angle DAB = 80^{o}$ rk prHkt d 'k"k vr%dk.kk dk eku Kkr dhft,A



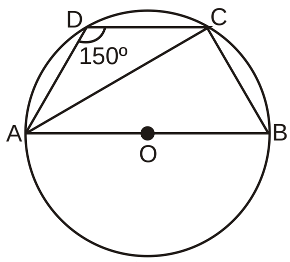
vkdfr&74

2- nh xb vkdfr e $\angle QRS$ rFkk $\angle QTS$ Kkr dhft,A



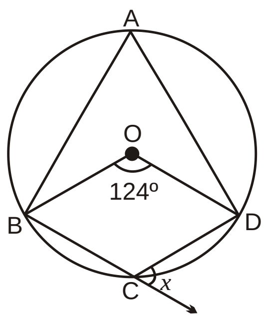
vkdfr&75

3- nh xb vkdfr e $ABCD$,d pØh; prHkTk g ft lddh Hkt k AB oÙk dk 0;kl gA ;fn $\angle ADC = 150^{o}$ gk rk $\angle BAC$ Kkr dhft,A



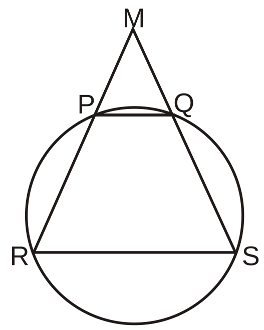
vkdfr&76

4- nh xb vkdfr e x dk eku Kkr dhft,A



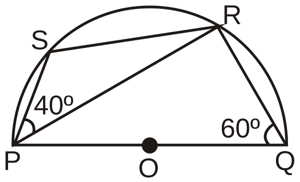
vkdfr&77

5- ,d oÙk dh nk lekrj thok,¡ PQ vkj RS g rFkk j[kk,¡ RP vkj SQ] fcn M ij ifrPNn djrh g¼nf[k, vkdfr&78½A
fl) dhft, fd MP = MQ



vkdfr&78

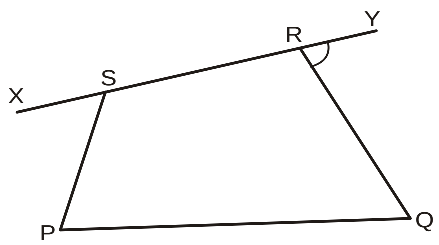
6- nh xb vkdfr e PQ v)oÙk dk 0;kl gA ;fn $\angle PQR = 60^o$ rFkk $\angle SPR = 40^o$ gk rk $\angle QPR$ vkj $\angle PRS$ dk eku Kkr dhft,A



vkdfr&79

7- ;fn ,d pØh; prHkt d fod.k oÙk d 0;kl gk rk fl) dhft, fd og ,d vk;r gkxkA

8- vkdfr&80 e PQRS ,d prHkt gA ;fn $\angle P = \angle QRY$ g rk fl) dhft, fd PQRS ,d pØh; prHkt gA



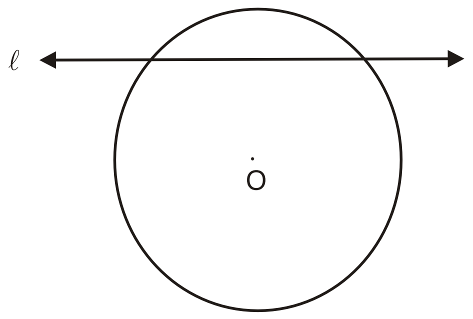
vkdfr&80

9- ;fn ,d leyc prHkt dh vlekUrj Hkt k,¡ cjkcj gk rk fl) dhft, fd og pØh; prHkt gkxkA

FE46VI

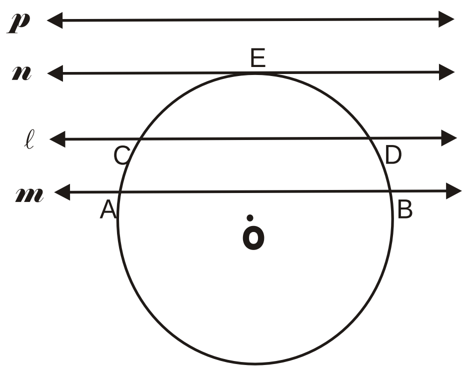
oÙk dh Li'k j[kk, vkj Nnd j[kk,

dkxt ij fdlh Hkh f=T;k dk oÙk rFkk ,d j[kk l y t l vkdfr&81 e fn[kk;k x;k gA vc j[kk l d lekUrj dN j[kk, [khfp,A



vkdfr&81

nh xb vkdfr&82 e j[kk m vkj oÙk e nk mHk;fu"B fcn A, B g A blh idkj j[kk l vkj oÙk e nk mHk;fu"B fcn C, D gA j[kk n vkj oÙk e doy ,d gh mHk;fu"B fcn E g rFkk j[kk p vkj oÙk e dkb mHk;fu"B fcn ugh gA

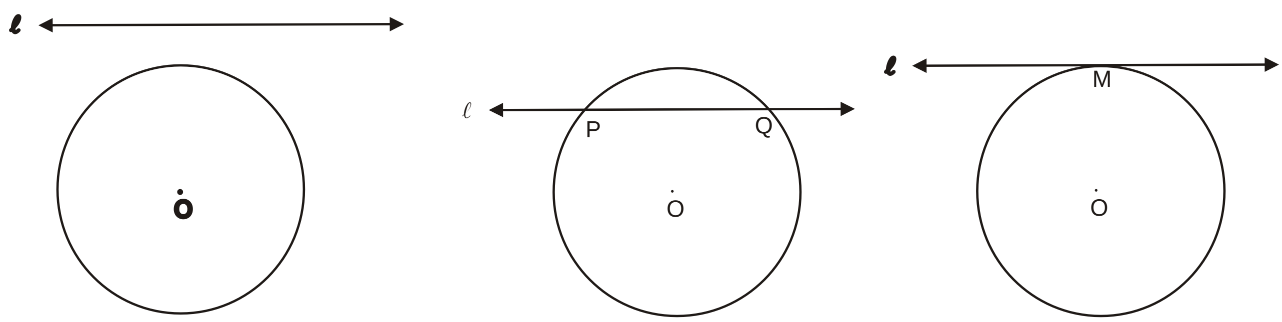


vkdfr&82

ge n[kr g fd dkb j[kk fdlh oÙk d lki{k fuEu rhu fLFkfr;k e gk ldrh gA

vkdfr&83 (i) e j[kk l oÙk dk ifrPNn ugh djrh vFkkr j[kk l o oÙk dk dkb Hkh mHk;fu"B fcn ugh gA

vkdfr&83 (ii) e j[kk l oÙk dk nk fHkUu fcnvk ij ifrPNn djrh g vFkkr j[kk l vkj oÙk e nk mHk;fu"B fcn P vkj Q gA bl fLFkfr e ge l dk oÙk dh Nnd j[kk dgr gA

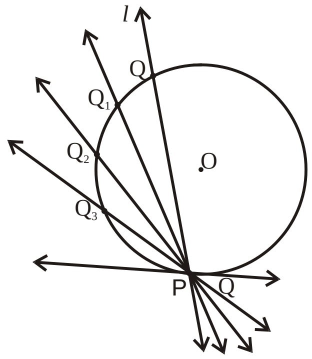


(i) (ii) (iii)

vkdfr&83

vkdfr&83 (iii) e j[kk l vkj oÙk dk ,d fcn ij doy Li'k djrh g vFkkr j[kk l vkj oÙk e ,d gh mHk;fu"B fcn M gA blh fLFkfr e ge j[kk l dk oÙk dh Li'k j[kk rFkk mHk;fu"B fcn M dk Li'k fcn dgr gA

vkdfr&84 e j[kk l oÙk dk nk fcnvk P o Q ij ifrPNn dj jgh gA j[kk l dk fcn P ij fLFkj j[kr g, fd lh vkdfr&84 e j[kk l oÙk dk nk fcnvk P o Q ij ifrPNn dj jgh gA j[kk l dk fcn P ij fLFkj j[kr g, fd lh Hkh ,d fn'kk e yxkrkj ?kekr tku ij ,d fLFkfr ,lh gkxh fd ifrPNnh fcn] fcn P ij likrh gk tkrk gA bl fLFkfr e Nnd j[kk dk ge oÙk dh Li'k j[kk dgr g vkj fcn P dk Li'k fcnA



vkdfr&84

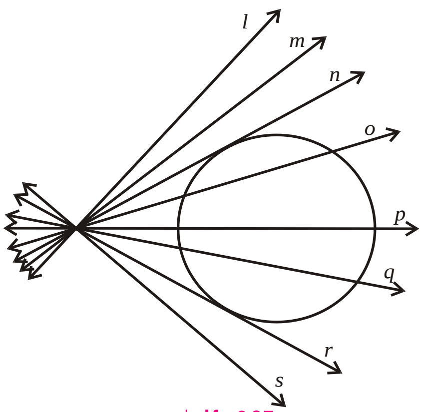
fdlh oÙk dh Li'k j[kk] Nnd j[kk dh ,d fof'k"V n'kk g tc lxr thok d nkuk fljs likrh gk tk,A vFkkr fdlh oÙk dh Li'k j[kk og j[kk g tk oÙk dk ,d fcn ij Li'k djrh gA

lkp o ppk dj

oÙk ij fLFkr fdlh fcn ij ,d gh Li'k j[kk [khph tk ldrh gA D;k\

djd n[k

uhp nh xb vkdfr e ifrPNnh j[kk] Nnd vkj Li'k j[kkvk dk igpku dj viuh dkih e mud uke fy[kA



vkdfr&85

Li'k j[kk rFkk Li'k fcn l gkdj tkrh gb f=T;k

,d fcn o ,d j[kk d chp dh njh ¼tc fcn j[kk e u gk½ U;ure rc gkrh g tc og ycor gkrh gA D;k Li'k fcn l dUn dh njh U;ure gkxh vFkkr Li'k fcn l tku okyh f=T;k Li'k j[kk ij yc gkxh\

ie; & 11

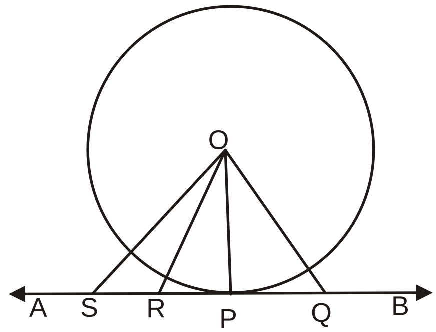
oÙk dh Li'k j[kk ij] Li'k fcn l tku okyh f=T;k yc gkrh gA

Kkr g & ,d oÙk dk dUn O g rFkk Li'k j[kk AB Li'k fcn P ij oÙk dk Li'k djrh gA

fl) djuk g & $OP \perp AB$

jpuk & AB ij P d vfrfjDr vU; fcn Q, R, S yhft, vkj dUn O l feykb,A

miifÙk & fcn Q, R, S oÙk d ckgj fLFkr g] oÙk d ckg; Hkkx e fLFkr fcn dh dUn l njh f=T;k l cMh gkrh gA vr% OP dh yckb OQ, OR, OS e iR;d l NkVh gkxhA vr% njh OP] fcn O l AB d vU; fcnvk l U;ure njh ij gA



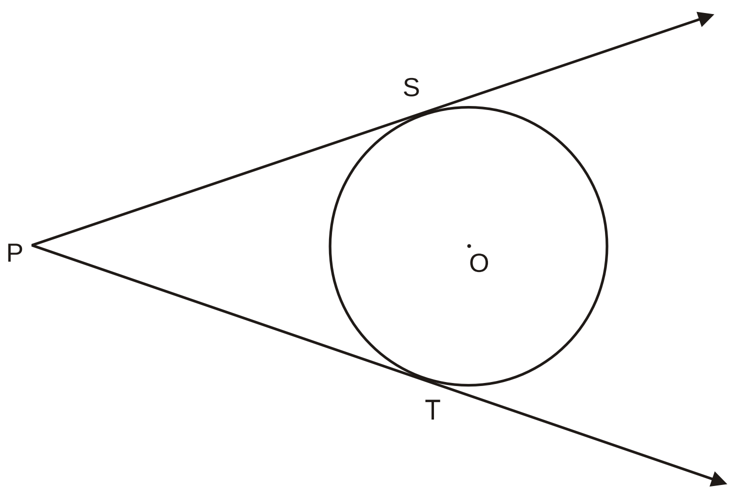
vkdfr&86

$\therefore OP \perp AB$

ge bl rF; dk mi;kx oÙk d fdlh fcn ij Li'k j[kk [khpu e djr g tc ge oÙk dk dUn fcn Kkr gkA

oÙk d ckgj fLFkr fcUn l fdruh Li'k j[kk,&

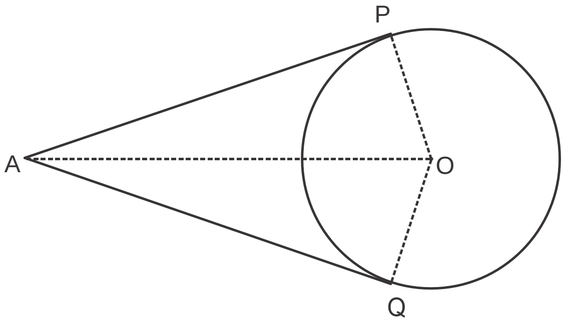
oÙk d ckg; Hkkx e ,d fcn P yhft,A oÙk ij fcn P l Li'k j[kk,a [khpu dk i;Ru dhft, ¼nf[k, vkdfr&87½A vki ik,x fd oÙk d ckgj fLFkr fcn l oÙk ij nk vkj doy nk Li'k j[kk,a [khp ldr gA ckg; fcn P l oÙk d Li'k fcn rd dh njh dk] Li'k j[kk dh yckb dgr gA vkdfr e D;k PS vkj PT e dkb lc/k g\ PS vkj PT dh yckb;k ekiA vki ik,x fd PS = PTA vkb, bl rF; dh if"V d fy, miifÙk n[kr gA



vkdfr&87

ie; & 12

cká fcUnq ls oÙk ij [khaph xbZ Li'kZ j[kkvksa dh yackb;k¡ cjkcj gksrh gSA



vkdfr&88

Kkr gS & AP vkSj AQ cká fcUnq A ls oÙk ij [khap x, nks Li'kZ j[kk[k.M gSaA

fl) djuk gS & $AP = AQ$

jpuk & oÙk d s dsUnz O ls A ,P, Q dks feykb,A

miifÙk & ΔOPA rFkk ΔOQA esa]

$OP = OQ$

¼,d gh oÙk dh f=T;k,¡½

$OA = OA$ ¼mHk;fu"B Hkqtk,¡½

$\angle APO = \angle AQO = 90°$ ¼Li'kZ fcUnq ls tkrh gqbZ f=T;k] Li'kZ j[kk ij yEc gksrh gSA½

$\Delta OPA \cong \Delta OQA$ ¼ledk.k&d.kZ&Hkqtk lokZxlerk½

vr% $AP = AQ$ ¼lokZxle f=Hkqt d s laxr Hkkx½

mijksDr ie; dh miifÙk e as $\Delta OPA \cong \Delta OQA$ vr% $\angle OAP = \angle OAQ$ vFkkZr~ dg ldr s gSa fd oÙk dk dsUnz $\angle PAQ$ d s dks.kk)Zd ij fLFkr gSA blls rF; dk mi;ksx ,sls oÙk [khapu es a fd;k tk ldrk gS tks nks ifrPNsnh j[kkvksa dks Li'kZ djrk gSA fo'o"k :i ls ,d ,sls oÙk Hkh [khapk tk ldrk gS tks f=Hkqt dh rhuksa Hkqtkvksa dks Li'kZ djxkA bls oÙk dks f=Hkqt dk vr%oÙk vkSj blds dsUnz dks f=Hkqt dk vr%dsUnz dgk tkrk gSA

mnkgj.k&16- nh xbZ vkdfr&89 e sa $OP = 13$ lseh- rFkk oÙk dh f=T;k 5 lseh- gSA fcUnq P ls oÙk ij [khaph xbZ Li'kZ j[kk PT rFkk PS dh yackbZ Kkr dhft,A

gy& ΔOPT esa]

$\angle OTP = 90°$

ledks.k ΔOPT esa

$OP^2 = OT^2 + PT^2$

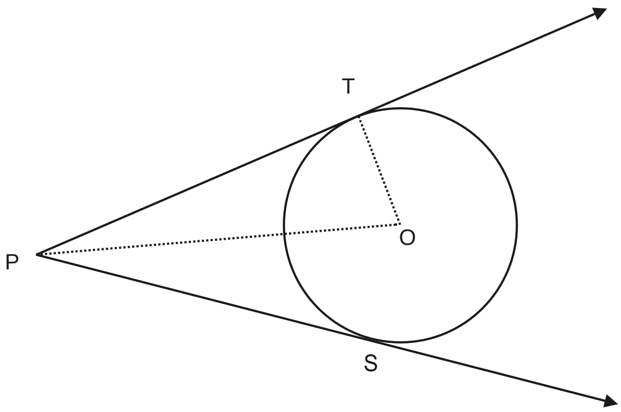
;k $13^2 = 5^2 + PT^2$

;k $PT^2 = 13^2 - 5^2$

$PT^2 = 169 - 25$

$PT^2 = 144$

$PT = 12$ lseh-



vkdfr&89

ge tkur g fd

$PS = PT$

vr% $PS = 12$ lseh

vr% Li'k j[kk $PT = PS = 12$ lseh-

mnkgj.k&17- nh xb vkdfr&90 e O oÙk dk dUn g rFkk PA vkj PB oÙk dh Li'k j[kk, bl idkj g $\angle APB = 60°$ gk rk $\angle AOB$ dk eku Kkr dhft,A

gy& prHkt AOPB e]

$$\angle OAP = \angle OBP = 90°$$

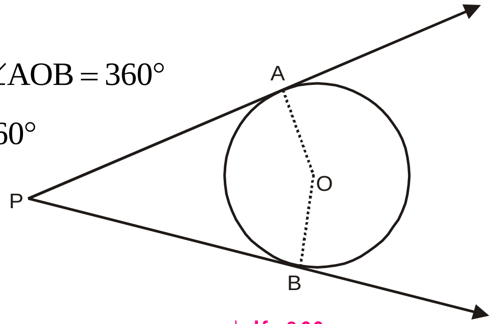
rFkk $\angle OAP + \angle APB + \angle PBO + \angle AOB = 360°$

$$90° + 60° + 90° + \angle AOB = 360°$$

$$240° + \angle AOB = 360°$$

$$\angle AOB = 360° - 240°$$

$$\angle AOB = 120°$$



vkdfr&90

mnkgj.k&18- nh xb vkdfr&73 e P, Q rFkk R ,d oÙk d cká fcn g] ftldk dUn O gA Li'k j[kk PA, QB rFkk RC dh yEckb;k Øe'k% 3 lseh]4 lseh] vkj 5 lseh] gA ΔPQR dk ifjeki Kkr dhft,A

gy& oÙk d cká fcn l oÙk ij [khph xb Li'k j[kkvk dh yEckb;k cjkcj gkrh gA

$\therefore$ $PC = PA = 3$ lseh-

$QA = QB = 4$ lseh-

$RB = RC = 5$ lseh-

$PQ = PA + AQ$

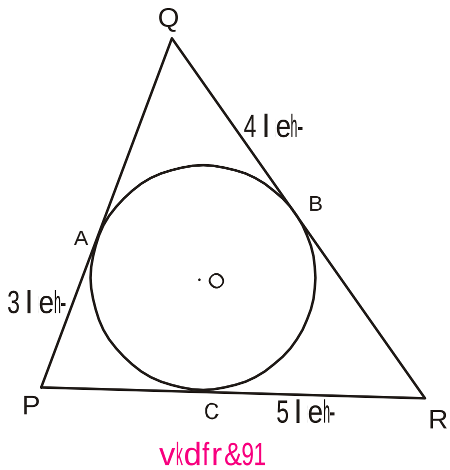
$PQ = 3 + 4 = 7$ lseh-

$QR = QB + BR$

$QR = 4 + 5 = 9$ lseh-

$PR = PC + CR$

$PR = 3 + 5 = 8$ lseh-

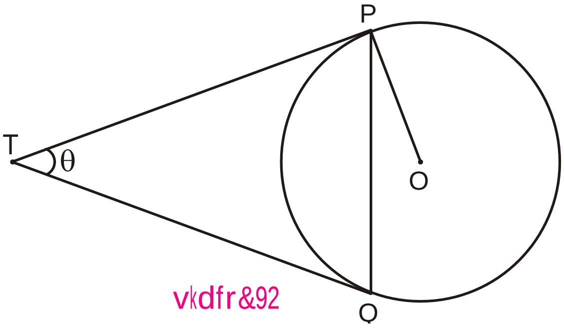


vkdfr&91

vr% ΔPQR dh ifjeki $= PQ + QR + PR$

$= 7 + 9 + 8$ lseh-

$= 24$ lseh-mnkgj.k&19- dUn O oky oÙk ij ,d ckã fcn T l nk Li'k j[kk, TP rFkk TQ [khph xb gA fl) dhft, fd $\angle PTQ = 2\angle OPQ$ gA



vkdfr&92

gy& ekuk $\angle PTQ = \theta$

$TP = TQ$ ¼ie; 12 l½

vr% ΔTPQ ,d lef}ckg f=Hkt g ftle

$\angle TPQ + \angle TQP = 180^{\circ} - \theta$

$\therefore \quad \angle TPQ = \angle TQP = \frac{1}{2}(180^{\circ} - \theta)$

$\angle TPQ = 90^{\circ} - \frac{1}{2}\theta$

$\because \quad \angle OPT = 90^{\circ}$ gA ¼ie; 11 l½

$\angle OPQ = \angle OPT - \angle TPQ$

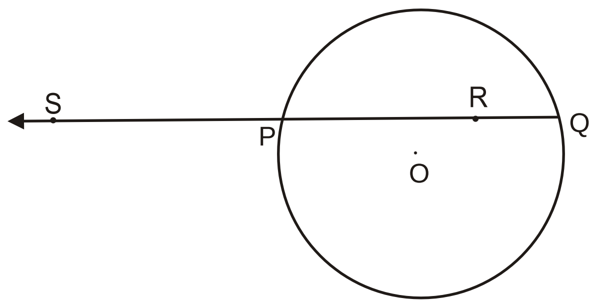
$= 90^{\circ} - \left(90^{\circ} - \frac{1}{2}\theta\right)$

$= \frac{1}{2}\theta$

$= \frac{1}{2}\angle PTQ$

vr% $\angle PTQ = 2\angle OPQ$ fl) gvkA

thok d [k.M



vkdfr&93

PQ ,d oÙk dh thok g vkj R oÙk d vnj PQ ij fLFkr ,d fcn gA rc ;g dgk tkrk g fd fcn R thok PQ dk nk [k.Mk PR vkj RQ e vr% foHkkftr djrk gA blh idkj ;fn S oÙk d ckgj j[kk PQ ij fLFkr ,d fcn gk rc ;g dgk tkrk g fd fcn S thok PQ dk nk [k.Mk SP vkj SQ e ckã foHkkftr djrk gA

Li’k j[kk vkj Nnd j[kk d chp lc/k

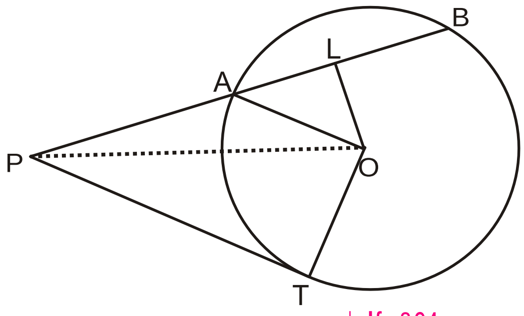
geu oÙk d ckã fcn l [khph x;h nk Li'k j[kkvk d chp lc/k n[kk g A D;k oÙk d ckã fcn l [khph x;h Nnd j[kk rFkk Li'k j[kk e dkb lc/k g\

ie; & 13

dFku & ;fn PAB oÙk dh Nnd j[kk gk tk oÙk dk A vkj B ij ifrPNn djrh g vkj PT ,d Li'k j[kk[k.M gk rk $PA \times PB = PT^2$

fn;k g & oÙk dh Nnd j[kk PAB tk oÙk dk A vkj B ij ifrPNn djrh g vkj PT ij Li'k j[kk[k.M gA

fl) djuk g & $PA \times PB = PT^2$



vkdfr&94

jpuk & AB ij yc OL [khfp,A OP, OT vkj OA dk feykb,A

miifÙk &

$$PA \times PB = (PL - AL)(PL + LB)$$

$$= (PL - AL)(PL + AL)$$

¼dUn l thok ij Mkyk x;k yc thok dk lef}Hkkftr djrk g½

$$= PL^2 - AL^2$$

$$= PL^2 - (OA^2 - OL^2) \quad \text{¼ikbFkkxkjl ie; l½}$$

$$= PL^2 - OA^2 + OL^2$$

$$= PL^2 + OL^2 - OA^2 \quad \text{¼}\Delta OPL \text{ e ikbFkkxkjl ie; l½}$$

$$= OP^2 - OA^2$$

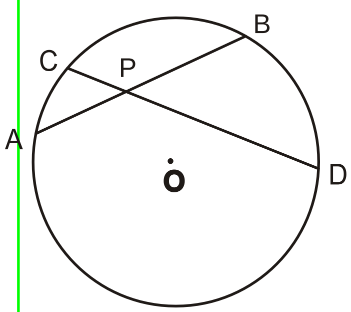
$$= OP^2 - OT^2 \quad \text{¼}OA = OT = \text{f=T;k½}$$

$$= PT^2 \quad \text{¼ikbFkkxkjl ie; l½}$$

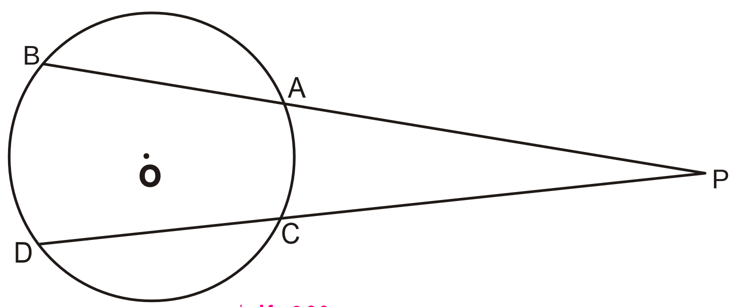
$$\therefore \quad PA \times PB = PT^2$$

djd n[k

;fn fdlh oÙk dh thok, ,d nlj dk oÙk d vrxr ;k cfgxr ifrPNn djrh g rk fdlh ,d thok d [k.Mk l cuu oky vk;r dk {k=Qy nljh thok d [k.Mk l cuu oky vk;r d {k=Qy d cjkcj gkrk g vFkkr $PA \times PB = PC \times PD$



vkdfr&95



vkdfr&96

mnkgj.k&20- AB rFkk CD oÙk dh nk thok,¡ g] tk fcn P ij oÙk dk vr%Hkkx e dkVrh gA ;fn $PA = 2$ l eh-] $PB = 3$ l eh-] rFkk $PC = 4$ l eh-] g rh PD dh yckbZ Kkr dhft ,A

gy& fn;k g]

$PA = 2$ l eh-] $PB = 3$ l eh-] rFkk $PC = 4$ l eh-]

ekuk $PD = x$ l eh-

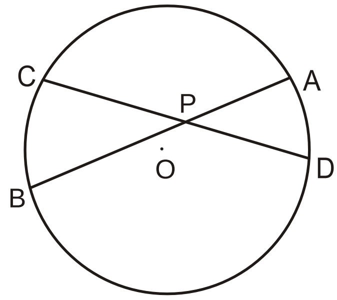
ge tkur g fd $PA \times PB = PC \times PD$

$$2 \times 3 = 4 \times x$$

$$x = \frac{6}{4}$$

$x = 1.5$ l eh-

$PD = 1.5$ l eh-



vkdfr&97

mnkgj.k&21- thok,¡ PQ rFkk RS oÙk d ckgj ,d fcn M ij ,d nl j dk dkVrh gA ;fn $MQ = 3$ l eh- $MP = 8$ l eh-] rFkk $MS = 4$ l eh- g] rk MR vkj thok RS dh yckbZ Kkr dhft ,A

gy& fn;k x;k g] $MQ = 3$ l eh- $MP = 8$ l eh-] rFkk $MS = 4$ l eh-

ekuk $MR = x$ l eh-

ge tkur g fd $MQ \times MP = MS \times MR$

$$3 \times 8 = 4 \times MR$$

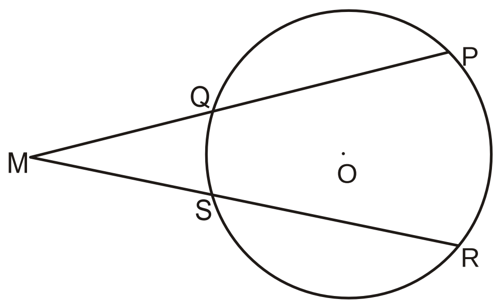
$$MR = \frac{24}{4}$$

$MR = 6$ l eh

thok $RS = MR - MS$

$= 6 - 4$

thok $= 2$ l eh-



vkdfr&98

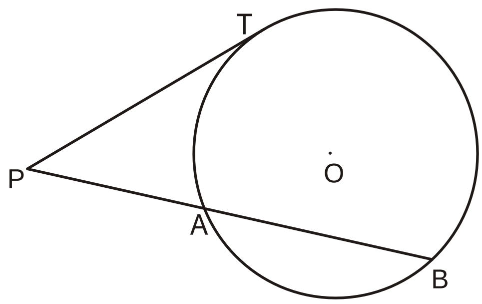
mnkgj.k&22- nh xbZ vkdfr&99 e $PA = 4$ l eh- rFkk $PB = 9$ l eh- rk PT dh yckbZ Kkr dhft ,A

gy& ge tkur g fd $PA \times PB = PT^2$

$$4 \times 9 = PT^2$$

$$PT^2 = 36$$

$PT = 6$ l eh-



vkdfr&99

,d Li'k j[kk rFkk thok }kjk cuk, x, dk.k

ekuk ,d oÙk dk dUn O g rFkk AB bl oÙk d fcn P ij Li'k j[kk gA fcn P l oÙk dh thok PQ [khfp, A nh?k pki PQ e ,d fcn R yhft,A

nh?k pki PRQ] thok PQ }kjk cuk;k x;k oÙk[kM dk ,dkUrj oÙk[kM dgykrk gA

vkdfr&100 e] $\angle QPB = x^\circ$ gk rk $\angle OPQ = 90^\circ - x^\circ$ ¼D;k \½

$\angle OPQ = \angle OQP = 90^\circ - x^\circ$ ¼$\because$ $OP = OQ =$ f=T;k½

ΔPOQ e

$$\angle POQ = 180^\circ - \left[\left(90^\circ - x^\circ\right) + \left(90^\circ - x^\circ\right)\right]$$

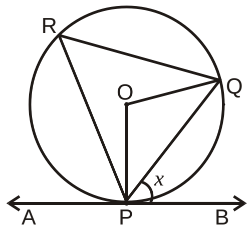
$$= 180^\circ - \left[180^\circ - 2x^\circ\right]$$

$$= 2x^\circ$$

$$\angle PRQ = \frac{1}{2}\angle POQ$$

$$= \frac{1}{2}\times 2x^\circ$$

$$= x^\circ$$



vkdfr&100

vr% ge dg ldr g fd **fdlh thok }kjk] nh xb Li'k j[kk d lkFk mud Li'k fcn ij cuk dk.k] ml thok }kjk ,dkUrj oÙk[k.M e cu dk.k d cjkcj gkrk gA**

;g Hkh ,d ie; g ftldk mi;kx oÙk dh Li'k j[kk [khpu e djr g tc oÙk d dUn dk irk u gkA

mnkgj.k&23- nh xb vkdfr&101 e PQ oÙk dh Li'k j[kk g ;fn AOB oÙk dk 0;kl g rFkk $\angle SAB = 50^\circ$ g rk $\angle ASP$ Kkr dhft,A

gy%& $\angle BSQ = \angle SAB = 50^\circ$

¼,dkUrj oÙk[k.M d ifj.kke }kjk½

$\angle ASB = 90^\circ$

¼0;kl }kjk cuk dk.k½

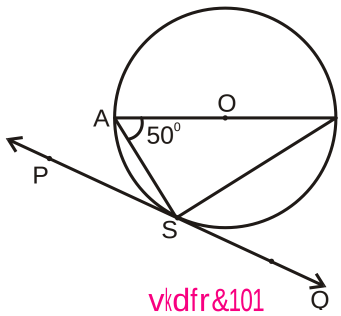
$\angle ABS + \angle ASB + \angle BAS = 180^\circ$

$\angle ABS + 90^\circ + 50^\circ = 180^\circ$

$\angle ABS = 40^\circ$

$\because$ $\angle ASP = \angle ABS$ ¼,dkUrj oÙk[k.M d ifj.kke }kjk½

$\therefore$ $\angle ASP = 40^\circ$

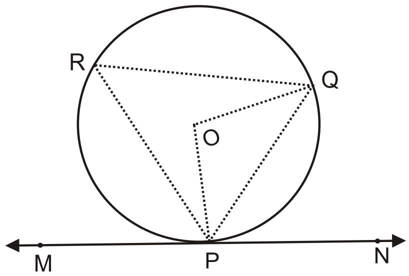


vkdfr&101

mnkgj.k&24- Li'k j[kk MN oÙk dk fcn P ij Li'k djrh gA PQ thok bl idkj g fd $\angle QPN = 52°$ rc $\angle POQ$ dk eku Kkr dhft, tgk O oÙk dk dUn gA

gy% fcn R oÙk dh ifjf/k ij ,d fcn g dUn O dk P vkj Q l feyk,A bl h idkj R dk P rFkk Q lA

$\angle QPN = \angle PRQ = 52°$ ¼pfd fd lh thok }kjk] nh xbZ Li'k j[kk d lkFk mud Li'k fcn ij cuk dk.k] mlh thok }kjk ,dkUrj oÙk[k.M e cu dk.k d cjkcj gkrk gA½



$\angle POQ = 2\angle PRQ$ ¼dUn ij cuk dk.k oÙk d ifjfèk d 'k"k Hkkx e cu dk.k dk nxuk gkrk gA½

$\angle POQ = 2 \times 52°$

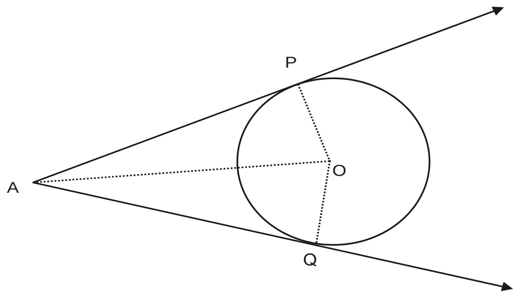
$\angle POQ = 104°$

vkdfr&102

i'ukoyh 5

1- ,d fcn P l tk oÙk d dUn l 10 lseh- njh ij g] oÙk ij Li'k j[kk dh yckbZ 8 lseh- gA oÙk dh f=T;k Kkr dhft,A

2- nh xbZ vkdfr&103 e $\angle POQ = 100°$, AP rFkk AQ oÙk dh Li'k j[kk, gA $\angle PAO$ dk eku Kkr dhft,A



vkdfr&103

FED2X6

3- fl) dhft, fd fdlh oÙk d fdlh 0;kl d fljk ij [khph xbZ Li'kZ js[kk,¡ lekUrj gksrh gSA

4- ,d oÙk ,d prqHkZt ABCD d pkjk Hkqtkvk dk Li'kZ djrh gSA fl) dhft, fd

$AB + CD = BC + DA$

5- fl) dhft, fd fdlh ckg~; fcUnq ls fdlh oÙk ij [khph xbZ Li'kZ js[kkvk d chp dk dks.k Li'kZ fcUnqvk dk feykus okyh js[kk[k.M }kjk dsUnz ij vrfjr dks.k dk lEiwjd gksrk gSA

6- fl) dhft, fd oÙk d nks lekUrj Li'kZ js[kkvk d chp [khph xbZ ,d vU; Li'kZ js[kk dk vUr%[k.M] dsUnz ij ledks.k vrfjr djrk gSA

geus lh[kk

1- mu lHkh fcnqvk dk leg tks ry esa ,d fu;r fcUnq ls leku nwjh ij fLFkr gks rFkk ,d cUn vkdfr cukrk gks oÙk dgykrk gSA

2- ,d oÙk dh cjkcj thok,¡ dsUnz ij cjkcj dks.k vrfjr djrh gSA

3- ,d oÙk dh thokvk }kjk dsUnz ij vrfjr dks.k cjkcj gks rks o thok,¡ cjkcj gksrh gSA

4- oÙk d dsUnz ls thok ij Mkyk x;k yEc thok dk lef}Hkkftr djrk gSA

5- ,d oÙk d dsUnz ls ,d thok dk lef}Hkkftr djus d fy, [khph xbZ js[kk thok ij yEc gksrh gSA

6- rhu vljs[k fcnqvk ls gksdj ,d vkSj doy ,d oÙk [khpk tk ldrk gSA

7- ,d oÙk dh cjkcj thok,¡ dsUnz ls leku nwjh ij gksrh gSA

8- oÙk d fdlh pki }kjk dsUnz ij vrfjr dks.k] oÙk d ifjf/k d 'ks"k Hkkx d fdlh fcUnq ij vrfjr dks.k dk nxuk gksrk gSA

9- oÙk d ifjf/k d fdlh fcUnq ij 0;kl }kjk vrfjr dks.k ledks.k gksrk gSA

10- oÙk d ,d gh [k.M esa cus dks.k vkil esa cjkcj gksr gSA

11- pØh; prqHkZt d lEeq[k dks.kk d fdlh ,d ;Xe dk ;kx $180°$ gksrk gSA

12- ;fn fdlh prHkt d lEe[k dk.kk d fdlh ,d ;Xe dk ;kx 180° gk rk og prHkt pØh; prHkt gkrk gA

13- Li'k fcn l [khph xb f=T;k oÙk dh Li'k j[kk ij yc gkrh gA

14- ckg; fcn l oÙk ij [khph xb Li'k j[kkvk dh ycckb;k cjkcj gkrh gA

15- fdlh thok }kjk] nh xb Li'k j[kk d lkFk mud Li'k fcn ij cuk dk.k] ml thok }kjk ,dkUrj oÙk[k.M e cu dk.k d cjkcj gkrk gA

mÙkjekyk 1

1.	(i) 10 leh-	(ii) 24 leh-	
2.	(i) 5 leh-	(ii) 25 leh-	
3.	8 leh-	4.	15 leh-

mÙkjekyk 2

2.	26 leh-	4.	24 leh-

mÙkjekyk 3

1.	40^o	2.	80^o
3.	35^o	4.	25^o
5.	75^o	6.	120^o
7.	80^o	8.	10 leh-

mÙkjekyk 4

1. $\angle DCB = 100^o$, $\angle ABC = 80^o$, $\angle ADC = 100^o$

2. $\angle QRS = 104^o$, $\angle QTS = 104^o$ 3. $\angle BAC = 60^o$

4. 62^o 6. $\angle QPR = 30^o$, $\angle PRS = 20^o$

mÙkjekyk 5

1. 6 leh- 2. 40^o

अध्याय

13

T;kferh; jpuk,¡

[GEOMETRICAL CONSTRUCTIONS]

FELXYT

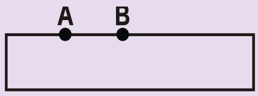
ifjp; (Introduction)

T;kferh; jpuk djus ls rkRi;Z ijdkj vkSj :yj dh lgk;rk ls eki dj T;kferh; vk—fr;k¡ cukuk gSA T;kferh; jpuk ds }kjk ge T;kfefr dh dbZ vo/kkj.kkvksa] lcèkksa o mi ifÙk;k¡ dk vuHkko dj ldrs gSa vkSj muds ckjs esa lkp ldrs gSA ge mu voèkkj.kkvksa dk mi;ksx djsaxs ,slh T;kfefr jpuk,¡ djxs tks geus i<+h gSA jfpr djus ds lkFk&lkFk dN jpukvksa dk fo'ys"k.k Hkh djxs ftlls ge ;g le> ldxs fd ;s jpuk,¡ fdl rjg dh tkrh gSa vkSj D;k\ blls ckr dks le>us ds fy, ge fn, x, lokyksa ds vuqlkj jpukvksa dks cukrs le; mudks ckjs esa lkspx o ppkZ djsxsaA

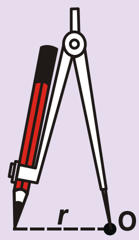
xf.kr esa rdZ] çek.k (proof) vkfn dk /;ku esa j[kdj lokyksa gy fd, tkrs gSA lokyksa gy djuk vkSj ;g n[kuk fd D;k dkbZ lokyksa ,d ls T;knk rjhdksa ls gy fd;k tk ldrk gSA dkuls rjhdks T;knk mi;ä vkSj vklku tSls ckrsa lkspuk egRoiw.kZ gSA ;g lokyksa djuk o lkpuk gekjh rkfdZd vkSj lstukRed {kerk dk fodkl djrk gSA

vHkh rd vkiu Ldsy vkSj pkan dh lgk;rk ls fuf'pr eki ds js[kk[kaM vkSj dks.k cuk, gSA bl v/;k; esa ge ijdkj vkSj :yj ds mi;ksx ls jpuk djsxsA

:yj dk jpuk esa mi;ksx % ge tkurs gSa fd fdUgha nks fcUnvksa A vkSj B nkuksa ls xqtjus okyh fLFkj ,d lhy js[kk [khph tk ldrh gSA ¼vfHkxghr½A ge :yj dk mi;ksx js[kk AB] js[kk[kaM AB ;k fdj.k AB cukus ds fy, dj ldrs gSA



ijdkj dk jpuk djus esa mi;ksx % oÙk dh ifjHkk"kk ls ge tkurs gSa fd ,d fuf'pr fcUnq vkSj f=T;k ls doy ,d oÙk cuk;k tk ldrk gSA ;gk¡ ge ijdkj dk mi;ksx oÙk ;k pki cukus ds fy, djsxsA



vkb,] dN T;kferh; jpuk,¡ djrs g&

jpuk&1 % leku dks.k dh jpuk djuk

,d dks.k fn;k x;k g] ge mlds cjkcj ,d nlj dks.k dh jpuk djuh gSA ;g dke ge dSls djxs\ ,d rks ;g dj ldrs gSa fd ,d pkan dh enn ls dks.k dks eki yA fQj mlds cjkcj dks.k cuk yA yfdu ;fn gekjs ikl dks.k ekiu dk dkbZ midj.k ugha gks rks ge D;k djxs\ vkb, n[ks &

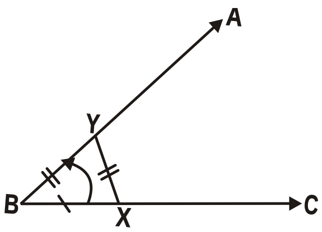
in&1 bl jpuk ij dke dju l igy ge fuEu lokyk ij lkpu l enn feyxh&

1- *loky e D;k tkudkjh nh xb g] bl dl djuk gkxk vkj nh xb tkudkfj;k e l dku&lh mi;kxh g*

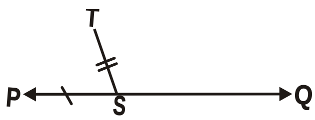
ge ,d dk.k fn;k g vkj ge blds cjkcj dk.k dh jpuk djuh gA

;fn fn;k x;k dk.k ABC g rk ,d dk.k RPQ dh jpuk bl idkj djuh g fd $\angle RPQ = \angle ABC$ gkA

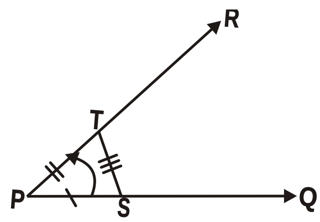
2- *nh xb tkudkfj;k d vk/kkj ij jpuk djr le; fdu T;kferh; vo/kkj.kkvk dk mi;kx gk ldrk g*



vkdfr & 1



vkdfr & 2



vkdfr & 3

ge irk g fd ;fn ge fdlh fdj.k dk ,d fLFkfr l nljh fLFkfr rd ?kekr g rk ml ?keko dk eku gh dk.k gkrk gA fdj.k BC dk BA rd ?keku ij ge dk.k ABC çkIr gkrk gA ¼vkdfr&1½

;fn ,d fdj.k PQ cuk,¡ vkj ml bruk ?kek,¡ ftruk BC dk BA rd ?kek;k x;k gA yfdu ;g gkxk dl\

;fn BC vkj BA ij Øe'k% nk fcn X,Y bl idkj y fd BX=BY vkj PQ ij fcn S bl idkj y fd BX=PS ¼vkdfr&2½

vc B vkj X d lki{k Y dh tk fLFkfr g oLl gh fLFkfr ij ,d fcn ¼eku yT½ P vkj S d lki{k << fy;k tk, rk fdj.k PT, BY d lxr gkxhA ¼vkdfr&3½

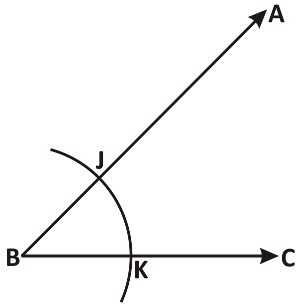
;g fcn T, PS f=T;k d pki ij S l XY njh ij fLFkr gkxkA

;fn PT dk feykr g, PR fdj.k [khph tk, rk ∠TPS, ∠YBX ¼;k ∠ABC ½d cjkcj gkxkA

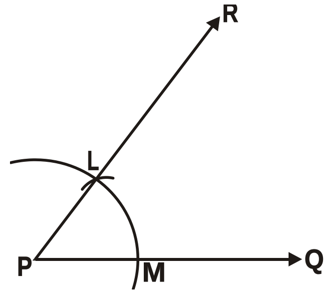
in&2 ¼ dPpk fp= cuku d ckn pj.kc) :i l T;kfefr jpuk dh tk ldrh gA

jpuk d pj.k ¼&

1- ,d fcn P yr gA P l ,d fdj.k PQ [khpr gA ;g fdj.k u; dk.k dh ,d Hkt k gkxhA
2- vc fn, x, dk.k ABC d 'kh"k B l fd lh Hkh eki dk ,d pki dkVr g tk BA dk J ij vkj BC dk K ij çfrPNn djrk gA ¼vk—fr&4½ nf[k,A
3- vc ge bl h eki dk pki fcUn P l dkVr g tk fdj.k PQ dk M ij çfrPNn djrk gA ¼vk—fr&5½
4- vc fcn K l KJ dk eki yr g vkj fcUn M l bl h eki dk ,d pki] igy oky pki ij dkVr g vkj çfrPNn fcUn dk L uke nr gA ¼vk—fr&5½
5- vc ge P l L dk tkMr g, ,d fdj.k PR [khpr gA



vkdfr & 4



vkdfr & 5

$\angle RPQ$ vHkh"V dk.k gA

$\angle RPQ = \angle ABC$

in&3 jfpr vk—fr dk tkpuk& jfpr vk—fr loky e nh xbl tkudkjh d vu lkj g ;k ugh] bl ge eki d vykok iek.k d ek/;e l Hkh tkp ldr gA

vkb,] vc n[k fd D;k çkIr dk.k fn, g, dk.k d cjkcj g\

bl d fy, ge nkuk d fp=k d lnfHkr dk.kk dk yr g, f=Hkt cukr gA fcUn M dk L l vkj K dk J l tkM ft l l ΔPML vkj ΔBKJ cu tk,xA

;fn ge ΔPML vkj ΔBKJ dk n[k rk ik,x fd&

$PM = BK$ ¼jpuk l½]

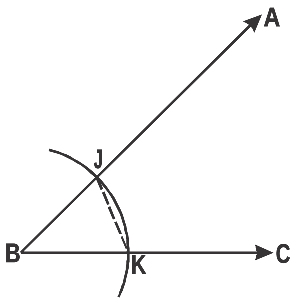
$ML = KJ$ ¼jpuk l½

$PL = BJ$ ¼jpuk l½

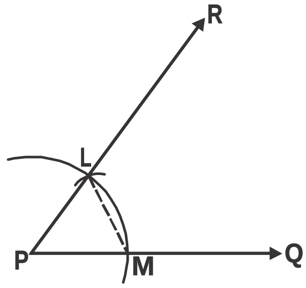
bl fy, $\Delta PML \cong \Delta BKJ$ ¼SSS lokx lerk l½

vr: $\angle LPM = \angle JBK$

bl çdkj $\angle RPQ = \angle ABC$



vkdfr & 6

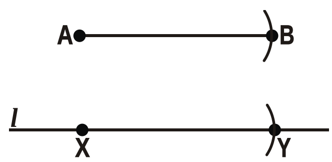


vkdfr & 7

mnkgj.k&1- fn, x, j[kk[kM d cjkcj ,d j[kk[kM dh jpuk djA

gy ¼

in&1 ge ,d j[kk[k.M AB fn;k x;k gA ,d ,l j[kk[kM dh jpuk djuh g tk AB d cjkcj gkA



vkdfr & 8

in&2 % jpuk d pj.k %&

1- ,d j[kk [khp] bl l ekuA

2- l ij dkb Hkh fcUn X puA

3- vc ijdkj ij AB d cjkcj f=T;k yA X dk dUn ekudj] j[kk l ij pki cuk,] vkj dVku fcUn dk Y uke nA

j[kk[kM XY, j[kk[kM AB d lokxle gA

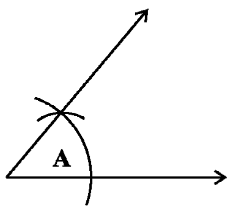
in&3 % iek.k %&

;gk geu AB dk f=T;k ydj vkj dUn 'X' l pki cuk;kA blfy, XY=AB

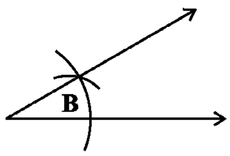
mnkgj.k&2- nk dk.k fn, x, gA ,d ,l dk.k dh jpuk dj ftldh eki fn, g, nkuk dk.kk d ;kxQy d cjkcj gkA

gy % jpuk&1 dk mi;kx djr g, ∠A d lokxle dk.k ∠LON cuk,A blh rjg OL dk ,d Hkqtk ekur g, ∠MOL cuk, tk ∠B d lokxle gkA

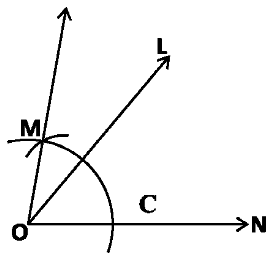
;kuh ∠LON + ∠MOL = ∠A + ∠B



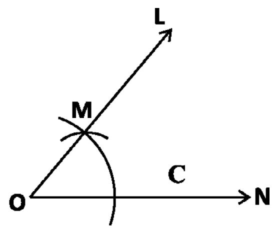
vkdfr & 9



vkdfr & 10



vkdfr & 11



vkdfr & 12

djd n[k

1- mnkgj.k&2 e dh xb jpuk d pj.k foLrkj l Lo; fyf[k,A

2 30° vkj 90° eki d dk.k cukb,A crkb, fd ;g dl cuk;k\

3- Hkqtk dh dkb Hkh eki yr g, ,d leckg f=Hkqt dh jpuk dhft,A

4- ,d U;udk.k cukb, vkj ,d ,l dk.k dh jpuk dhft, ftldk eku igy cuk, x, U;udk.k d eku l nkxuk gkA

jpuk&2 % lekrj j[kk dh jpuk djuk

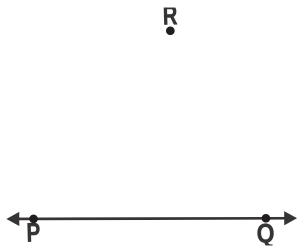
ge ;gk ,d ljy j[kk d ckgj fLFkr fcn l mlI j[kk d lekrj j[kk [khpuk pkgr gA geu ftu ink e igyh jpuk dh g vkb, mUgh ink dk mi;kx djr g, lekrj j[kk dh jpuk djr gA

in&1 % jpuk 'k: dju l igy fuEufyf[kr lokyk ij lkpuk %&

1- *lokyk e D;k tkudkjh nh xb g\ fdl Øe e budk mi;kx djuk g\ D;k jpuk djuh g\ fdl Øe e djuh g*

nh xb tkudkjh e l dku&lh mi;kxh g vkj dku lh ugh\

;gk ge ,d j[kk nh xb g vkj ,d fcnA ;g fcn nh xb j[kk d ckgj fLFkr gA ge ml fcn l lekrj j[kk dh jpuk djuh gA vkdfr & 13



vkdfr & 13

2- *nh xb tkudkjh d vk/kkj ij jpuk djr le; fdu T;kferh; vo/kkj.kkvk dk mi;kx djuk gkxk*

ge irk g fd ;fn ,d fr;d j[kk nk j[kkvk dk çfrPNn dj vkj mu ij cu lxr dk.k cjkcj gk rk nkuk j[k, lekrj gkrh gA

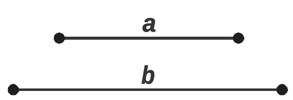
rk ge fn, x, fcn l fr;d j[kk dh jpuk dj ldr g tk nh xb j[kk dk çfrPNn dj

fr;d j[kk vkj nh xb j[kk d chp cu dk.k d cjkcj dk.k] fcn ij cuk,] rk ç;kl j[kk nh xb j[kk d lekrj gkxhA

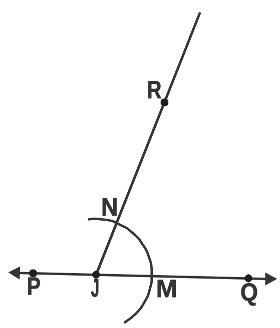
in&2 % ,df=r tkudkjh d vk/kkj ij dPpk fp= cukdj lkpuk fd vif{kr vk—fr dk dku&dku lk fgLlk ge Kkr gk x;k gA vk—fr dh jpuk d fy, ge vkj D;k pkfg,A fQj vr e pj.kc) :i l T;kfefr jpuk djukA

jpuk d pj.k %

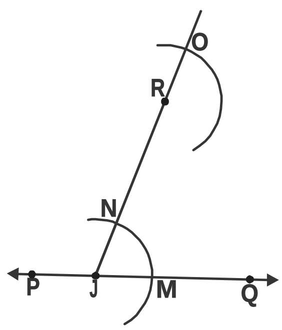
,d j[kk PQ vkj ,d fcn R fn, x, gA



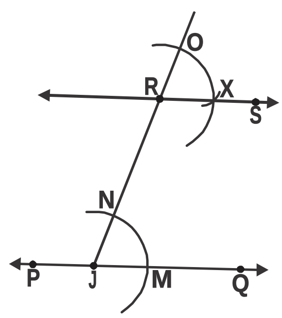
vkdfr & 14



vkdfr & 15



vkdfr & 16



vkdfr & 17

ge PQ d lekrj ,d j[kk dh jpuk djuh g tk R l xtjrh gkA

1- R l ,d fr;d j[kk [khp g tk PQ dk fdlh fcn J ij ifrPNn djA ge irk g fd ;fn lxr dk.k cjkcj gk rk j[kk,i lekrj gkrh gA

2- vc ge fcn J l fdlh Hkh eki dk ,d pki dkVr g tk PQ dk M vkj JR dk N ij ifrPNn djrh gA ¼vk—fr&15½

3- vc blh eki dk ,d pki fcn R l cukr g tk JR dk O ij ifrPNn djrh gA ¼vk—fr&16½

4- vc MN dh eki ydj fcn O l ,d pki dkVr g tk igy cuk, x, pki dk X ij ifrPNn djrk gA

vc ge fcn R l X dk tkMr g, ,d j[kk RS [khpr g

bl idkj] j[kk PQ d lekrj j[kk RS gkxhA ¼vk—fr&17½

in&3½ jph gbZ vk—fr dk tkpuk ½ ;g n[kuk fd jph gbZ vk—fr vif{kr vk—fr d vuljkj g ;k ughA

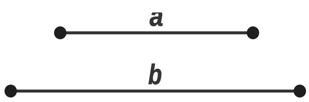
iek.k & jp g, fp= dk n[k&

pfd $\angle ORX = \angle RJM$ ¼lxr dk.k½

rk ge dg ldr g fd $RS \parallel PQ$

i'ukoyh&1

1- dkih ij 'a' vkj 'b' nk j[kk[k.M cuk,A vc fun'kkuqlkj j[kk[kMk dh jpuk djA



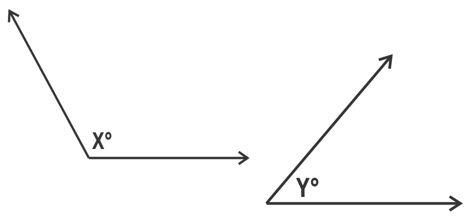
(a) a + b (b) b - a

(c) 2b + a (d) 3a - b

2- ijdkj vkj :yj dh lgk;rk l bu eki d dk.k cuk,& 15°, 45°, 105°, 75°

3- nk dk.k X° ¼vf/kddk.k½ vkj Y° ¼U;udk.k½ fn, g&

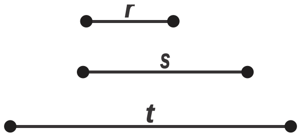
fuEufyf[kr eki d dk.k cuk, &



(a) X° - Y° (b) X° + Y°

(c) (180 - X)° (d) 2Y°

4- vkidk rhu fuf'pr ekik 'r', 's' vkj 't' d j[kk[kM fn, x, gA



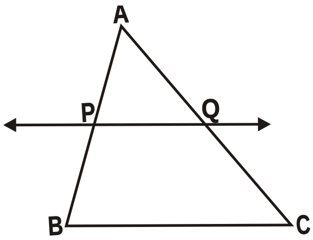
(a) D;k bu j[kk[kMk l f=Hkt dh jpuk lHko g\ ;fn gk rk f=Hkt cuk,A

(b) D;k s, t o $r + t$ l f=Hkt cu ik,xk\

5- ,d f=Hkt ABC dh jpuk dhft,A vc 'kh"k A l Hktk BC d lekrj ,d j[kk dh jpuk dhft,A 'kh"k A ij cu dk.kk d ;kx vkj f=Hkt d lHkh dk.kk d ;kx dh tkp dhft,A

jpuk & 3 % fn;s x;s vuikr e j[kk[kM dh jpuk

bl jpuk d fy, ge FkYl ie; dk mi;kx djxA le:i f=Hkt e vkiu FkYl ie; i<k gkxk ftld vuqlkj] **;fn fdlh f=Hkt e ,d Hktk d lekrj dkb ,lh j[kk [khph tk, tk ckdh nkuk Hktkvk dk dkV] rk ;g lekrj j[kk nkuk Hktkvk dk cjkcj vuikr e foHkkftr djxhA**



vkdfr & 18

fn, x, f=Hkt ABC e PQ vkj BC lekrj g] rk FkYl ie; l ge dg ldr g fd $\frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC}$ ¼vk–fr&18½

;fn $AP = \frac{1}{3}AB$, rk FkYl ie; l ge dg ldr g fd $AQ = \frac{1}{3}AC$

mnkgj.k&3- fn, x, j[kk[kM AB ij ,d fcn C <f<, ftl le $AC:AB = 2:3$

gy %

in 1 % ge ,d j[kk[kM AB fn;k gvk g vkj ge mlij ,d fcn C blrjg ikIr djuk g fd $AC : AB = 2 : 3$

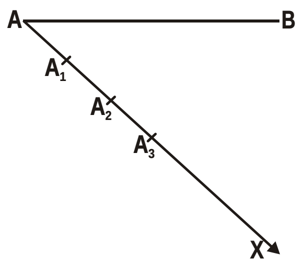
;kuh j[kk[kM AC dk eki] j[kk[kM AB ¼fn, x, j[kk[kM½ dk $\frac{2}{3}$ gkxkA ¼vkdfr&19½

lkp fd jpuk dl djx % pfd $AC : AB = 2 : 3$

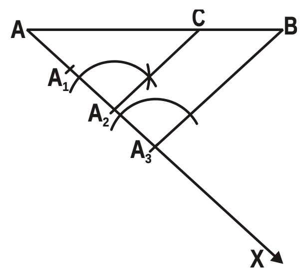
vkdfr & 19

AB dk 3 cjkcj Hkkxk e foHkkftr dj vkj mle nk Hkkx y rk og ij j[kk[kM d $\frac{2}{3}$ d cjkcj gkxkA ge ;g irk gS fd fdlh f=Hkqt esa ,d Hkqtk ds lekarj js[kk vU; nksuksa Hkqtkvksa dks lekuqikr esa foHkkftr djrh gSA vkdfr &21

rks D;ksa u AB ds lkFk U;wudks.k cukrh gqbZ ,d fdj.k [khp ftl ij 3 cjkcj Hkkx fy,, tks ldsA vc 2%3 vuqikr dks /;ku esa j[kdj rhljs fcanq dks B ls feyk,] vkSj blh ds lekarj nwljs fcanq ls ,d js[kk [khpsA



vkdfr & 20



vkdfr & 21

in 2 % jpuk ds pj.k

1- fcanq A ls dksbZ Hkh U;wudks.k cukrs gq, ,d fdj.k AX [khaprs gSA

2- AX ij 3 cjkcj pki dkVs bUgs AA_1, A_1A_2, A_2A_3 uke nsrs gSA

$AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3$

3- vc A_3 ls B dks feyk,] vkSj A_2 ls A_3B ds lekarj js[kk [khps tks AB dks 'C' ij ifrPNsn djrh gSA

AC vHkh"V js[kk[kaM gS] pfd $AC : AB = 2 : 3$

in 3 % iek.k % ge T;kfefr jpuk ds vk/kkj ij dSls dg ldrs gS fd $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{2}{3}$

ΔABA_3 vkSj ΔACA_2 esa $A_2C \| A_3B$ ¼jpuk ls½

FkSYl ies; ls ge dg ldrs gS fd]

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AA_2}{AA_3} \quad \cdots (1)$$

jpuk ls ge Kkr gS fd]

$\dfrac{AA_2}{AA_3} = \dfrac{2}{3}$ ¼pfd AA_3 rhu cjkcj Hkkxksa esa foHkkftr gS½

vr% $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{AA_2}{AA_3} = \dfrac{2}{3}$

mnkgj.k&4- ,d ,l j[kk[kM dh jpuk dhft, tk fd fn, x, j[kk[kM d eki dk $\frac{3}{2}$ gkA

gy %

in 1 % ge j[kk[kM AB fn;k g] ,d fcn C yuk g ftl l

$AC : AB = 3 : 2$

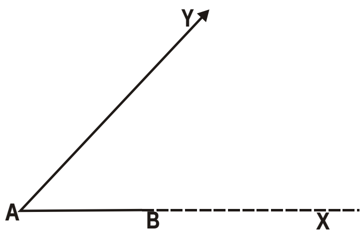
fiNy mnkgj.k e fcn C nkuk fcnvk A vkj B d chp e fLFkr FkkA bl mnkgj.k e fcn C ,lk g fd $AC : AB = 3 : 2$ blfy, fcn C j[kk[kM AB d ckgj fLFkr gkxkA tc j[kk[kM AC j[kk[kM AB l cMk gkxk rHkh AB dk $\frac{3}{2}$ xuk gk ldxkA

in 2 % jpuk d pj.k %

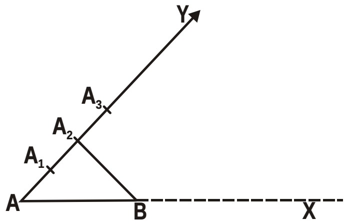
1- fcn A l U;udk.k cukr g, ,d fdj.k AY [khp vkj j[kk[kM AB dk X rd c<k,A ¼AB dk X rd blfy, c<k;k D;kfd ge ,d ,lk fcn C pkfg, ftl l $AC:AB = 3:2$½

2- AY ij 3 cjkcj pki dkV mUg A_1, A_2, A_3 uke nA

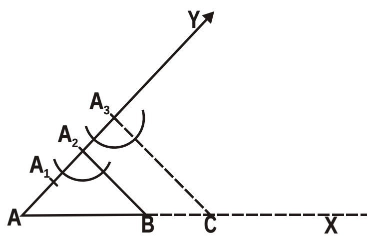
3- vc A_2 dk B l tkM vkj A_3 l A_2B d lekrj j[kk [khp tk AX dk C ij dkVA vHkh"V fcUn C, AX ij bl idkj g fd $\frac{AC}{AB} = \frac{3}{2}$



vkdfr & 22



vkdfr & 23



vkdfr & 24

in 3 % iek.k % D;k ge T;kfefr jpuk d vk/kkj ij dg ldr g fd $\frac{AC}{AB} = \frac{3}{2}$\

ΔACA_3 vkj ΔABA_2 e

$A_2B \| A_3C$ ¼jpuk l½

$\therefore \frac{AC}{AB} = \frac{AA_3}{AA_2}$ ··· (1) ¼FkYl ie; ls½

jpuk ls ge ;g irk g fd]

$\frac{AA_3}{AA_2} = \frac{3}{2}$

vr% lehdj.k ¼1½ ls $\frac{AC}{AB} = \frac{3}{2}$

bl jpuk e ge j[kk [k.M AC feyk g tk nh xbZ j[kk [k.M AB ls ,d fuf'pr vuikr e cMk gA $AC = \frac{3}{2}AB$;k ge ;g Hkh dg ldr g fd fcn 'C' j[kk[k.M AB dk 3 % 2 e foHkkftr djrk gA

le:i f=Hkt dh jpuk

ge tkur g fd le:i cgHkt e lxr dk.k cjkcj gkr g vkj lxr Hkt k, leku vuikr e gkrh gA

le:irk dh ;gh nk dlkfV;k f=Hkt ij Hkh ykx gkrh gA

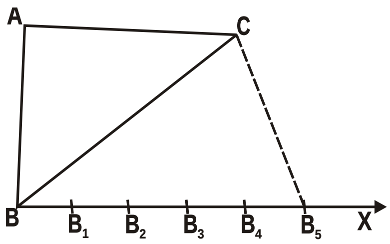
jpuk & 4 % fn, x, f=Hkt ABC d le:i ,d f=Hkt dh jpuk dj ft ldh Hkt k, f=Hkt ABC dh lxr Hktkvk d $\frac{3}{5}$ gkA

in 1 % ge f=Hkt ABC fn;k x;k g ft ld le:i f=Hkt dh jpuk djuh gA ge irk g fd le:i f=Hkt e lxr dk.k cjkcj vkj lxr Hkt k, lekuikfrd gkrh gA ;gk vuikr $\frac{3}{5}$ fn;k gA igy dh xbZ jpukvk dk mi;kx djr g, le:i f=Hkt cukr gA

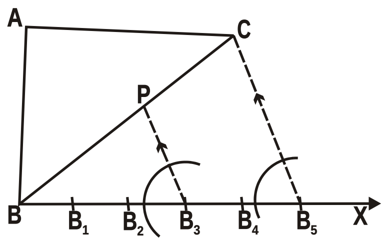
in 2 % jpuk d pj.k

1- fcn B l A d nljh vkj ,d U;udk.k cukr g, ,d fdj.k BX [khpA

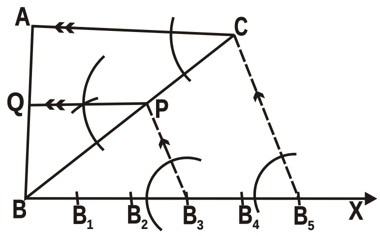
2- vc BX ij 5 cjkcj pki dkV vkj mUg Øe'k% B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 uke nA bl l ge $BB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = B_4B_5$ ikIr gkr gA



vkdfr & 25



vkdfr & 26



vkdfr & 27

3- vc B_5 l C feyk, vkj B_3 l B_5C d lekrj ,d j[kk [khp tk BC dk P ij ifrPNn djA

4- vc P l AC d lekrj ,d j[kk [khp tk AB dk Q ij ifrPNn djA

QBP vHkh"V f=Hkt gA

in 3 % iek.k

dl tkp fd ΔQBP vkj ΔABC] le:i f=Hkt g\

,d rjhdk rk ;g gkxk fd ge nkuk f=Hkt dh Hkt kvk dk eki y vkj n[k fd lxr Hkt k, lekuikfrd g ;k ughA

nljk le:irk d vfHkxghr ¼dk.k&dk.k&dk.k le:irk½ l fl) djd n[k&

ΔQBP vkj ΔABC e]

$\angle QBP = \angle ABC$ ¼mHk;fu"B dk.k½

$\angle PQB = \angle CAB$ ¼lxr dk.k½ ¼jpuk l $PC||CA$½

$\angle BPQ = \angle BCA$ ¼lxr dk.k½ ¼jpuk l $PC||CA$½

vr% $\Delta QBP \sim \Delta ABC$ ¼dk.k&dk.k&dk.k le:irk½

;kuh $\frac{QB}{AB} = \frac{BP}{BC} = \frac{QP}{AC}$

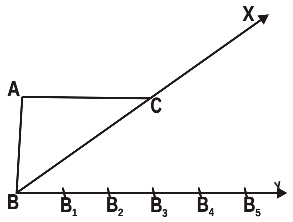
$\frac{BP}{BC} = \frac{3}{5}$ ¼jpuk l BC, 5 cjkcj Hkkx g vkj BP, 3 cjkcj Hkkx g½

$BP = \frac{3}{5}BC$

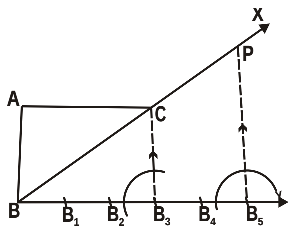
$\therefore\ QP = \frac{3}{5}AC$ vkj $QB = \frac{3}{5}AB$

mnkgj.k&5- fn, x, f=Hkt ABC d le:i ,d f=Hkt dh jpuk dj ftldh Hktk,

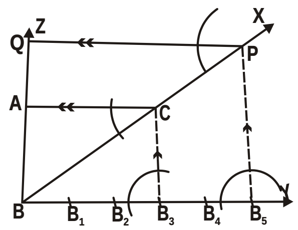
f=Hkt ABC dh lxr Hktkvk d $\frac{5}{3}$ gkA



vkdfr & 28



vkdfr & 29



vkdfr & 30

in 1 % ge ,d f=Hkt ABC fn;k x;k gA bld le:i ,d f=Hkt dh jpuk djuh g

ftldh Hktk, f=Hkt ABC dh lxr Hktkvk d $\frac{5}{3}$ gkA

in 2 % jpuk d pj.k %

1- fcn B l A d nljh vkj ,d U;udk.k cukr g, ,d fdj.k BY [khp A BC vkj BA dk vkx c<kr g, Øe'k fdj.k BX o BZ [khpA

2- vc BY ij 5 cjkcj Hkkx y mUg $BB_1, B_1B_2, B_2B_3, B_3B_4, B_4B_5$ uke nA

3- vc B_3 l C dk feyk,A B_5 l B_3C d lekrj ,d j[kk [khp tk BX dk P ij ifrPNn djA

4- vc P l AC d lekrj ,d j[kk [khp tk BZ dk Q ij ifrPNn djA

QBP vHkh"V f=Hkt gA


FF5Q34

le:i prHkt dh jpuk

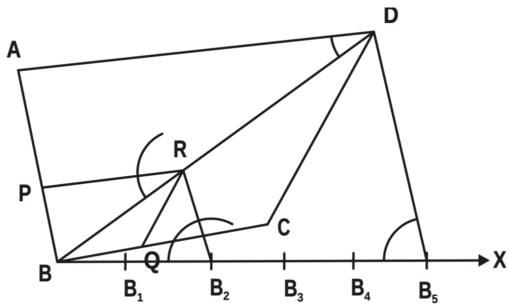
ftl rjg geu ,d le:i f=Hkt dh jpuk dh g vkb, mlh rjg ,d le:i prHkt dh jpuk djr gA

ge ,d prHkt ABCD fn;k gA ,d ,l le#i prHkt dh jpuk djuh g ftldh iR;d Hktk dh eki prHkt ABCD dh lxr Hktkvk d eki dk $\frac{2}{5}$ gkA

in 1 % ge ,d prHkt ABCD fn;k x;k g vkj bld le:i ,d prHkt dh jpuk djuh g ftldh Hktkvk dh eki fn, x, prHkt dh lxr Hktkvk dh $\frac{2}{5}$ gkA ;gk Hkh le:i f=Hkt d leku gh jpuk gkrh gA ,d ckr /;ku j[ku ;kX; g fd igy ge fod.k (diagonal) dh jpuk djr gA

in 2 % jpuk d pj.k %

1- fcUn B l A d nl jh vkj ,d U;udk.k cukr gb fdj.k BX dh jpuk djA



vkdfr & 31

2- vc BX ij 5 cjkcj Hkkx y bUg BB_1, B_1B_2, B_2B_3, B_3B_4, B_4B_5 uke nA

3- vc B_5 l D dk feyk, vkj B_2 l B_5D d lekrj ,d j[kk [khp tk BD dk R ij ifrPNn djrh gkA

4- vc R l AD d lekrj ,d j[kk [khp tk AB dk P ij ifrPNn djrh gkA

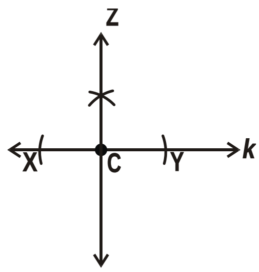
5- blh idkj R l CD d lekrj ,d j[kk [khp tk BC dk Q ij ifrPNn djrh gkA

bl idkj] PBQR vHkh"V prHkTk ikIr gkrk gA

yc [khpuk

mnkgj.k&6- j[kk k d fcn C ij yc [khpA

vkdfr & 32



vkdfr & 33

gy % in 1 % ge j[kk k ij fcn C ij ,d yc [khpuk gA

in 2 % jpuk d pj.k

1- C dk dUn eku vkj m l d nkuk vkj dkb Hkh eki ydj k ij pki dkVA dVku fcn dk X vkj Y ekuA

2- CX d eki l T;knk f=T;k y X vkj Y dk dUn ekudj] j[kk d ,d vkj pki [khpA ; nkuk pki ,d nl j dk fdlh fcUn ij dkVxA

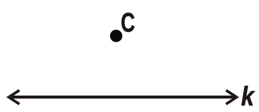
3- C l bl dVku fcUn dk feykr g, j[kk CZ [khpA

CZ j[kk k ij yc g tk] fcn C l xtjrk gA

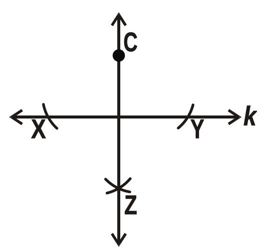
mnkgj.k&7- fcn C j[kk k d ckgj gA k ij yc dh jpuk dj tk C l xtjrk gA

gy % ¼l dr½&igy fcn C dk dUn eku vkj m l l cjkcj njh ij fcn X, Y ikIr djA fQj fcn X vkj Y dk dUn ekudj fcn Z ikIr djA

bl jpuk d pj.k foLrkj l Lo; fy[kA



vkdfr & 34



vkdfr & 35

djd n[k

1- 5-8 leh- dk j[kk[kM AB [khfp, vkj ml ij fcn C bl rjg yhft, fd $AC:CB = 3:4$ gkA tkfp, fd $AC:CB = 3:4$ g ;k ughA

2- ,d j[kk[k.M dh jpuk dhft, tk fdlh j[kk[k.M AB dk $\frac{7}{5}$ xuk gkA

3- ,d f=Hkt PQR cukb, ftle $QR = 6$ leh- $PQ = 5$ leh- vkj $\angle PQR = 60°$ gkA bl f=Hkt d le:i ,d f=Hkt ABC cukb,] ftle $AB = \frac{2}{5}$ PQ gkA

4- ,d f=Hkt ABC cukb, ftle $BC = 5.5$ leh- $\angle ABC = 75°$ vkj $\angle ACB = 45°$ gkA bl f=Hkt d le:i ,d f=Hkt XYZ cukb, ftle $YZ = \frac{5}{4}$ BC gkA

i'ukoyh & 2

1- ,d le:i f=Hkt dh jpuk dhft, tk fd fn, x, f=Hkt dk $\frac{3}{5}$ xuk gkA

2- ,d leckg f=Hkt PQR dh jpuk dhft,A lkFk gh ,d vkj f=Hkt ABC dh jpuk dhft, ftle $PQ = \frac{3}{4}$ AB gkA

3- ,d f=Hkt PQR dh jpuk dhft,A lkFk gh ,d vkj f=Hkt ABC dh jpuk dhft, ftle $AB = \frac{2}{3}$ PQ gkA

4- nk le:i f=Hktk dh jpuk dhft,A ,d f=Hkt nlj f=Hkt dk $\frac{4}{3}$ xuk gkA

vHkh rd vkiu le:i f=Hkt l tMh gbZ jpukvk dk v/;;u fd;k gA vc ge fiNyh d{kkvk e i<h gbZ vo/kkj.kkvk dk mi;kx dj dN vkj jpuk, djxA

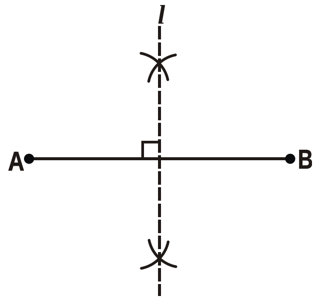
yc lef}Hkktd

yc lef}Hkktd (Perpendicular bisector) : ;g og j[kk g tk fdlh fn, x, j[kk[kM ij ledk.k cukrh g, ml nk cjkcj Hkkxk e ckVrh gA

yc lef}Hkktd dh jpuk

1- fn;k gvk j[kk[k.M AB cuk,A

2- ijdkj dh Hktkvk dk bruk Qykb, fd mlds Qyko fn, g, j[kk[kM dh yckb d vk/k l vf/kd gkA



vkdfr & 36

2- vc ijdkj dh ukd dk fcn A ij j[kdj j[kk[kM d nkuk vkj pki dkV] fQj fcn B ij ijdkj j[kdj ;gh ifØ;k nkgjk,A

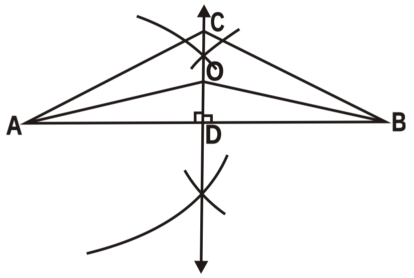
3- pki d dVku fcnvk dk Ldy dh lgk;rk l feyk,A

;g j[kk *ℓ*] j[kk[kM AB dk yc lef}Hkktd gA

D;k yc lef}Hkktd dk iR;d fcn] fcn A vkj B l leku njh ij gkrk g\

vkb, n[k &

yc lef}Hkktd ij dkb fcn O yA bl fcn dk j[kk[kM d nkuk vr fcnvk A vkj B l feyk,A vc f=Hkt AOD vkj BOD e]



vkdfr & 37

AD = DB ¼D, AB dk e/; fcn gA½

$\angle$ODA = $\angle$ODB ¼ledks.k½

OD = OD ¼mHk;fu"B½

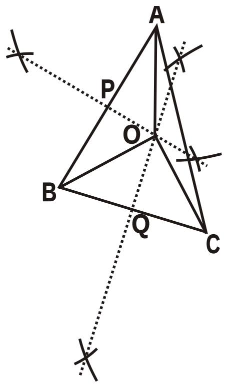
$\therefore$ ΔAOD $\cong$ ΔBOD ¼SAS lokxlerk l½

rk OA = OB

yc lef}Hkktd ij fLFkr iR;d fcn] fcn A vkj B l leku njh ij gkxkA

f=Hkt dh dN vkj jpuk,

in 1 % ge ,d f=Hkt fn;k x;k gA vc ,d ,l oÙk dh jpuk djuh g tk f=Hkt d rhuk 'kh"kk A, B vkj C l gkdj xtjrk gA



vkdfr & 38

lkp dh jpuk dl djx %

pfd oÙk f=Hkt d rhuk 'kh"kk l xtjrk g blfy, ge dg ldr g fd oÙk dk dæ rhuk 'kh"kk l leku njh ij gkxkA ge ;g Hkh irk g fd yc lef}Hkktd ij fLFkr dkb Hkh fcn Hktk d 'kh"kk l leku njh ij gkrk gA f=Hkt ABC dh Hktk AB d yc lef}Hkktd ij fLFkr lHkh fcn tk 'kh"k A vkj B l leku njh ij gkxA blh idkj Hktk BC d yc lef}Hkktd ij Hkh fLFkr lHkh fcn 'kh"k B vkj C l leku njh ij gkxA

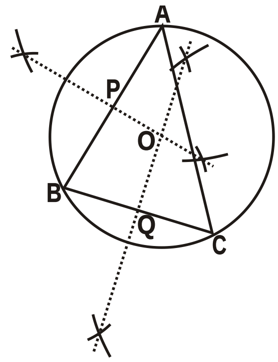
eku y fd nkuk gh yc lef}Hkktd fdlh fcn ij ifrPNn djr g vkj ml fcn dk ge 'O' uke nr gA pfd fcn O nkuk gh yc lef}Hkktd ij fLFkr g vr% OA = OB = OC vc O dk dnz ydj vkj OA dk f=T;k ydj ,d oÙk cukr gA D;k cuk;k x;k oÙk rhuk 'kh"kk l gkdj xtjrk g\

vkb, n[ksa &

in 2 % jpuk ds pj.k %

1- ,d f=Hkqt ABC cuk,¡A

2- Hkqtk AB vkSj BC ij yc lef}Hkktd [khapsa tks Øe'k% AB dks P ij vkSj BC dks Q ij ifrPNsn djrs gSaA nksuksa yc lef}Hkktd fcUnq 'O' ij ifrPNsn djsxaA



vkdfr & 39¼i½

3- vc O dks dsUnz ydj vkSj OA dh eki dh f=T;k ydj ,d oÙk cuk,A vkÑfr esa vki ns[ksaxs fd ;g oÙk rhuksa 'kh"kksZa ls xqtjrk gSA

in 3 % iek.k %

dsoy irk djsa oÙk f=Hkqt ds 'kh"kZ A, B vkSj C ls xqtjrk gS\

f=Hkqtksa AOP vkSj f=Hkqt BOP esa ¼vkdfr & 39(ii)½

AP = PB ¼D;ksa\½

∠OPA = ∠OPB ¼D;ksa\½

OP = OP ¼mHk;fu"B½

vr% f=Hkqt AOP ≅ BOP

blls ge dg ldrs gSa fd]

OA = OB .... (i)

vkdfr & 39¼ii½

blh rjg f=Hkqt BOQ ≅ COQ

∴ OB = OC .... (ii)

(i) vkSj (ii) ls ge dg ldrs gSa fd]

OA = OB = OC

;kuh dsUnz O, fcUnqvksa A, B vkSj C ls leku nwjh ij gS] rks OA dks f=T;k ydj cuk;k x;k oÙk B vkSj C ls Hkh tk,xkA

fdlh f=Hkqt dh Hkqtkvksa ds yc lef}Hkktd ftl fcUnq ij feyrs gSa] mls f=Hkqt dk ifjdsUnz dgrs gSaA ;gk¡ fcUnq O, f=Hkqt ABC dk ifjdsUnz gS vkSj A, B, C ls xqtjus okyk oÙk ifjoÙk gSA

dks.k lef}Hkktd

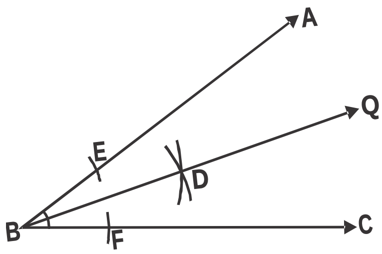
fn, x, dks.k dks nks cjkcj dks.kksa esa foHkkftr djsaA

gy %

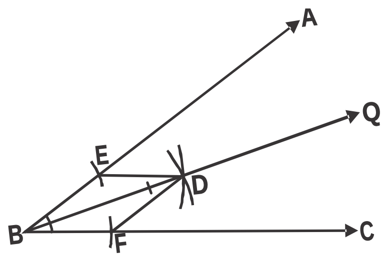
in 1 % ,d dks.k ABC fn;k x;k gSA ge ,d ,slh fdj.k dh jpuk djuh gS tks ∠ABC dks nks cjkcj dks.kksa esa foHkkftr djsA lkp fd ;g fdl rjg fd;k tk ldrk gA ge irk g fd dk.k lef}Hkktd og j[kk gkrh g tk fdlh dk.k dk nk cjkcj Hkkx e foHkkftr djrh g] vr% nkuk dk.k cjkcj gkr gA ;fn ge nk f=Hktk dh jpuk bl rjg dj fd dk.k lef}Hkktd nkuk f=Hktk dh mHk;fu"B Hktk gk vkj nkuk f=Hkt lokxle gkA ¼;gk $BE = BF$ vkj $DE = DF$½A rc SSS l nkuk iklr f=Hkt lokxle gkxA lokxle f=Hkt d fy, ge ,d ,lk fcUn pkfg, tk Hktk BA vkj BC ij fLFkr fcUnvk l leku njh ij gkA

in 2 % jpuk d pj.k %

1- 'kh"k B dk dn ydj] dkb Hkh f=T;k ydj ,d pki dkV tk fdj.k BA vkj BC dk Øe'k% fcUn E vkj F ij ifrPNn djrh gkA



vkdfr & 40



vkdfr &41

2- vc E vkj F dk dn ydj rFkk $\frac{1}{2}$ EF l cMh f=T;k ydj pki dkV tk ,d nlj dk D ij ifrPNn djA

3- vc fdj.k BD cuk,A ;gh vHkh"V dk.k lef}Hkktd gA

in 3 % iek.k % yfdu ;g ge dl dg fd fdj.k BD dk.k lef}Hkktd gA vkb, n[kA

D l F vkj E dk feyk, vc f=Hkt BED vkj BFD e]

$BE = BF$ ¼,d gh pki fd f=T;k,½

$ED = FD$ ¼,d gh pki fd f=T;k,½

$BD = BD$ ¼mHk;fu"B Hktk½

vr% $\Delta BED \cong \Delta BFD$ ¼SSS l½

bl l ge iklr gkrk g $\angle ABD = \angle DBC$ (CPCT)

dk.k lef}Hkktd dh Hktkvk l njh %

dk.k lef}Hkktd ij dkb fcUn P yA fcUn P l Hktk BA vkj BC dh njh Kkr djus d fy, P l BA vkj BC ij yEc MkyA

fcUn P l Hktk AB ij yc Mky tk AB dk M ij ifrPNn djrk gkA bl rjg P l gh BC ij yEc Mky tk ml R ij ifrPNn djrk gkA vc f=Hkt BMP vkj BRP e]

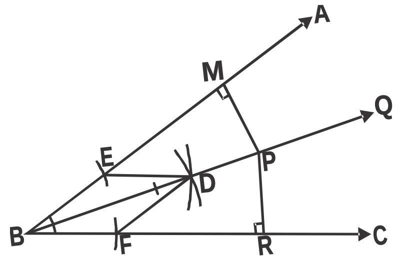
$\angle BMP = \angle BRP$ ¼ledk.k½

$\angle MBP = \angle RBP$ ¼D;kfd BP dk.k lef}Hkktd g½

$BP = BP$ ¼mHk;fu"B½

vr% $\Delta BMP \cong \Delta BRP$ ¼AAS lokxlerk½

blls ge ikIr gkrk g $PM = PR$ (CPCT) ½



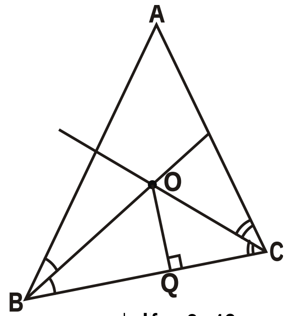
vkdfr & 42

vr% oÙk ¼vrxr oÙk½

in 1 % ge ,d f=Hkt ABC fn;k g vkj ge ,d ,l oÙk dh jpuk djuh g tk f=Hkt d rhuk Hktkvk dk Li'k djrh gA

jpuk dI dj %

pfd oÙk f=Hkt dh rhuk Hktkvk dk Li'k djr g, xtjrk g blfy, oÙk dk dn rhuk Hktkvk l leku njh ij gkxkA ge tkur g fd dk.k lef}Hkktd ij fLFkr dkb Hkh fcn dk.k dh Hktkvk l leku njh ij gkrk gA dk.k ABC d dk.k lef}Hkktd ij fLFkr ,l db fcn gkx tk Hktk BA vkj BC l leku njh ij gkxA blh idkj dk.k BCA d dk.k lef}Hkktd ij Hkh ,l db fcn fLFkr gkx tk Hktk CB vkj CA l leku njh ij gkxA



vkdfr & 43

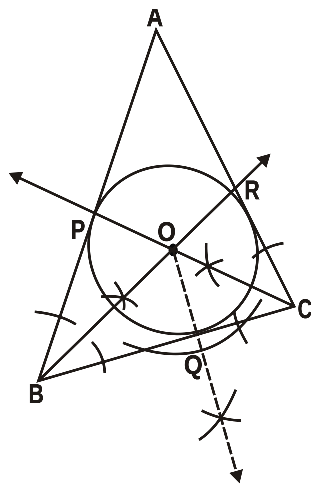
nkuk dk.k lef}Hkktd ,d nlj dk ftl fcn ij dkVr g ml O eku rk fcn O l Hktk AB, BC vkj CA dh njh leku gkxhA vc O dk dUn vkj dUn l fdlh Hktk dh yEcor njh dk f=T;k ekudj oÙk [khpA D;k ;g oÙk ΔABC dh rhuk Hktkvk dk Li'k djxk\

in 2 % jpuk d pj.k %

1- ,d f=Hkt ABC cuk,A

2- dk.k ABC vkj dk.k BCA d dk.k lef}Hkktd [khpA ftl fcn ij nkuk ,d nlj dk dkV ml fcn O eku yA

3- vc fcn O l Hktk BC ij yc Mky tk BC dk Q ij ifrPNn djrk gA O dk dn ydj vkj OQ dk f=T;k ydj ,d oÙk cuk,A vk—fr e vki n[k ldr g fd ;g oÙk rhuk Hktkvk dk Li'k djrk gA vr% O dh AB, BC vkj CA l yEcor njh leku gA



vkdfr & 44

in 3 % iek.k % vkb, ge xf.krh; rdk d vk/kkj ij n[kr g fd D;k ikIr oÙk rhuk Hktkvk dk Li'k djr g, xtjrk g\

f=Hkqt POB vkSj f=Hkqt BOQ esa]

$\angle PBO = \angle QBO$

$\angle OPB = \angle OQB = 90^\circ$

OB = OB ¼mHk;fu"B½

vr% $\Delta POB \cong \Delta QOB$

$\therefore$ OP = OQ....(i)

blh rjg $\Delta ROC \cong \Delta QOC$

$\therefore$ OR = OQ....(ii)

(i) vkSj (ii) ls ge dg ldrs gSa fd]

OP = OQ = OR

vc ge O dks dsUnz ysdj vkSj f=T;k OP ysdj ,d o`Ùk cukrs gSa tks f=Hkqt dh rhuksa Hkqtkvksa dks Li'kZ djrk gS, xtjrk gSA

fdlh f=Hkqt ds dks.kksa lef}Hkktd ,d fcUnq ij feyrs gSa] mls vr%dsUnz dgrs gSa vkSj o`Ùk dks vr%o`Ùk dgrs gSaA

djds n[ksa

1- vr%o`Ùk vkSj ifjo`Ùk dh jpuk dhft, tc f=Hkqt ABC esa%

¼i½ AB = 3 lseh-] BC = 4 lseh- vkSj $\angle B = 90^\circ$A lkFk gh vr%o`Ùk vkSj ifjo`Ùk dh f=T;k Kkr dhft,A

¼ii½ AB = BC = CA = 6 lseh- vr%dsUnz vkSj ifjdsUnz dgk¡ fLFkr gS\

¼iii½ BC = 7 lseh-] $\angle B = 45^\circ$, $\angle A = 105^\circ$ vr%dsUnz vkSj ifjdsUnz dgk¡ fLFkr gS\

FFEL4R

iz'ukoyh&3

1. fun'kkZuqlkj jpuk djsa& ¼ijdkj dk mi;ksx djsa½

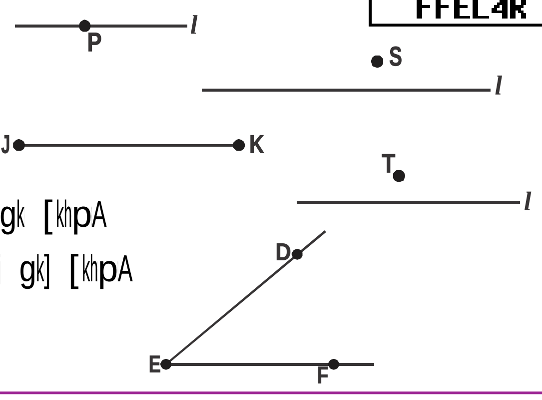
(i) js[kk ℓ ij fLFkr fcUnq P ij yEc [khpsaA

(ii) fcUnq S ls js[kk ℓ ij yEc [khpsaA

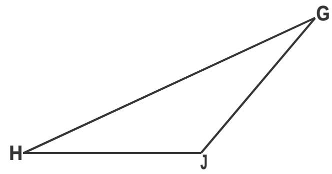
(iii) js[kk[kaM JK dk yEc lef}Hkktd cuk,A

(iv) fcUnq 'T' ls gksrh gqbZ js[kk tks ℓ ds lekUrj gks [khpsaA

(v) fcUnq 'F' ls gksrh gqbZ js[kk tks ED ds lekUrj gks] [khpsaA

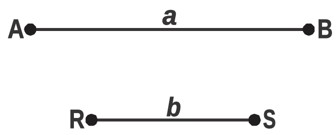


(vi) fcUn G l j[kk HJ ij yc MkyA



2. vkidk nk j[kk[k.M AB = a vkj RS = b fn, gA vc fun'kkuqlkj jpuk dj&

(i) 'a' vkj 'b' Hkt k dk vk;r cuk,A



(ii) 4b ifjeki dk ox cuk,A

(iii) a d.k dk ox cuk,A

(iv) lekrj prHkt ftldh Hkt k a vkj b rFkk bud chp dk dk.k θ gkA

3- ,d ledk.k f=Hkt ij ifjoÙk dh jpuk dhft,A jp x, oÙk dh f=T;k dk eku crkb,A

4- ,d ledk.k f=Hkt ij vr%oÙk dh jpuk dhft,A jp x, oÙk dh f=T;k dk eku crkb,A

5- ,d leckg f=Hkt ij vr%oÙk vkj ifjoÙk dh jpuk dhft,A vc vr%dn vkj ifjdn fudkfy,A D;k nkuk ,d gh txg ij fLFkr g\

6- dkb rhu vlj[k fcUn (non-collinear points) yhft, vkj muls xtju oky ,d oÙk dh jpuk dhft,A

7- ekgu viuh 'kkyk d oŸkkdkj enku d dUn ij >.Mk Qgjkuk pkgrk gA enku e fdl txg >.M d fy, [kHkk xMk;k tk,] ;g irk yxku d fy, ml tk;k vkj jkgy dh lgk;rk yuh iMhA lkfp, rhuk u feydj [kHk d fy, txg dl <<h gkxh\

geu lh[kk

1- **loky dk le>uk %&** loky ij dke 'k: dju dk lcl igyk dne g loky dk i<uk vkj ;g n[kuk dh D;k tkudkjh nh x;h g vkj D;k jpuk djuh gA ;g ,d rjhd l tkudkjh dk le>dj ml xf.krh; :i o lnHk e ifjofrr dju tlk gA ble ;g le>u dh t:jr g fd nh xb tkudkjh e l dkulh mi;kxh g vkj dku lh ughA nh xb tkudkjh d vk/kkj ij fdu T;kferh; vo/kkj.kkvk dk mi;kx gk ldrk g] bl rjg dh lkp loky dk le>u e enn djrh gA

2- ,df=r dh xb tkudkjh d vk/kkj ij ,d dPpk (Rough) fp= cukdj ,o fo'y"k.k dj ;g lkp ldr g fd bl loky dk fdl rjg gy djA ble ;g lkpuk gkxk fd tk tkudkjh nh xb g mle vif{kr vkÑfr dk dku&dku lk fgLl k ge Kkr gk x;k g vkj vkÑfr dh jpuk d fy, D;k vkj pkfg,A

3- ,d ckj fo'y"k.k dj dPpk (Rough) fp= cuu d ckn pj.kc) :i l T;kferh; jpuk dh tk ldrh gA

4- vr e jpuk ijh gku d ckn n[k fd jfpr vk—fr loky e nh x;h tkudkjh d vuqlkj g ;k ughA T;kferh; jpuk e vki eki d vykok çek.k (proof) d ek/;e l Hkh n[k ldr g fd jfpr vk—fr vHkh"V g ;k ughA

अध्याय

14

xf.krh; dFkuk dh tkp

[PROOF OF MATHEMATICAL STATEMENTS]

ifjp; (Introduction)

ge viu thou e vDlj jktkuk d dFkuk ;k nkok dk ,l gh eku yu d ctk; rdk l rkyu dh dkf'k'k djr gA t l& viu foKkiuk e n[kk] luk gkxk fd& ßvki bl ifly l fy[kx rk rt fy[k ik,xAÞ ;k ßvki viu cPp dk ;g Vkfud fiyk,x rk og rt nkMxkAÞ ;kuh vxj vki dk rt fy[kuk g rk mlh ifly l fy[k vkj Vkfud ihu l rt nkMx ugh rk ihN jg tk,xA vc ckr vkrh g fd bu nkok vkj dFkuk dk tk ge lur jgr g mUg dl tkpk tk,\ ;k mudh lR;rk dl irk dh tk,\

,d rjhdk rk g fd ckj&ckj voykdu (Empirical Observation) djd irk dj fd Vkfud ihu l fdru cPp nkM e v0oy vk, ;k fdru cPpk dk dn c<k vFkok mlh ifly l fy[ku oky fdru cPpk dh fy[ku dh xfr rt gk xbA fQj bu voykduk d vk/kkj ij vkx lkpk tk ldrk gA ij D;k ;g rjhdk gj fLFkfr e dkjxj gkxk\ D;k ;g xf.krh; dFkuk ij Hkh ykx gk ldrk g\

t l bu dFkuk dk if<, &

1- fdlh l[;k dk x.kt mlh l[;k d lHkh x.ku[k.Mk dk Hkh x.kt gkrk gA

2- tk l[;k 8 l foHkkftr gkxh og 4 l Hkh foHkkftr gkxhA

3- l[;k 0-000001] l[;k $10^{\&20}$ l cMh gA

4- nk fo"ke l[;kvk dk tkM ge'kk le l[;k gkrh gA

5- nk l[;kvk dk x.kyQy mu nkuk l[;kvk l cMk gkrk gA

,l dFkuk dk tkpu d fy, D;k igy okyk rjhdk mi;kx dj ldr g\ ;kuh D;k ge dFku ¼1½ dk tkpu d fy, gj l[;k d lHkh x.kt vkj x.ku[k.M fudkyx\ ;k fQj dFku ¼2½ e 8 l foHkkftr gku okyh vur l[;kvk dk 4 l foHkkftr djd n[kx\

;g Li"V g fd bl idkj d dFkuk dk tkpu d fy, ;g rjhdk lHko ugh gA dN 0;kid rjhd ;k vk/kkj t :jh g ftll ;g irk yx;k tk ld fd 0-000001] $10^{\&20}$ l cMk g ;k NkVkA blh rjg dkb ,lk fu;e pkfg, ftud vk/kkj ij fo"ke l[;kvk dk tkM le l[;k fn[kk;k tk ld ;k fQj l[;kvk d x.kuQy dk ijh{k.k gk ldA vkb, xf.krh; dFkuk dk tkpu dk rjhdk irk djr gA

xf.krh; dFkuka dks fl) djuk

blds fy, ge dN dFkuk dk mnkgj.k y dj n[kr gA

l ä;kvka ds dFku

dFku 1 % ,d fo"ke vkj ,d le l[;k dk tkM ge'kk fo"ke l[;k gkrh gA

miifÙk % fdlh Hkh le i.kkd b dk ge $b = 2k$ fy[k ldr g] tgk k dkb i.kkd gA ¼le i.kkd dh ifjHkk"kk l] pfd b] 2 l foHkkftr g½ -------------- ¼1½

fdlh Hkh fo"ke i.kkd a dk ge $a = 2k_1 + 1$ fy[k ldr g]tgk k_1 Hkh i.kkd gA ¼fdlh Hkh le l[;k e 1 tkMu ij fo"ke l[;k ikIr gkrh g½ ------- ¼2½

vc (1) o (2) dk tkMu ij

$a + b = 2k_1 + 1 + 2k \quad = 2\,(k + k_1) + 1$

$= 2m + 1$ tgk $m = k + k_1$ g vkj m ,d i.kkd gA ¼D;k\½

pfd $2m$,d le l[;k gA

vr% $2m + 1$,d fo"ke l[;k gA

;kuh ,d fo"ke vkj ,d le l[;k dk tkM ge'kk fo"ke l[;k gh gkxhA

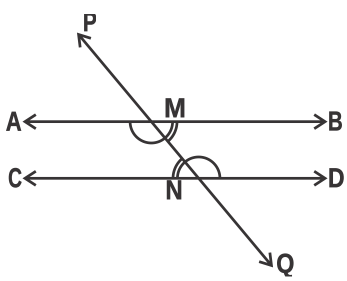
vkiu n[kk fd ;gk geu le vkj fo"ke i.kkd dh ifjHkk"kk d vk/kkj ij bl dFku dk fl) fd;k g A

T;kfefr; dFku

vkiu d{kk 9 e T;kfefr d dFkuk dk fl) djuk lh[kk g A tl & ßprHkt d vkrfjd dk.kk dk ;kx 360^0 gkrk gAÞ ;k ß;fn ,d fr;d j[kk nk lekUrj j[kkvk dk ifrPNn djrk ,dkUrj vr% dk.kk dk iR;d ;Xe cjkcj gkrk gAÞ

;gk ge nlj dFku dh miifÙk djx vkj mld e[; igyvk dk <<xA

dFku 2 % ;fn ,d fr;d j[kk nk lekrj j[kkvk dk ifrPNn djrk ,dkrj vr%dk.kk dk iR;d ;Xe cjkcj gkrk gA



miifÙk % ekuk AB vkj CD lekrj j[kkvk dk PQ fr;d j[kk ifrPNn djrh g A

;gk $\angle MND$ o $\angle AMN$,dkrj vUr%dk.kk dk ,d ;Xe g A

rFkk $\angle MNC$ o $\angle BMN$,dkrj vUr%dk.kk dk nljk ;Xe g A

ge ;g n[kuk g fd D;k $\angle MND = \angle AMN$ o

$\angle MNC = \angle BMN$

pfd $\angle PMB$ o $\angle MND$ lxr dk.k g

$\therefore \angle PMB = \angle MND$ ¼lxr dk.k vfHkxghr l½ --------------------¼1½

rFkk $\angle PMB = \angle AMN$ ¼'kh"kkfHkeq[k dk.k ie; l½ --------------------¼2½

¼1½ vkj ¼2½ l]

$\angle MND = \angle AMN$ --------------------¼3½

blh idkj

$\angle MNC = \angle BMN$ --------------------¼4½

vr% ;gk ,dkrj vr%dk.kk d nkuk ;Xe cjkcj gA

mi ifÙk d se[; i gyw

Åij dh nkuk mi ifÙk;k dk /;kuiod if<, vkj crkb, fd bu dFkuk dk fl) dju e dku&dku l e[; igyvk dk mi;kx gvk g \

ek/koh dgrh g fd mi ifÙk d rhu e[; igy fn[k&

1- nkuk dFkuk dk fl) dju d fy, igy l fl) ie;] ifjHkk"kk ;k vfHkxghrk dk mi;kx fd;k x;k gA
2- mi ifÙk dk iR;d dFku] Bhd igy oky dFku l rkfdd :i l tMk gA
3- dFkuk dk fy[kr le; fo'k"k idkj d irhdk o fpàk dk mi;kx fd;k g vkj cM okD;k dk budk mi;kx djd lf{kIr e fy[kk gA

D;k vki ek/koh dh ckr l lger g\

djd n[k

1- þprHkt d vkrfjd dk.kk dk ;kx 360^0 gkrk gAþ
bl dFku dk fl) dj vkj mle mi ifÙk d rhuk e[; igy <<A

lkp ,o ppk dj

ftu nk dFkuk dk Åij geu fl) fd;k g mudh mi ifÙk i< vkj fuEufyf[kr i'uk ij d{kk e ppk djA

1- dku&dku lh ifjHkk"kk] ie;k ;k vfHkxghrk dk mi;kx fd;k x;k g\
2- mu fpàk] irhdk dh lph cukb, tk bu mi ifÙk;k e bLreky fd, x, gA

mi ifÙk l e>uk o djuk

vkb, n[kr g fd Åij fy[k rhuk igy fdl idkj mi ifÙk i<u] le>u vkj fy[ku e enn djr gA

1- ßifjHkk"kkvk] io Kkr ie;] Lo; fl) dk i;kx

;fn vkidk ,d dFku fl) dju d fy, fn;k tk, rk vki dl 'k: djx\

tkfgj g bl d fy, vkidk mu lHkh Kkr tkudkfj;k dh vko';drk gkxh ftud vk/kkj ij dFku dk fl) fd;k tk ldA ; tkudkfj;k vfHkxghr] ifjHkk"kk] io fl) dFku gk ldrh gA blfy, fdlh dFku dk fl) dju d fy, lcl igy ;g lkp y fd D;k&D;k irk g\ rkfd bu tkudkfj;k dk bLreky lgh txg ij gk ldA

geu le:irk d v/;k; e nk f=Hkt k e SAS vkj SSS le:irk ie;k dk fl) dju d fy, AA le:irk dlkVh dk mi;kx fd;k gA blh rjg d{kk 9 e $\sqrt{2}$ dk vifje; l[;k fl) dju gr ifje; l[;k dh ifjHkk"kk dk mi;kx fd;k x;k o fdlh lekrj prHkt dh lEe[k Hktkvk dk cjkcj fl) dju d fy, ß,dkrj dk.kk dk ;XeÞ ie; dk mi;kx fd;k x;kA

djd n[k

vc rd dh miifÙk;k e mi;kx dh xb ifjHkk"kk, NkfV,A

2- fuxefud rdZk }kjk miifÙk (Deductive Reasoning)

fdlh miifÙk e ,d dFku d ckn vxyk dFku fdl vk/kkj ij fy[k ;g lkpuk egRoi.k gA bld fy, igy l Kkr ifjHkk"kk] vfHkxghr o io fl) ie; dh tkudkjh gkuk vko';d g

1- fuEufyf[kr dFku dk fu"d"k dFku fyf[k, A

ßl vkj m lekrj j[kk, gAÞ

lekrj j[kk dh ifjHkk"kk l ge irk g fd lekrj j[kkvk e mHk;fu"B fcn ugh gkrk gA ¼rd½

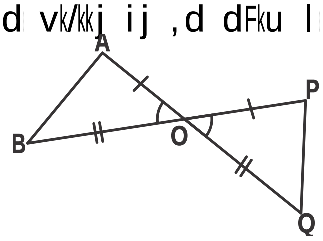
blfy, ge dg ldr g ;fn Þl vkj m dkb nk lekrj j[kk, g rk mue dkb mHk;fu"B fcn ugh gkxkAÞ¼fu"d"k dFku½

,d vU; mnkgj.k n[kr g&

2- ;fn $a+5=b$ vkj $c=b$ g rk

$a+5=c$ gkxkA ;ku $a=c-5$

3- Åij fy[k nkuk mnkgj.kk e ifjHkk"kk vkj vfHkxghr d vk/kkj ij ,d dFku l vxyk dFku fy[kk x;k gA blh rjg io fl) dFku ;k ie;k d vk/kkj ij Hkh fu"d"k fudky tk ldr gA vkb, ,d mnkgj.k n[kr g&



ΔAOB vkj ΔPOQ e $\angle AOB = \angle POQ$,

$OA = OP$ vkj $OB = OQ$ gA

SAS lokxlerk ie; d vk/kkj ij ge dg ldr g fd $\Delta AOB \cong \Delta POQ$

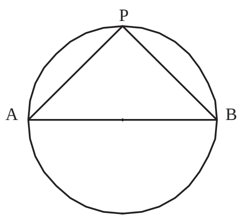
4- fuxefud rd ge ,d 0;kid lR; dFku l fof'k"V lR; dFku rd igpu e Hkh enn djrk gA mnkgj.k d fy, ;fn ,d ckj ;g fl) dj n fd fdUgh nk fo"ke l[;kvk dk x.kuQy ,d fo"ke l[;k gkrh g rk fcuk x.kk fd, gh ge fo"ke l[;kvk dk igpku dj x.kuQy d fo"ke gku dk tku ldr gA

mnkgj.kkFkZ 7428391 × 607349 dk x.kuQy Hkh fo"ke l[;k gksxh D;kfd 7428391 vkS 607349 nksuks dk l[;k,¡ gh fo"ke gSA

djd n[k

1- fl) dj fd & fdUgh Hkh nk Øekxr fo"ke l[;kvk dk ;kx] 4 dk x.kt gkrk gA

2- fn, x, dFkuk d vk/kkj ij fu"d"k dFku fyf[k,A



(i) dFku a & ox ,d vk;r gA

dFku b & vk;r ,d lekrj prHkt gA

(ii) dFku a & thok AB oÙk dh ifjfèk ij ∠APB cukrh gA

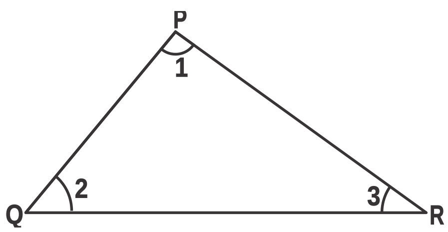
dFku b & thok AB ,d 0;kl gA

3- ;fn ABCD vkj PQRS nk vk;r g rk bud dk.kk] Hkt vk o fod.kk d ckj e ge D;k&D;k fu"d"k fudky ldr g\ D;k ge dg ldr g fd ; lokxle vFkok le:i g\

D;k dkVdj o ulikdj xf.krh; dFku fl) dj ldrs gS

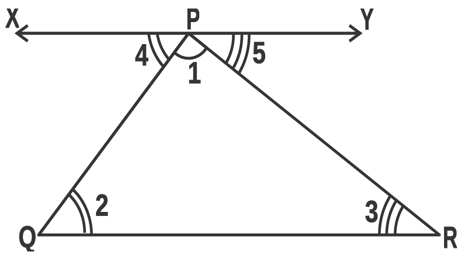
xf.kr lh[kr le; ge dbZ ckj eki dj ;k fo'k"k mnkgj.k n[kdj 0;kid Lrj ij dN ckr eku yr gA f=Hkt d vr% dk.kk dk ;kx 180° g] bl Hkh fn[kkr le; ge eki dj vFkok dkuk dk dkV] mUg ,d lkFk j[kdj ;g dgr g fd vr%dk.kk dk ;kx 180° gA fdUr ;g bl dFku dh mi iifŸk ugh gA bl rjg n'kku l ;g gj f=Hkt d fy, ekU; g ,lk ge ugh dg ldrA

ge tkur g fd fdlh Hkh f=Hkt d rhuk vr%dk.kk dk ;kx 180° gkrk g] ,d ie; g tk fd lHkh f=Hktk ij ykx ,d 0;kid dFku gA eku y fd vkiu fdlh ,d f=Hkt d dk.kk dk ekik ;fn mudk ;kx 180° gk rk fdlh nlj f=Hkt d fy, Hkh ,lk gkxk ge ;gh ckr ugh dg ldrA bl idkj lHkh lHko f=Hkt d dk.kk dk ekiuk lHko ugh gA bld vykok ;fn ;kx 180° l de ;k T;knk gk rk ge ;gh ekux fd eki Bhd l ugh gvkA ,lk blfy, g D;kfd ge tkur g fd lery ij cu f=Hkt d rhuk dk.kk dk ;kx 180° gkxk gh vkj ge bl 0;kid :i e fl) dj ldr g] ftlls ;g gj f=Hkt d fy, lgh gkxk ghA



xf.kr e dFku dk fl) dju d fy, fuxefud rd.k (Deductive Reasoning) dk mi;kx djr g ftl l O;kid :i l fdlh Hkh dFku dh lR;rk tkph o LFkkfir dh tk ldrh gA O;kidrk d fy, ge ;gk ,d f=Hkt dh dYiuk djx] ftld vkdkj] dk.kk dh eki vkfn d ckj e ge dN ugh tkur vFkkr o dN Hkh gk ldr gA bl l gekjk fu"d"k gj f=Hkt ij ykx gkxkA

iz es; 1 % fdlh f=Hkt d vr% dk.kk dk ;kx 180° gkrk gA



mi iflk % ,d f=Hkt PQR fn;k g ftld dk.k $\angle 1, \angle 2$ vkj $\angle 3$ gA

fl) djuk g% $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$

jpuk % QR d lekrj fcn P l gkrh gb ,d j[kk XPY cuk,] rkfd lekrj j[kkvk dk x.kk dk mi;kx dj ldA

vkdfr e]

$\angle 4 + \angle 1 + \angle 5 = 180°$ ¼XPY ,d j[kk g½ ------------------------¼1½

$\angle 4 = \angle 2$ vkj $\angle 5 = \angle 3$ ¼,dkrj dk.kk dk ;Xe½ ------------------------¼2½

¼1½ e $\angle 4$ vkj $\angle 5$ dk eku j[ku ij

$\angle 2 + \angle 1 + \angle 3 = 180°$ ------------------------¼3½

;kuh $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$

ble $\angle 1, \angle 2$ dk vyx&vyx eku o PQ, QR vkfn dh yEckb dN Hkh gk ldrh gA 'kr ;g g fd f=Hkt cu ik,A ------------------------¼4½

T;kfefr e dFkuk dk fl) djr le; ge vDlj jpuk djr gA bl miifÙk e geu ,d lekrj j[kk XPY [khph ftll ge ,dkrj dk.k ie; dk mi;kx dj ik,A

djd n[k

fl) dj fd &

1. fdlh f=Hkt dk cfg"dk.k njLFk vUr%dk.kk d ;kxQy d cjkcj gkrk gA
2. fdlh f=Hkt d nk dk.k cjkcj gk rk mudh lEe[k Hktk, Hkh cjkcj gkrh gA
3. fdlh lekrj prHkt dk ,d fod.k ml nk lokxle f=Hktk e foHkkftr djrk gA
4. nk ledk.k f=Hktk e ,d f=Hkt dk d.k o ,d Hktk nlj f=Hkt d d.k o lxr Hktk d cjkcj gk rk o f=Hkt lokxle gkr gA

3- xf.krh; Hkk"kk dk mi;kx djd lVhd] lf{kIr ,o Li"V Hkk"kk e fy[kuk

ikÑr l[;k d bl x.k/ke dk i<

$n_1 + n_2 = n_2 + n_1 \qquad \forall\ n_1, n_2 \in \mathrm{N}$ (1)

D;k vki crk ldr g fd ;g ikdr l[;k dk dku lk x.k/ke g\

;g dFku ikÑr l[;kvk e tkM d Øe fofue; (Commutative Property) d x.kèke dk crkrk gA ;kuh 'kkfCnd rkj ij dg rk fdUgh Hkh nk ikÑr l[;kvk dk tkM] mud Øe cny dj tkMu ij leku jgrk gA dFku e bl h ckr dk dN v{kj] irhd ;k fpàk dh enn l lf{kIr e fy[kk x;k gA tl nk ikÑr l[;kvk dk n_1 vkj n_2 l n'kk;k x;k gA lkFk gh nk u, ldr $\forall$ vkj $\in$ Hkh gA

;g NkVk lk xf.krh; dFku ;g crkrk g fd fdUgh Hkh nk ikÑr l[;kvk dk ;kxQy bl ckr ij fuHkj ugh djrk g fd fd le fd ldk ;kx dj jg gA bldk vFk ;g g fd ge n_1 vkj n_2 dk eku cny dj dkb Hkh ikdr l[;k j[k ldr g vkj gj eku d $n_1 + n_2 = n_2 + n_1$ iklr gkrk g A

bl h rjg l ge x.kk d fy, Øe fofue; d fu;e dk Hkh fy[k ldr gA

vc ifje; l[;k dh fuEufyf[kr ifjHkk"kk dk i< ft l v{kj&irhdk dh enn l fy[kk x;k gA

$\mathrm{Q} = \dfrac{p}{q} \qquad$ tgk $p, q \in \mathrm{I}\ \&\ q \neq 0$

fd lh ifje; l[;k Q dk $\dfrac{p}{q}$ d #i e fy[kr g tgk p, q dkb nk i.kkd g vkj q dk eku 0 ugh gk ldrkA

djd n[k

fuEufyf[kr xf.krh; dFkuk dk 'kCnk e fyf[k, A

(i) $a^m \times a^n = a^{m+n} \quad a, m, n \in \mathrm{N}$

(ii) $p(x + y) = px + py \quad \forall p, x, y \in \mathrm{R}$

(ii) ikdfrd l[;kvk d lHkh x.kèkek dk irhd Hkk"kk e fy[kA

xf.kr eaiz;qDr o xf.krh; dFku

xf.kr e ifjHkk"kk,] x.k] fu;e bl rjhd l lf{kIr e fy[k tkr gA ,lk u gk rk dFkuk o mi ifÙk;k dk fy[ku e tku fdruk fy[kuk iMA xf.krh; Hkk"kk lgh fpàk d mi;kx l fd lh ckr dk lVhdrk l dgu e enn djrh gA blfy, bldk mi;kx ie; fl) djr g, djuk t:jh Hkh g vkj Qk;nen HkhA

ol rk xf.kr e vud fpà mi;kx fd, tkr g ij ;gk ij dN fpàk vkj mud vFk fn, gA vkx ge budk mi;kx le>x vkj dN u, dFku Hkh fy[kxA

Ø·	fpà	vFk	
1-	$=$	cjkcj g	(is equal to)
2-	$<$	l NkVk g	(Less than)
3-	$>$	l cMk g	(Greater than)
4-	$\therefore$	blfy,	(Therefore)
5-	$\because$	pfd	(Since)
6-	$\neq$	cjkcj ugh g	(is not equal to)
7-	$\forall$	lHkh d fy,@iR;d d fy,	(For all)
8-	$\in$	dk vo;o g	(Belongs to)
9-	$\notin$	dk vo;o ugh g	(does not belong to)
10-	$\sim$	le:i g	(is similar to)
11-	$\cong$	lokxle g	(is congruent to)
12-	$\Rightarrow$	vrHkko@bfxr djrk g	(implies to)
13-	$\parallel$	lekrj g	(is parallel to)

mnkgj.k&1- fuEu 'kkfCnd dFkuk dk xf.krh; dFkuk e fy[k&

¼v½ i.kkd l[;kvk e 0;odyu djr le; Øe fofue; fu;e ykx ugh gkrk gA

¼c½ fdlh Hkh ikÑr l[;k dk ox] ml l[;k l cMk ;k mld cjkcj gkrk gA

gy& ¼v½ $a - b \neq b - a \qquad \forall\ a, b \in \mathrm{I}$

xf.krh; dFku fy[ku d fy, geu nk pjk a vkj b dk mi;kx fd;k g vkj fpàk $\neq$, $\forall$, $\in$ dk mi;kx fd;k gA

¼c½ $x^2 \geq x \qquad \forall x \in N$

;gk x fdlh ikÑr l[;k dk fu:fir djrk gA

djd n[k

bu lHkh d fy, xf.krh; dFku fy[k----

(i) fd lh i.kkd l[;k dk 1 l x.kk dju ij ogh i.kkd l[;k ikIr gkrh gA

(ii) fd lh Hkh f=Hkt dh nk Hktkvk dk ;kxQy rhljh Hktk l vf/kd gkrk gA

(iii) nk fHkUukRed l[;kvk dk ;kx ,d fHkUukRed l[;k gh gkrh gA

i'ukoyh 1

1- crkb, fd fuEufyf[kr xf.krh; dFku lgh g ;k xyr\ mÙkj dk dkj.k Hkh fyf[k,A

(i) prHkt d vr% dk.kk dk ;kx $350°$ gkrk gA

(ii) fd lh okLrfod l[;k x d fy, $x^2 \geq 0$

(iii) nk le l[;kvk dk tkM le l[;k gkrk g A

(iv) lHkh vHkkT; l[;k, fo"ke gkrh gA

(v) $3n + 1 > 4$, tgk n ikÑr l[;k gA

(vi) $x^2 > 0$, tgk x okLrfod l[;k gA

(vii) $(a + b) + c = a + (b + c)$ $\forall\ a, b, c \in N$

(viii) $(p - q) + r = p - (q + r)$ $\forall\ p, q, r \in Q$

(ix) $(x + y) - z = x + (y - z)$ $\forall\ x, y, z \in R$

2- uhp dh lph e dN vfHkxghr] ie; ,o ifjHkk"kk, nh xb gA bUg /;ku l i<A

dFku 1-	i.k] fgLl l cMk gkrk gA ¼vfHkxghr½
dFku 2-	;fn fd lh f=Hkt dh rhuk Hktkvk dh eki vyx&vyx gk rk og f=Hkt fo"keckg f=Hkt gkrk gA ¼ifjHkk"kk ½
dFku 3-	;fn n fo"ke i.kkd g rk $n = 2k + 1$ fy[kk tk ldrk g] tgk k dkb i.kkd gA ¼ifjHkk"kk ½
dFku 4-	nk f=Hktk e ;fn ,d f=Hkt dh Hktk,] nlj f=Hkt dh lxr Hktkvk d cjkcj gk] rk nkuk f=Hkt lokxle gkr gA ¼ie;½
dFku 5-	;fn dkb nk oLr, Øe'k% rhljh oLr d cjkcj g] rk igyh nkuk oLr, ,d&nlj d cjkcj gkrh gA ¼vfHkxghr½

Åij fn, dFkuk d vk/kkj ij uhp nh xb tkudkfj;k d fy, lHko fu"d"k dFku fy[kA

(i) f=Hkt RST vkj f=Hkt XYZ e $RS = XY$, $ST = YZ$ vkj $TR = ZX$ gA

¼tl ;gk dFku&4 d vk/kkj ij ge ;g fu"d"k fudky ldr g fd $\Delta RST \cong \Delta XYZ$½

(ii) $\frac{AB}{2} = AC$

(iii) $l = \frac{k+5}{2}$ vkj $2m = k + 5$ gA tgk k, l vkj $m \in R$

(iv) ΔDEF e $DE \neq EF \neq FD$ gA

(v) 141 ,d fo"ke i.kkd gA

3- ;fn n_1 vkj n_2 nk le i.kkd g rFkk k_1 vkj k_2 dkb nk i.kkd g rc]

(i) le i.kkd dh ifjHkk"kk dk mi;kx djd n_1 vkj n_2 dk Øe'k% k_1 vkj k_2 d :i e fyf[k, A

(ii) x.kk $n_1 n_2$ dk k_1 vkj k_2 d :i e fyf[k, A

(iii) vc $n_1 + n_2$ dk k_1 vkj k_2 d :i e fyf[k, A

(iv) $n_1 \times n_2$ le l[;k g ;k fo"ke\ D;k\

(v) $n_1 + n_2$ le l[;k g ;k fo"ke\ D;k\

4- ;fn $ax^2 + bx + c = 0$,d f}?kkrh lehdj.k g tgk $a, b, c \in R$ vkj $a \neq 0$ rk bue l dku&dku l lehdj.k f}?kkrh lehdj.k gk ldr g vkj dkj.k fyf[k,A

(i) $ax^2 - bx + c = 0$ (ii) $bx + c = 0$ (iii) $ax^2 + c = 0$

(iv) $ax^2 = 0$ (v) $bx = 0$

5- uhp ifje; l[;k (Q) dh ifjHkk"kk g&

$Q = \frac{p}{q}$ tgk $\forall\, p, q \in I$ vkj $q \neq 0$

(i) ifje; l[;k dh ifjHkk"kk 'kCnk e fyf[k,A

(ii) D;k $\frac{6}{0}$ ifje; l[;k g\

(iii) D;k $\frac{81}{1}$ ifje; l[;k g\ ifjHkk"kk d vk/kkj ij dkj.k crkb,A

(iv) ;fn $\frac{b+9}{a-5}$,d ifje; 0;td g] tgk $a, b \in N$ ¼ikÑr l[;k½ g] rk a dk dku lk eku ;gk ekU; ugh g\ vkj D;k\

(v) ;fn $\frac{p^2+7}{q^2-25}$ ifje; 0;td gA ;gk q dk eku 5 vkj &5 D;k ugh gk ldrk\ ¼ifjHkk"kk dk mi;kx djA½

FFXD82

xf.krh; dFkukvksa dks fl) djus ds <ax

vHkh rd geu xf.krh; dFkuk dk lkekU; r% lh/k&lh/k fuxeu rd l fl) fd;k gA bl d dN vkj mnkgj.k n[kr g &

^^;fn ΔABC ,d leckg f=Hkt g rk og lef}ckg f=Hkt Hkh gA**

;fn dkb f=Hkt leckg g rk mldh rhuk Hkt k, cjkcj gA ;kuh mldh lHkh Hkt k, cjkcj g rk mldh dkb Hkh nk Hkt k, cjkcj gkxh ghA vr% og lef}ckg Hkh gkxkA

vkb, vc bUgh rF;k dk ge irhdk dh lgk;rk l fy[kdj inf'kr djuk lh[kr gA

$A: \Delta ABC$ leckg f=Hkt gA

$B: \Delta ABC$ lef}ckg f=Hkt gA

vc ;fn dFku A lgh g rk dFku B Hkh lgh gA vr% bl fuEufyf[kr rjhd l n'kk,xA

$A \Rightarrow B$ ge bl ,l i<r g þ;fn A rk Bþ ;k *A vrHkko B*

;gk $\Rightarrow$ vrHkko ¼bfxr djrk g½ dk fpà gA

djd n[k

1- bl idkj d dN vkj dFku lkpdj fy[k ftUg lh/k&lh/k fuxeu rd ij fl) fd;k tk ldrk gA

2- D;k $A \Rightarrow B$;g fn[kkrk g fd $B \Rightarrow A$ \ dkj.k crk,A

vrHkko dk mi;kx

vkb, dN mnkgj.k n[kr g

dFku 1 ¼& ;fn $x^2 = 4$ g rk $x = 2, -2$ gkxkA

$A: x^2 = 4$

$B: x = \pm 2$

ge irk g fd ;fn $x^2 = 4$ gk rk x dk eku 2 vkj &2 gkxkA vr% $A \Rightarrow B$ gA

dFku 2 ¼& ;fn m] 9 dk x.kt g rk m] 3 dk Hkh x.kt gA

$A: m, 9$ dk x.kt gA

$B: m, 3$ dk x.kt gA

ge tkur g fd ;fn dkb l[;k 9 dk x.kt gk rk og 3 dh Hkh x.kt gkxhA vr% $A \Rightarrow B$

djd n[k

bu dFkuk e lgh rkfdd lc/k irk dj vkj fpà ¼$\Rightarrow$½ dk mi;kx djd n'kk,A

1- P: prHkt ABCD ,d vk;r gA

Q: prHkt ABCD ,d ox g A

2- A: fcn P_1 j[kk l vkj m ij fLFkr gA

B: j[kk l vkj m vlekrj j[kk, gA

dN vkj dFkuk dk fl) djuk

vc ge dN ,l dFkuk dk ij[kx vFkok mi ifÙk djx ftue lh/k fuxeu }kjk ge dFku dh mi ifŸk rd ugh igp ldrA

dFku 3 ¼& fo"ke l[;k dk ox fo"ke l[;k gkrh gA

mi ifÙk ¼& ekuk n ,d fo"ke l[;k g rc

$$n = 2k + 1$$

nkuk i{kk dk ox dju ij

$n^2 = (2k + 1)^2$

$(2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$

$=2(2k^2+2k)+1$ ¼ pfd $2k^2 + 2k$ Hkh i.kkd g] blfy, bl dkb i.kkd

$=2b + 1$ b d cjkcj eku ldr g ;kuh $b = 2k^2 + 2k$ ½

;kuh $n^2 = 2b + 1$

pfd $2b$,d le l[;k g vr% $2b + 1$,d fo"ke l[;k g A

Li"Vr% fo"ke l[;k dk ox ,d fo"ke l[;k gkrh gA

dFku 4 ¼& fl) dhft, fd $\sqrt{2}$,d vifje; l[;k gA

bl dFku dk fl) dju d fy, lcl igy ge ;g ekux fd $\sqrt{2}$,d vifje; l[;k ugh g ;kfu $\sqrt{2}$,d ifje; l[;k gA vc ;fn $\sqrt{2}$ ifje; l[;k ugh g rk ifje; l[;k d x.k/kek dk mi;kx djr g, ge ,l fu"d"k rd igpx tk $\sqrt{2}$ d ifje; l[;k gku d foijhr gkA bl rjg $\sqrt{2}$,d vifje; l[;k fl) gk tk,xhA

vkb, bl dFku dh mi ifÙk n[kr g&

mi ifÙk ¼& fn, x, dFku d foijhr dk lR; ekur g fd $\sqrt{2}$,d ifje; l[;k gA rc ifje; l[;k dh ifjHkk"kk l]

$\sqrt{2}$ ¾ $\frac{a}{b}$ tgk $a, b \in I$] $b \neq 0$ ------------¼1½

lkFk gh a vkj b lgvHkkT; gA

¼1½ d nkuk i{kk dk ox dju ij

$$\left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2$$

$2b^2 = a^2$ ----------¼2½

$2m = a^2$ tgk $m = b^2$] $m \in I$

$2m = (2n)^2$ tgk $a = 2n, n \in I$ ¼;fn a^2 ,d le l[;k g rk a Hkh tk fd i.kkd g] ,d le l[;k gkxh½ vc lehdj.k ¼2½ e a dk eku j[ku ij

$2b^2 = (2n)^2 \Rightarrow b^2 = 2n^2$ ¼;fn eku fd $n^2 = p$ dkb i.kkd g½

$\therefore b^2 = 2p$ tgk $p \in I$

¼vr% b^2 ,d le l[;k g vkj blfy, b tk fd i.kkd g] Hkh ,d le l[;k gkxhA½

$\Rightarrow b = 2q$ tgk $q \in I$

;kuh vc a vkj b dk mHk;fu"B x.ku[k.M 2 g vFkkr a vkj b lgvHkkT; ugh gA ;g eku x, dFku l foifjr g] ftle a] b lgvHkkT; FkA vr% bldk xyr fl) djrk g fd $\sqrt{2}$,d ifje; l[;k gA

vr% ge bl fu"d"k ij igp fd $\sqrt{2}$,d vifje; l[;k gA

bl idkj lR;kiu d rjhd dk fojk/kkfDr }kjk mi ifÙk (proof by contradiction) dgr gA tlk fd geu Åij fd;kA bl rjhd e ge ;g eku yr g fd fn;k x;k dFku lR; ugh g vkj mlI dFku dk mYVk ¼fu"k/ku½ lgh gA fQj rkfdd <x l vkx c<dj eku x, dFku dk xyr lkfcr djr gA ifj.kke Lo:i okLrfod dFku lR; fl) gk tkrk gA bl idkj db ckj dFkuk dk fl) dju d fy, bl fof/k dk mi;kx djr gA tlk fd vkiu n[kk ble lcl igy dFku dk fu"k/ku dk lgh ekur gA

fdlh dFku dk udkjuk mlI dFku dk fu"k/ku dgykrk gA bld fy, ge fo'k"k fpà dk bLreky djr gA dFku P dk fu"k/k dFku ~P ;kuh fVYM P fy[kk tkrk gA

vkb, dN mnkgj.k n[kr g&

1- $P : x$ i.kkd gA

$\sim P : x$ i.kkd ugh gA

2- B: j[kk[k.M AB] j[kk[k.M PT ij yc gA

$\sim B$: j[kk[k.M AB] j[kk[k.M PT ij yc ugh gA

djd n[k

fuEu dFkuk dk fu"k/ku dFku fyf[k,&

1- C : Li'k j[kk oÙk dk flQ ,d fcn ij Li'k djrh gA

2- D : lekUrj ek/; x.kkÙkj ek/; l cMk gkrk gA

3- R : $b^2 - a^2$,d _.kkRed l[;k gA

dFkuk dh tkp % db ckj dFkuk dh tkp dju e lh/k&lh/k rd <<uk vklku ugh gkrkA mUg fl) djuk vklku ugh gkrk vkj db ckj rk og lgh Hkh ugh gkr vkj mUg xyr fl) djuk gkrk gA xf.krh; dFku dk xyr fl) dju d fy, dl c<\

dFku 5 %& lHkh vHkkT; l[;k, fo"ke gkrh gA ge ikr g fd bl dFku e rkfdd lc/k <<uk dfBu g] D;kfd vHkkT; l[;k, irk dju dk dkb fuf'pr iVu ugh g ;g Li"V g fd vur vHkkT; l[;kvk d fo"ke gku dh tkp djuk lHko ugh gA fdUr ;fn ge ,d Hkh ,lh vHkkT; l[;k << y tk fo"ke ugh g] rk ;g dFku vlR; fl) gk tk,xkA ,lk ,d iR;nkgj.k gA *2* ;g ,d ,lh vHkkT; l[;k g tk fo"ke ugh gA vr% fn;k x;k dFku vlR; g A

vc bl dFku d fy, iR;nkgj.k <<A

dFku 6 %& $\forall x \in R$;fn x^2 ifje; l[;k g rk x Hkh ifje; l[;k gA

bl dFku e Hkh vxj $x^2 = 2$ g] tk ,d ifje; l[;k g rk $x = \sqrt{2}$ feyxk tk ifje; l[;k ugh gA vr% bl ,d mnkgj.k l fn, x, dFku dk vlR; fl) dj fn;kA bld fy, vkj Hkh db mnkgj.k fey ldr gA

;g /;ku jg fd flQ ,d iR;nkgj.k l dkb 0;kid dFku vlR; fl) gk tkrk g D;kfd xf.kr e fdlh dFku d 0;kid :i l lR; gku d fy, mld gj fLFkfr e o/k gkuk t#jh gA blfy, ;fn dFku ,d Hkh fLFkfr e xyr lkfcr gk tkrk g rk og vlR; gA bl iR;nkgj.k }kjk (Disproof by counter example) dFku dk vlR; fl) djuk dgr gA

djd n[k

bu dFkuk dk ,d iR;nkgj.k << vkj vlR; fl) djA

a. lHkh /kukRed ifje; l[;kvk dk x.kk nkuk ifje; l[;kvk l cMk gkrk gA

b. lHkh le:i vkdfr;k] lokxle Hkh gkrh gA"

mnkgj.k%&2- fl) dhft, fd $2k + 7$,d fo"ke i.kkd g tgk k ,d i.kkd gA

gy%& ;fn n fo"ke i.kkd g] rk $n = 2k + 1$ fy[k ldr g tgk k dkb i.kkd gA

ge fl) djuk g fd $n = 2k + 7$ fo"ke i.kkd g $\forall\, k \in I$

$n = 2k + 7$

$= 2k + 6 + 1$

$= 2(k + 3) + 1$ ----------(1)

ekuk $k + 3 = m$ $\forall\, m \in I$ ----------(2)

%1% o %2% l $n = 2m + 1$

$n = 2m + 1$,d fo"ke i.kkd g $\forall\, m \in I$ %fo"ke l[;k dh ifjHkk"kk d vulkj%

Li"Vr% $2k + 7$,d fo"ke i.kkd gA

i'ukoyh 2

1- bu dFkuk dk xf.krh; :i e fyf[k, A
(i) i.kkd] x.ku lfØ;k d lki{k lor gA
(ii) ifje; l[;kvk e ?kVku e Øe fofue; ykx ugh gkrk gA
2- fuEu xf.krh; dFkuk dk i<dj muij vk/kkfjr mRrj nA
v- dFku ½ $n^3 \geq n$ $\forall\, n \in Q$
(i) bl dFku dk 'kCnk e fy[kA
(ii) D;k ;g dFku lgh g\
(iii) ;g dFku fdu l[;kvk d fy, lgh g\
(iv) D;k bl dFku e $n = \frac{\sqrt{2}}{7}$ j[kk tk ldrk g\
(v) D;k dFku $p^3 \geq p$ $\forall p \in I$ lgh g\ dkj.k crk,A
c- $x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$
(i) bl dFku dk ^;fn&rk* d :i e fy[kA
(ii) D;k ;g dFku lgh g\
(iii) ;fn $x \notin N$ D;k ;g dFku lgh g\
3- crkb, fd fuEu dFku lR; g ;k vlR;A mÙkj dk dkj.k fy[kA
(i) lHkh cgHkt ipHkt gkr gA
(ii) lHkh "kVHkt cgHkt gkr gA
(iii) lHkh le l[;k, 2 l HkkT; ugh gkrh gA
(iv) dN okLrfod l[;k, vifje; gkrh gA
(v) lHkh okLrfod l[;k, ifje; gkrh gA
4- fn;k gvk g fd ABCD lekrj prHkt g vkj $\angle B = 80°$ rc lekrj prHkt d vU; dk.kk d ckj e vki D;k fu"d"k fudky ldr g\
5- fl) dj fd 4m+9 ,d fo"ke i.kkd g tgk m ,d i.kkd gA
6- mi;Dr fpà dk mi;kx djr g, fuEu dFkuk dk fu"kèku dFku fyf[k,&
(i) M:$\sqrt{7}$ vifje; l[;k gA
(ii) $A : 6 + 3 = 9$
(iii) D : dN ifje; l[;k, i.kkd gkrh gA
(iv) P : f=Hkt PQR lckg gA
7- fuEu dFkuk e rkfdd lcèk irk dj vkj vrHkko ¼⟹½ fpà dk mi;kx djd n'kk,&
(i) A : ΔABC d lHkh vr%dk.k cjkcj gA
B : ΔABC ,d lckg f=Hkt gA
(ii) $T : P(a) = 0$
S : $(x\text{-}a)$ cgin $P(x)$ dk ,d x.ku[kM gA
(iii) P : x vkj y nk fo"ke l[;k, gA
Q : $x + y$,d le l[;k gA

ifr/kukRed (Contrapositive)

dN dFkuk dk fn, x, :i e fl) djuk ef'dy gkrk g] t l ;g dFku n[k %&

A_1 % ;fn nk f=Hkt le:i ugh g rk o f=Hkt lokx le Hkh ugh gA

bl dFku dk ,l Hkh fy[kk tk ldrk g %&

A_2 % ;fn nk f=Hkt le:i g rk o lokx le Hkh gA

A_3 % ;fn nk f=Hkt lokx le ugh g rk o le:i Hkh ugh gA

A_4 % ;fn nk f=Hkt lokx le g rk o f=Hkt le:i Hkh gA

vc crk, fd Åij fy[k pkjk dFkuk e l dku&l dFku rY; g\ tkfgj g dFku A_1 vkj A_4 rY; dFku g] D;kfd ;g nkuk rkfdd :i l ,d gh ckr dgr g vkj ogh mldk ifrèkukRed :i gA

gkykfd dFku A_1 vkj A_4 rkfdd :i l ,d gh ckr dk dgr g ij dFku A_1 dh vi{kk A_4 e rd <<uk vkj ml mi;kx djuk T;knk vklku gA dFku A_4 dFku A_1 dk ifrèkukRed :i gA blfy, dN dFkuk dk fl) dju d fy, mUg ifr/kukRed :i e fy[kdj fl) djr gA

mnkgj.k&3- fuEu dFku dk ifr/kukRed :i e fy[k &

;fn ,d l[;k 25 l HkkT; g rk og 5 l Hkh HkkT; gkxhA

gy%& ;fn ,d l[;k 5 l HkkT; ugh g rk og 25 l Hkh HkkT; ugh gA

mnkgj.k&4- ;fn $x^2 - 6x + 5$ le g] rk x fo"ke gA tgk $\forall\, x \in I$

gy%& bl dFku dk ifr/kukRed :i e fy[kdj n[kr gA

;fn x fo"ke ugh g] rk $x^2 - 6x + 5$ le ugh gA $\forall\, x \in I$

vc x fo"ke ugh g $\Rightarrow x$ le g

$x = 2k,\ k \in I$ ¼le i.kkd dh ifjHkk"kk l½

$x^2 - 6x + 5 \quad \Rightarrow (2k)^2 - 6(2k) + 5$

$\Rightarrow 4k^2 - 12k + 4 + 1 \quad \Rightarrow 2\,(2k^2 - 6k + 2) + 1$

$\Rightarrow 2b + 1$ tgk $b = 2k^2 - 6k + 2$ vkj b ,d i.kkd g $(b \in I)$

fo"ke i.kkd dh ifjHkk"kk l ge ;g tkur g fd $2b + 1$,d fo"ke i.kkd gA

vFkkr ;fn x fo"ke ugh g] rk $x^2 - 6x + 5$ le ugh gA

i'ukoyh 3

FG799P

1- fl) djsafd n cgHkqt tgk $n \geq 3$] vkj ftldh lHkh Hkqtk,¡ cjkcj g] d vrj dk.kk dk ;kx $n\left[180-\dfrac{360}{n}\right]^{\circ}$ gkrk gA
2- fdlh lekrj J.kh dk n ok in $6n+1$ gA fl) dj fd mlJ.kh d p ink dk ;kx $3p^2+4p$ gA
3- fl) dj fd fdUgh Hkh rhu Øekxr le l[;kvk dk ;kx ge'kk 6 dk x.kt gkrk gA
4- fl) dj fd $(2n+3)^2-(2n-3)^2$ dk ,d x.ku[k.M 8 g ;gk n ,d ikdr l[;k gA
5- fl) dj fd nk Øekxr i.kkd l[;kvk d oxk d ;kx dk 4 l foHkkftr dju ij 'k"kQy lno 1 iklr gkrk g A

geu lh[kk

1- dFkuk dk fl) dju d fy, &
(i) igy l fl) ie;] ifjHkk"kk ;k vfHkxghr dk mi;kx fd;k tkrk gA
(ii) miifÙk dk iR;d dFku] Bhd igy oky dFku l rkfdd :i l tMk gkrk gA
(iii) dFkuk dk fy[kr le; fo'k"k idkj d irhdk fpàk dk i;kx fd;k tkrk g rkfd cM okD;k dk lf{klr e fy[kk tk ldA
2- xf.krh; Hkk"kk dk i;kx djd dFkuk dk lVhd] l{ki o Li"V Hkk"kk e fy[kk tk ldrk gA
tl& $\forall, \in, \cong$ vkfnA
3- xf.krh; dFkuk dk fl) dju d <x
(i) fuxeu rd
(ii) iR;nkgj.k }kjk

mÙkjekyk&1

1- (i) xyr (ii) lgh (iii) lgh (iv) xyr (v) xyr
(vi) xyr (vii) lgh (viii) xyr (ix) lgh
2- (i) $\Delta RST \cong \Delta XYZ$ ¼dFku&4 l½
(ii) $AB \rangle AC$ ¼dFku&1 l½
(iii) $l=m$ ¼dFku&5 l½
(iv) ΔDEF fo"keckg f=Hkqt gA¼dFku&2 l½

(v) $141 = 2\times 70+1$ ¼dFku&3 l½

3- (i) $n_1 = 2k_1, n_2 = 2k_2$

(ii) $n_1 \times n_2 = 4(k_1 \times k_2)$

(iii) $n_1 + n_2 = 2(k_1 + k_2)$

(iv) $n_1 \times n_2 = 2(k_1 \times k_2) = 2k,$ le l[;k dh ifjHkk"kk lA

(v) le l[;kA

4- (i), (iii), (iv) lHkh e $a \neq 0$ gA

5- (ii) ugh (iii) gk (iv) $a = 5$ ekU; ugh gA

mÙkjekyk&2

1- (i) $a.b = c \forall a, b, c \in I$ (ii) $p - q \neq q - p \forall p, q \in Q$

2- v- (i) fdlh ifje; l[;k dk ?ku ml l[;k l cMk gkrk gA

(ii) ugh (iii) $n \in N$ d fy, lgh gA (iv) ugh

(v) ugh] _.kRed l[;k dk ?ku ml l[;k l NkVk gkrk gA

c- (i) ;fn fdlh l[;k dk ox 1 g rk ml l[;k dk eku 1 gkxkA

(ii) gk (iii) ugh

3- (i) vlR; (ii) lR; (iii) vlR; (iv) lR; (v) vlR;

4- $\angle A = 100°, \angle C = 100°, \angle D = 80°$

6- (i) $\sim M: \sqrt{7}$ vifje; l[;k ugh gA

(ii) $\sim A: 6+3 \neq 9$

(iii) $\sim D:$ dN ifje; l[;k,i.kkd ugh gkrh gA

(iv) $\sim P:$ f=Hkt PQR lecksg ugh gA

7- (i) $A \Rightarrow B, B \Rightarrow A$ (ii) $S \Rightarrow T, T \Rightarrow S$ (iii) $P \Rightarrow Q$

अध्याय

15

Bk l vkdfr;k dk i"Bh; {k=Qy ,o vk;ru

[Surface Area and Volume of Solids]

FGG5BC

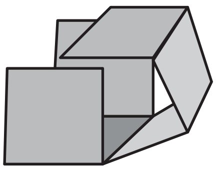
ifjp; ¼Introduction½

ge f=foeh; l lkj e jgr gA ftu f=foeh; vkdfr;k dk ge n[k ldr g ;k Li'k dj ldr g mu vkdfr;k dh yckb] pkMkb vkj Åpkb dk ekik tk ldrk gA db ckj ge bu vkdfr;k d vo;ok t l& vk;ru] {k=Qy vkfn dk ekiu dh vko';drk gkrh gA t l tehu [kjhnr&cpr le;] efr cuku e fdruk lkeku yxxk irk dju e bR;kfnA

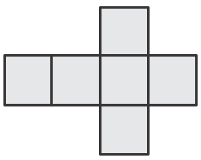
f=foeh; vkdfr;k d {k=Qy vkj vk;ru irk dju d igy] ge bu vkdfr;k dk [kkydj n[kr gA

f=foeh; vkdfr cuku d fy, i"Bh; tky

deyh vkj ekxh d ikl iVB dk ,d ?kukdkj fMCck FkkA mUgku dph dh lgk;rk l fMCc dh dkj dk dkVk vkj Qykdj j[k fn;kA bl [kyh gb vkdfr d ckj e mUgku vki l e ppk dhA dN le; ckn mUgku lyk Vi (cello tape) dh lgk;rk l bu [ky g, Hkkxk dk tkMdj fMCc dk okil cuk fy;k vkj cgr [k'k g,A mUgku ekxh d firk dk fMCck fn[kk;k vkj viu }kjk fd; x; dk; dh ppk dhA



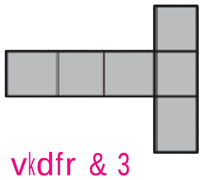
vkdfr & 1



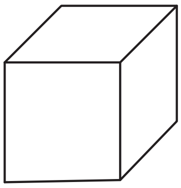
vkdfr & 2

ekxh d firk cgr [k'k Fk ijr mUgku iNk fd D;k fMCck vkj vyx rjg l Hkh [kyk tk ldrk g\ fQj mUgku fMCc dk [kyk vkj vkdfr (3) ikIr fd;kA ekxh vkj deyh u rjr gh ml vkdfr dk okil j[ku dh dkf'k'k dhA

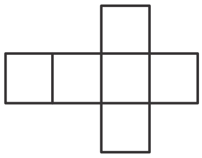
deyh vkj ekxh l ekxh d firk u iVB dk ,d&,d ?kukdkj fMCck d fdukjk dk dkVdj [kyh vkdfr cuku d fy, dgk] nkuk u uhp nh xb vkdfr;k cukbA nkuk l ekxh d firk u bl xfrfof/k d }kjk vkdfr cuku d rjhdk ij ppk dh ;gk geu ik;k fd tc ge iVB d ?kukdkj fMCc dh dkjk dk dkVr g vkj mlh Qyk dj j[kr g rk ge nk



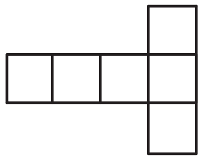
vkdfr & 3



vkdfr & 4



vkdfr & 5



vkdfr & 6

fofHkUu idkj dh lery vkdfr;k ikIr gk ldrh gA bu lery vkdfr;k dk ?ku dk i"Bh; tky (Net) dgr gA fdlh f=foeh; vkdfr dk i"Bh; tky (Net) f}foeh; vkdfr gkrh gA vkdfr&5 vkj vkdfr&6 ,d gh ?ku d nk i"Bh; tky dk inf'kr djr gA D;k ge blh ?ku d vkj vf/kd i"Bh; tky ikIr dj ldr g\

djd n[k

1- iVB d ?kukdkj fMCc yhft, vkj mudh dkjk dk dkVr g, vyx&vyx <x l [kky,A vki fdru idkj d fofHkUu [kyh (lery) vkdfr;k ikr g\

2- ?ku dk i"Bh; tky (Net) cukb,A

ge iVB d ?kukdkj fMCc l X;kjg fHkUu&fHkUu i"Bh; tky ikIr dj ldr gA ,d ?kuHk dk i"Bh; tky dlk gkxk\

3- ,d iVB l 4 leh- Hkt k okyk ?kukdkj fMCck r;kj dhft,A

4- ,d iVB dk ?kuHkkdkj fMCck r;kj dhft, ftldh Hkt k, 12 leh-] 6 leh- vkj 8 leh- gA

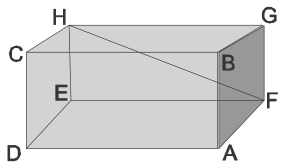
?ku vkj ?kuHk d Hkkx (Parts of a Cube and Cuboid)

(i) ?ku vkj ?kuHk d i"B] dkj vkj 'kh"k (Face,Edge and Vertex)

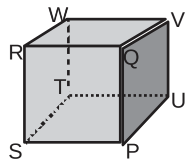
fiNyh d{kkvk e ge ?ku] ?kuHk vkj cyu d ckj e i< pd g A bl v/;k; e ge ?ku vkj ?kuHk d Hkkxk d ckj e tkuxA

irk yxk,¡ **(Explore)**

fn, x, ?ku vkj ?kukHk d fp= dk nf[k,A ;gk ABCDEFGH ?kukHk vkj



vkdfr & 7



vkdfr & 8

PQRSTUVW ?ku gA ?ku vkj ?kukHk dk ukedj.k 'kh"kk d vk/kkj ij gkrk gA D;k vki ?ku vkj ?kukHk d i"B] dkj vkj 'kh"kk dk fxudj mud uke crk ldr g\

?ku ;k ?kukHk d i"Bk o 'kh"kk d chp D;k lc/k g\

vkdfr (7, 8) dk voykdu djr g, fe=k l ppk dj vkj viuh vH;kl ifLrdk e fy[kA vkid voykdu d fcn fuEufyf[kr g&

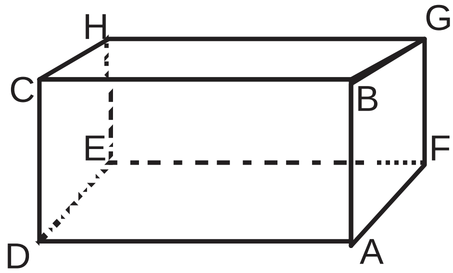
fn, x, ?kukHk ABCDEFGH d dN voykdu ,o lc/k&

- ?kukHk d 8 'kh"k g] tk A,B,C,D,E,F,G vkj H gA
- ?kukHk dh 12 dkj gA ?kukHk e lEe[k dkj cjkcj gkr gA tl Åij fn, ?kukHk ¼vkdfr 7½ e dkj AB o DC, EF o HG vkfn lEe[k dkj cjkcj gA
- ?kukHk d 6 i"B g] tk ABCD, EFGH, AFGB, DEHC, AFED vkj BGHC gA ABCD vkj EFGH vkil e cjkcj gA blh idkj AFGB vkj DEHC, AFED vkj BGHC cjkcj gA

vkdfr 7 o 8 dk voykdu dj vkj crk,¡ fd dku&dku lh dkjk dh yckb;k vkj dku &dku l i"B vkil e cjkcj g\

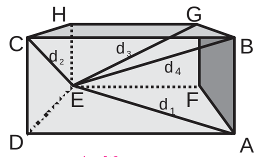
(ii) ?ku vkj ?kukHk d fod.k (Diagonal of a Cube and Cuboid) :-

f'k{kd u fo|kfFk;k l iNk& pkd d fMCc o d{kk dh vkdfr dlh g\ lHkh fo|kfFk;k u mÙkj fn;k fd ?kukHk tlh g rc f'k{kd u ikp fo|kfFk;k dk cykdj mUg pkd d fMCc e ifly j[ku dk dgkA fo|kfFk;k u dgk fd ifly fdlh Hkh ry ij j[ku ij fMCc e ugh vkrhA ABCDEFGH pkd dk ,d fMCck gA blu fMCc e ifly dk ry BGHC ij j[ku ij ge n[kr g fd ifly fMCc d vUnj ugh lek ikrh D;kfd ifly dh yckb fMCc dh yckb l vf/kd gA rc D;k ifly dk fMCc d vUnj j[kk ugh tk ldrk \ yfdu ;fn ifly dk BGHC ij bl idkj j[k fd mld flj BH ;k GC



dh vkj gk rc ,d lHkkouk curh g fd 'kk;n ifly fMCc e lek tk, D;kfd vki n[kr g fd BGHC e BH ;k GC dh yckb BG o BC l vf/kd gA ¼,d pkd dk ;k vU; dkb [kkyh fMCck y dj n[k tk ?kukHk d vkdkj dk gk½ ;fn ifly dk ,lk j[ku d ckn Hkh og fMCc e lek ugh ikrh rc D;k ifly dk j[ku dk dkb vkj rjhdk gk ldrk g ftlls ifly d fMCc e lek ldu dh lHkkouk gk\

vc ;fn ifly dk bl idkj j[k fd mldk flj DG ;k AH ;k FC ;k EB dh vkj jg rc ge n[kr g fd ifly d fMCc e lek tku dh lHkkouk vkj Hkh c< tkrh gA ;kuh ;g njh fMCc d vUnj dh lcl ych njh gkrh gA ;g njh pkd d fMCc ¼?kukHk½ dk vkdk'kh; fod.k gA ;kuh AH,DG,FC,EB ?kukHk ABCDEFGH d vkdk'kh; fod.k gA bUg ge ?kukHk dk fod.k dgr gA ?kukHk ABCDEFGH e mld ry d foijhr dkuk dh nfj;k tl AE o DF,DH o EC bR;kfn ?kukHk d i"Bh; fod.k gA



vkdfr & 9

rc f'k{kd u d{kk d lHkh fo|kfFk;k l dgk fd fdlh ?kukHkkdkj fMCc e /kkx dh lgk;rk l vkdfr 9 e n'kkb xb nfj;k $d_1, d_2, d_3,$ o d_4 dk ekidj n[k fd mue dku&lh njh lcl vf/kd gA bu nfj;k dk ge D;k dgx\

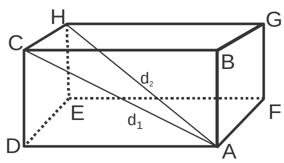
d_1, d_2 vkj d_3 dk ?kukHk dk fod.k dgr g] ijr d_4 D;k g\ D;k ge bl Hkh fod.k dg ldr g\ ;g Hkh ,d fod.k g fdUr ckdh l vyxA ;g ?kukHk d fdlh Hkh ry ij fLFkr ugh gA

bl idkj $d_1, d_2, d_3,$ vkj d_4 fod.k g]ftle ijr ; nk fHkUu idkj d gA d_1, d_2, d_3 fdlh i"B ij cu fod.k g blfy, bUg i"Bh; fod.k dgr g rFkk d_4 ij ?kukHk e g blfy, bl ?kukHk dk fod.k (diagonal of cuboid) ;k vkdk'kh; fod.k dgr gA

?kukHk dk i"Bh; vkj vkdk'kh; fod.k (face and space diagonal)

;fn ge iVB dh fMCc dk n[kx rk ik,x fd fod.k nk idkj d g ,d fMCc d i"B ij rFkk nljk ij ?kukHk e g tk fod.k fMCc d i"B ij cur g] o i"Bh; fod.k dgykr g vkj tk fod.k ij fMCc ¼vFkkr f=foeh; vkdfr½ e cur g] o ?kukHk d fod.k dgykr gA

T;kfefr e ?ku ;k ?kukHk dk i"Bh; fod.k ,d gh i"B d 'kh"kk dk rFkk ?kukHk dk fod.k vyx&vyx i"Bk dk feyku okyk j[kk[kM gkrk gA fn, x, ?kukHk ¼vkdfr&10½ e AH ?kukHk dk fod.k rFkk AC i"Bh; fod.k gA



vkdfr & 10

ge ?ku ;k ?kukHk d dy 16 fod.k ikIr dj ldr g ftle 12 i"Bh; fod.k rFkk 4 ?ku vkj ?kukHk d fod.k gA

djd n[k

1- viuh dkih ij ,d ?ku vkj ?kukHk cukb, vkj bud fod.kk d uke fyf[k,A ?ku vkj ?kukHk d i"Bh; rFkk ?ku vkj ?kukHk d fod.kk dh l[;k fxudj vyx&vyx fyf[k,A

?ku ,o ?kukHk d fod.kk dh yackb irk djuk
(Finding out the Diagonal of cube and cuboid)

?kukHk (Cuboid)

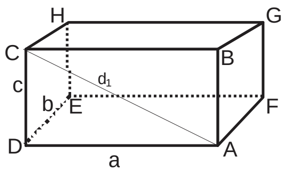
fdlh dej e dej dh yckb]pkMkb vkj Åpkb l Hkh vf/kd yckb d ckl dk j[kuk gA ;fn ge dej dh yckb]pkMkb]Åpkb vkj ckl dh yckb irk gk rc ;g dl tku ik,x fd og ckl dej e j[kk tk ldxk ;k ugh \ ;k ge ;g dl crk, fd vf/kdre fdruh yckb dk ckl dej d Hkhrj j[kk tk ldxk\ ;kuh fdlh ?kukHk d vkdkj d fMCck e vf/kdre fdruh yckb dh NMh]ifly ;k ydMh dk VdMk j[kk tk ldrk g ;g irk dju d fy, ge ?kukHk dh yckb]pkMkb]Åpkb vkj mld vkdk'kh; fod.k e lc/k dk tkuuk gkxkA ge ?ku vkj ?kukHk d i"Bh; fod.k rFkk ?ku ;k ?kukHk d fod.kk d ckj e tku pd g A vc ge ;g tkux fd ;fn ?kUkkHk dh Hktk,; nh xb gk rk mud i"Bh; fod.k rFkk ?kukHk d fod.kk dh yckb dh x.kuk dl dj\

i"Bh; fod.k (Face diagonal)

i"Bh; fod.k dh yckb dl Kkr djx\

ge tkur g fd ΔADC ,d ledk.k f=Hkt g tgk $AD = a$ bdkb vkj $DC = c$ bdkb

g blfy, ck/kk;u&ikbFkkxkjl ie; l ge ikr g fd



vkdfr & 11

$$AC = \sqrt{AD^2 + DC^2}$$

$$d_1 = \sqrt{a^2 + c^2}$$

vr% i"Bh; fod.k (AC) dh yckb $= \sqrt{a^2 + c^2}$ bdkb

blh idkj ge i"Bh; fod.k AE vkj AG Kkr dj ldr gA

$$AE = d_2 = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ bdkb}$$

$$AG = d_3 = \sqrt{b^2 + c^2} \text{ bdkb}$$

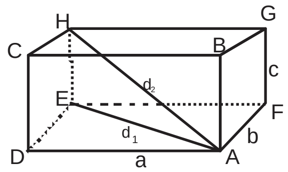
vr% ,l ?kukHk ftl dh rhuk Hkt k,; vyx&vyx yckb dh g e 3 vyx&vyx yckb d i"B fod.k gkr gA

?kukHk dk fod.k

fn, x, ?kukHk ¼vkdfr 11½ dh Hkt k,; a bdkb] b bdkb vkj c bdkb gA AH ?kukHk dk ,d fod.k gA ge ?kUkkHk d fod.k AH dh yckb dh x.kuk dl djx\

vkdfr 11 e AE ,d i"Bh; fod.k g vkj bl dh yckb $\sqrt{a^2+b^2}$ bdkb gkxhA

ΔAEH ,d ledk.k f=Hkt gA ¼vkdfr 12½ ge ckèkk;u&ikbFkkxkjl ie; l ?kukHk dk fod.k AH dh yckb Kkr dj ldr gA



vkdfr & 12

$$AH = \sqrt{AE^2 + EH^2}$$

¾ $\sqrt{(a^2+b^2)+c^2}$

¾ $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

blfy, ?kukHk d fod.k (AH) dh yckb

¾ $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ bdkb

vr% ?kukHk d vkdk'kh; fod.k dh yckb ¾ $\sqrt{(\text{yckb})^2+(\text{pkMkb})^2+(\text{Å pkb})^2}$ bdkb

D;k vU; 3 vkdk'kh; fod.k dh yckb Hkh bruh gh g\ ;g fod.k igpkuA

fod.k g--------]----------]--------

ck/kk;u&ikbFkkxkjl ie; dk mi;kx djd irk djA

?ku (Cube) -

;fn ?ku dh Hkt k a bdkb gk rk ?ku d i"Bh; fod.k dh yckb ¾ $\sqrt{a^2+a^2}$

¾ $\sqrt{2a^2}$

¾ $a\sqrt{2}$ bdkb

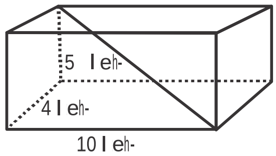
?ku d lHkh i"Bh; fod.k ,d gh yckb d gA

?ku dk vkdk'kh; fod.k ¾ $\sqrt{a^2+a^2+a^2}$

¾ $\sqrt{3a^2}$

¾ $a\sqrt{3}$ bdkb

mnkgj.k&1- ,d ?kukHk dh yckb 10 lseh-] pkMkb 4 lseh- rFkk Åpkb 5 lseh- g rks vkdk'kh; fod.k dh yckb Kkr dhft,\



vkdfr & 13

gy& ?kukHk dh yckb] pkMkb o Åpkb nh xb gA ge ?kukHk d vkdk'kh; fod.k dh yckb Kkr djuh gA ge tkur g fd

?kukHk dk fod.k ¾ $\sqrt{(\text{yckb})^2+(\text{pkMkb})^2+(\text{Åpkb})^2}$

¾ $\sqrt{(10)^2+(4)^2+(5)^2}$

¾ $\sqrt{100+16+25}$

¾ $\sqrt{141}$

¾ 11.87 lseh-

vr% ?kukHk d fod.k dh yckb 11.87 lseh- gkxhA

mnkgj.k&2-

6 lseh- Hkqtk okys ?ku d i"Bh; fod.k o ?ku d vkdk'kh; fod.k dh yckb Kkr dhft,\

gy& ?ku dh Hkqtk 6 lseh- nh xb gA ge i"Bh; o ?ku d vkdk'kh; fod.k dh yckb Kkr djuh gA

ge tkur g fd ?ku dk i"Bh; fod.k ¾$a\sqrt{2}$ bdkb] tgk a ?ku dh Hkqtk gA

vr% ?ku dk i"Bh; fod.k ¾ $6\sqrt{2}$ lseh-

pfd ?ku dk fod.k ¾$a\sqrt{3}$ bdkb

vr% ?ku dk fod.k ¾$6\sqrt{3}$ lseh-

iz'ukoyh&1

1- ,d ?kukHk 8 eh- yck] 4 eh- pkMk vkj 2 eh- Åpk gA ?kukHk d lHkh fod.kk dh yckb Kkr dhft,\

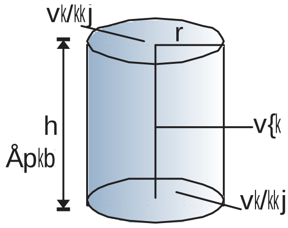
2- ,d ?ku d i"Bh; fod.k dh yckb Kkr dhft, ftldh Hkqtk $12\sqrt{3}$ l- eh- gA mldk vkdk'kh; fod.k fdruk gkxk\

3- ml cM l cM [kHk dh yckb Kkr dhft, tk 10 eh- yck] 10 eh- pkMk vkj 5 eh- Åp dej e j[kk tk ldrk g\

FGQ1CZ

cyu (Cylinder)

cyu ,d f=foeh; vkdfr g ftl e nk lokxle ,o lekrj oÙkh; i"B] ,d oØ i"B d }kjk vkil e tM gkr gA



vkdfr & 14

cyu d mnkgj.k & ikbi] V;c ykbV bR;kfnA

oÙkh; i"Bk d chp dh ycor njh dk cyu dh Åpkb rFkk oÙkh; i"B dk cyu dk vk/kkj dgr gA oÙkh; i"Bk ¼vk/kkj½ d dUnk dk feyku okyk j[kk[kM cyu dk v{k dgykrk gA

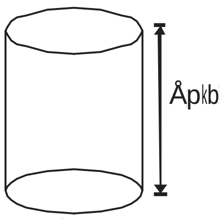
cyu d idkj (Types of Cylinder)

ycoÙkh; vkj fr;d cyu

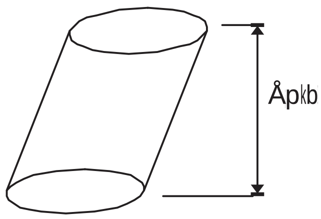
tc nk vk/kkj Bhd ,d nlj d Åij gk rFkk v{k vk/kkj d lkFk ledk.k cukrk gk rk ml s yc oÙkh; cyu ß dgr gA¼vkdfr 15½ ;fn yc oÙkh; cyu d ,d vk/kkj dk FkkMk lk f[kldk fn;k tk; ftlls v{k vk/kkj d ycor u gk rk ml fr;d cyu (Oblique Cylinder) dgr gA¼vkdfr 16½

cyu dk i"Bh; tky (Net of Cylinder)

,d ,lk cyu yu ftld nkuk flj cn gkA ekuk bl cyu d vk/kkj dh f=T;k r



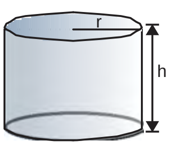
vkdfr & 15



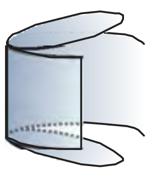
vkdfr & 16

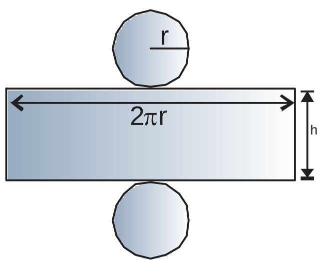
rFkk Åpkb h bdkb gA tc ge cyu ¼vkdfr&17½dh dkj dk dkVdj Qykr g ¼vkdfr 18] 19½ rc ge cyu dk i"Bh; tky (net) ikIr gkrk gA

cyu d i"Bh; tky e] vk;r dh ycckb ¼cyu dk oØ ry½ $2\pi r$ bdkb rFkk pkMkb ¼cyu dh Åpkb½ h bdkb vkj nkuk oÙkh; lrgk dh f=T;k r bdkb gA



vkdfr & 17


vkdfr & 18



vkdfr & 19

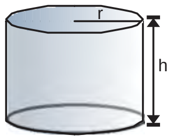
djd n[k

1- 7 leh- Åpkb rFkk 2 leh- f=T;k d vk/kkj oky cyu dk i"Bh; tky (net) cukb,A

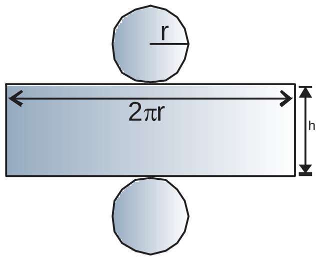
2- Mkbx iij dk mi;kx djr g, 7 leh- Åpkb rFkk 2 leh- f=T;k oky cyu cukb,A

yc oÙkh; cyu dk i"Bh; {k=Qy (Surface area of right circular cylinder)

;gk r f=T;k rFkk h Åpkb d cyu dk i"Bh; tky (Net) vkdfr 20¼ii½ d leku fn[kxkA bl lnHk e vk;r dh pkMkb cyu dh Åpkb h d cjkcj rFkk vk;r dh yckb oÙk dh ifjf/k $2\pi r$ d cjkcj gA



vkdfr & 20¼i½



vkdfr & 20¼ii½

vr% cyu d oØi"B dk {k=Qy = vk;r dk {k=Qy

= $2\pi rh$ ox bdkb

vkj cyu d lEi.k i"B dk {k=Qy ¾ oØ i"B dk {k=Qy $ nkuk vkèkkjk dk {k=Qy

$= 2\pi rh + \pi r^2 + \pi r^2$

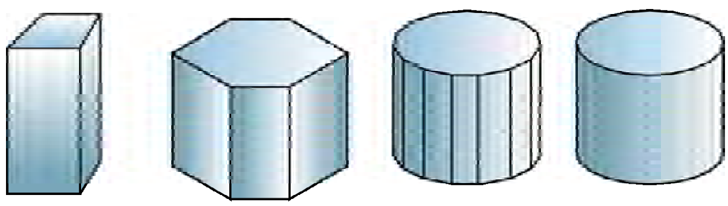
$= 2\pi rh + 2\pi r^2$

$= 2\pi r(h + r)$ ox bdkb

tgk r cyu d vk/kkj dh f=T;k rFkk Åpkb h gA

yc oÙkh; cyu dk vk;ru (Volume of a Right Circular Cylinder)

ge tkur g fd ?kukHk dk vk;ru] ?kukHk d vk/kkj dk {k=Qy vkj mldh Åpkb dk x.kuQy gkrk gA uhp nh xb vkdfr&21 ,d ?kukHk g ftld vk/kkj e Hkqtkvk dh l[;k d c<u l vkdfr &21 e Øfed ifjoru gk jgk gA vki n[k ldr g fd ;g èkhj&èkhj yc oÙkh; cyu curk tkrk gA ;g blfy, fd vk/kkj /khj&/khj oÙk d vkj djhc tkrk jgrk gAtc bld vk/kkj dh Hkqtkvk dh l[;k vlhfer gk tkrh g rc ;g vk/kkj oÙk cu tkrk g vkj ijh vkdfr yc oÙkh; cyu ¼vkdfr&22½ cu tkrh gA



vkdfr & 21

vkdfr & 22

blfy, ge dg ldrs gSa fd csyu d s vk;ru dk lw= ge ?kukHk ls iklr dj ldrs gSa csyu dk vk;ru mldh vk/kkj d s {ks=Qy vkSj mldh ÅapkbZ d s x.kuQy d s cjkcj gksrk gSA

ekuk csyu d s vk/kkj dh f=T;k r bdkbZ rFkk Åapkbz h bdkbZ gks rks

csyu dk vk;ru ¾ vk/kkj dk {ks=Qy × Åapkbz

$= \pi r^2 \times h$

$= \pi r^2 h$?ku bdkbZ

djd s n[ks

1- ,d dkxt dh 'khV yhft, mls yisVdj ,d csyu cukb, vkSj csyu dk {ks=Qy ,o vk;ru Kkr djsa vc blh 'khV dks pkSMkbZ dh vksj ls eksMdj iklr csyu dk vk;ru ,o {ks=Qy Kkr djsa D;k vk;ru vkSj {ks=Qy d s ckjs e s vki D;k dg ldrs g\

2- ikp #i, d s dN fldd s y s vkSj vyx&vyx l[;k e s fldd s dk ,d d s Åij ,d tek, bl rjg ls iklr vkdfr dk {ks=Qy ,o vk;ru fudkyA {ks=Qy ,o vk;ru iklr dju d s fy, vkiu fdu&fdu rjhdk s dk mi;kx fd;k\

oØi"B o vk;ru dh x.kuk

vdlj vk;ru ekiu d s fy, cyukdkj cruk s dk mi;kx gksrk gSA bld s vykok ;g irk djuk gksrk g S fd fdlh /kkrq dh cyukdkj oLrq dk s cuku s e s fdruh /kkrq yxxh vFkok fdlh cyukdkj fMCcs ij jax dju s e s fdruk jax [kpZ gksxk vFkok fdruk dkxt bl ij yxkuk gksxk\ bl lcd s fy, ge csyu d s oØi"B o vk;ru dh x.kuk djuh gksxhA vkb,]n[ks ;g x.kuk d Sl s djr s gSA

mnkgj.k&3- ,d ycoÙkh; csyu d s vk/kkj dh ifjf/k 44 lseh- g] ;fn csyu dh Åapkbz 10 lseh- g s rk s csyu dk oØi"B vkSj vk;ru Kkr dhft,A

gy& eku yhft, fd csyu d s vk/kkj dh f=T;k r lseh- vkSj Åapkbz h lseh- gSA

fn;k g S csyu dh Åapkbz h ¾ 10 lseh-

csyu d s vk/kkj dh ifjf/k $2\pi r$ ¾ 44 lseh-

$$r = \frac{44}{2\pi}$$

$$r = \frac{44}{2} \times \frac{7}{22}$$

$$r = 7 \quad \text{lseh-}$$

cyu dk oØ i"B $= 2\pi rh$

¾ $2\times\frac{22}{7}\times7\times10$

cyu dk oØ i"B ¾ 440 ox l eh-

cyu dk vk;ru $= \pi r^2 h$

¾ $\frac{22}{7}\times7\times7\times10$

cyu dk vk;ru ¾ 1540 ?ku l eh-

mnkgj.k&4- nk cjkcj Åpkb oky ycoÙkh; cyuk d vk/kkj dh f=T;k 3 % 4 d vuikr e gA bud vk;ruk dk vuikr Kkr dhft,

gy& eku yhft, fd nkuk cyuk dh f=T;k,] Øe'k% r_1 vkj r_2 rFkk Åpkb h gA ¼D;k½ pfd cyu d vk/kkj dh f=T;k,] Øe'k% 3 % 4 d vuikr e g

$$\therefore \frac{r_1}{r_2} = \frac{3}{4}$$

;k $r_1 = 3r, r_2 = 4r$ ¼D;k \½

vr% igy cyu dk vk;ru $= \pi r_1^2 h$

rFkk nl j cyu dk vk;ru $= \pi r_2^2 h$

$\therefore$ nkuk cyuk dk vk;ru dk vuikr $\frac{\pi r_1^2 h}{\pi r_2^2 h} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$

$$\frac{\pi r_1^2 h}{\pi r_2^2 h} = \frac{(3r)^2}{(4r)^2}$$

$$= \frac{9r^2}{16r^2}$$

$$= \frac{9}{16}$$

mnkgj.k&5- vk;'kk dk foKku iktDV d vrxr cyukdkj cg:in'kd (kaleido-scope) dk oØ i"B cuku d fy, fdru {k=Qy d pkV iij (Chart paper) dh vko';drk gkxh] ;fn ml dh f=T;k 2-1 l eh- vkj yckb 20 l eh- gkA

gy& fn;k g

cyukdkj cg:in'kd dh f=T;k $r = 2.1$ lseh-

cg:in'kd dh yackbZ $h = 20$ lseh-

vko';d pkV iij dk {ks=Qy ¾ cg:in'kd d oØi"B dk {ks=Qy

$$= 2\pi rh$$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 2.1 \times 20$$

$$= 264$$ ox lseh-

iz'ukoyh 2

1- ,d cyu d vk/kkj dh f=T;k 14 lseh- vkSj Åpkbz 10 lseh- gSA cyu d oØi"B rFkk lai.kZ i"B dk {ks=Qy Kkr dhft,A

2- ,d cyu d oØi"B dk {ks=Qy 3696 ox lseh- gSA ;fn cyu d vk/kkj dh f=T;k 14 lseh- gks rks cyu dh Åpkbz Kkr dhft,A

3- 14 lseh- Åpkbz okys cyu d oØi"B dk {ks=Qy 88 ox lseh- gSA cyu d vk/kkj dk O;kl Kkr dhft,A

4- ,d cyukdkj LrEHk dk O;kl 50 lseh- vkSj Åpkb 3-5 eh- gSA cyu d oØi"B dh jxkbZ dk ykxr eY; Kkr dhft, ;fn nj 12-50 :- izfr ox ehVj gSA

5- ,d jksyj dk O;kl 84 lseh- vkSj yackbZ 120 lseh- gSA iw.kZ enku dk ,d ckj pyu e jksyj 500 pDdj yxkrk gS rks enku dk {ks=Qy Kkr dhft,A

6- cyu dk vk;ru Kkr dhft, ftldh f=T;k 3 lseh- vkSj Åpkbz 14 lseh- gSA

7- ,d cyu d vk/kkj dk {ks=Qy 154 ox lseh- vkSj Åpkb 10 lseh- gSA cyu dk vk;ru Kkr dhft,A

8 ,d cyu d vk/kkj dh ifjf/k 88 lseh- vkSj Åpkb 10 lseh- gSA cyu dk vk;ru Kkr dhft,A

9- ,d cyu dk vk;ru 3080 ?ku lseh- vkSj Åpkb 20 lseh- gSA cyu dh f=T;k Kkr dhft,A

10- ,d 35 lseh- Åpkbz okys tkj (Vessel) e 11 yhVj tyl vkrk gSA tkj dk O;kl Kkr dhft,A ¼1 yhVj¾ 1000 ?ku lseh-½

11- ,d iry cyukdkj Vhu e 1 yhVj iV vkrk gSA ;fn Vhu dk O;kl 14 lseh- gks rks Vhu dh Åpkb D;k gksxh\ ¼yhVj¾ 1000?ku lseh-½

12- ,d vLirky e gj ejht dk ifrfnu 7 lseh- O;kl okys cyukdkj cru e lwi fn;k tkrk gSA ;fn cyukdkj cru e lwi 4 lseh- dh Åpkb rd Hkjk tkrk gks rks vLirky e ifrfnu 50 ejhtk d fy, fdruh ek=k e lwi cuk;k tkrk g\

13- ,d rkc d NM dk 0;kl 1 eh- vkj yckb 8 eh- g ftl fi?kykdj 18 ehVj iryk rkj [khpk x;k g rkj dh ekVkb Kkr dhft,A

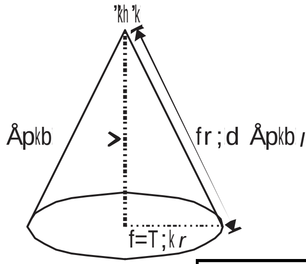
14- 7 eh- 0;kl dk ,d dvk 20 eh- xgjk [kknk x;k vkj mlls fudyh feÍh l 22 eh- ×14 eh- dk ,d lyVQke cuk;k x;k gA bl lyVQke dh Åpkb Kkr dhft,A

15- ,d ?kukHk ftldh Hkktk,¡ 5-5 leh-]10 leh- vkj 3-5 leh- g dk fi?kykdj 1-75 leh- 0;kl rFkk 2 leh- ekVkb d fdru flDd cuk; tk ldr g\

16- cyu dk vk;ru vkj oØi"B dk {k=Qy Øe'k% 24750 ?ku leh- vkj 3300 ox leh- gA cyu d vk/kkj dh f=T;k vkj mldh Åpkb Kkr dhft,A

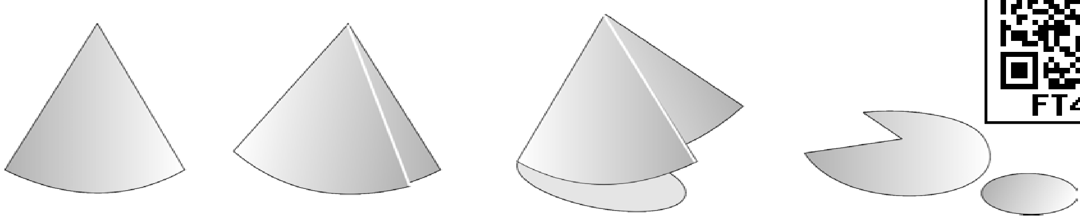
'kd (cone)

'kd ,d ,lh f=foeh; vkdfr g] ftle ,d oÙkh; vk/kkj vkj ,d 'kh"k gkrk gA ;g nk j[kk[k.Mk l tM g, gkr gA 'kh"k l vkèkkj dh ifjf/k dk tkMu okyk j[kk[k.M] 'kd dh fr;d Åpkb ¼l½ gkrk gA 'kd d 'kh"k l 'kd d vk/kkj d dUn dk feykus okyk j[kk[k.M] vxj 'kd d vk/kkj ij yc gk] rk mls yc oÙkh; 'kd dgr gA



vkdfr & 23

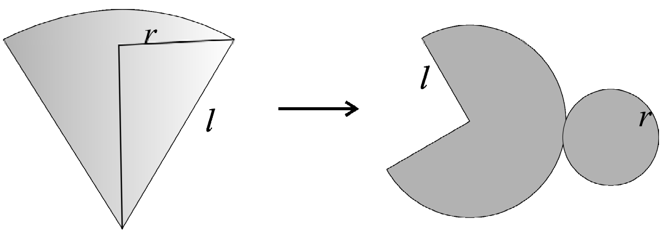
FT49TJ



vkdfr & 24

1- 'kd dk i"Bh; tky

uhp dh 'kkdo dh vkdfr;k dk nf[k,A ;fn ge 'kd dk mldh fr;d Åpkb ,o mld vk/kkj d fdukj l dkVdj [kky rk og nh xb vkdfr;k d leku fn[kkb nxkA



vkdfr & 25

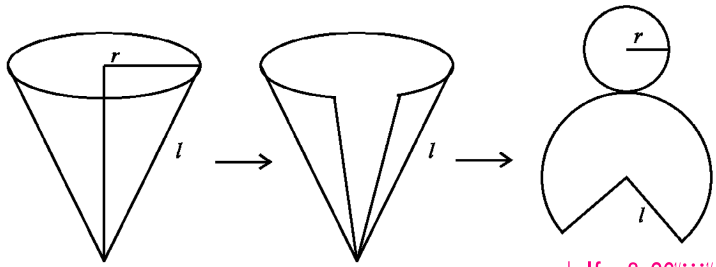
'kd d i"Bh; tky e l bdkb f=T;k okyk oÙk d f=T;k[kM ,o r bdkb f=T;k okyk oÙk lfEefyr gA

2- 'kadq dk i"Bh; {ks=Qy

;fn 'kadq d vk/kkj dh f=T;k r bdkb rFkk mldh fr;d Åpkb l bdkb gks rks i"Bh; {ks=Qy Kkr djus d fy, ge oØ i"B dk {ks=Qy rFkk vk/kkj dk {ks=Qy Kkr djuk gkxkA

geus ppk dh gS fd ;fn ge 'kadq dks dkVdj [kksyrs gSa rks ge oØ i"B ikIr gkrs gSA

'kadq d oØ i"B dk {ks=Qy Kkr djus d fy, ge oÙkh; f=T;k[kaM dk {ks=Qy



vkdfr & 26¼i½ vkdfr & 26¼ii½ vkdfr & 26¼iii½

ikIr djuk gkxkA

'kadq d ik'o i"B dk {ks=Qy ¾ l bdkb f=T;k oky oÙkh; f=T;k[kaM dk {ks=Qy

¾ $\frac{1}{2}(2\pi r)l$

¾ $\pi r l$ oxZ bdkb

'kadq d vk/kkj dk {ks=Qy ¾ r f=T;k oky oÙk dk {ks=Qy

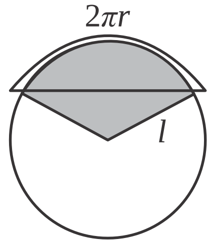
¾ πr^2 oxZ bdkb

vr% 'kadq dk lEi.kZ i"B ¾ 'kadq d ik'o i"B dk {ks=Qy $ 'kadq d vk/kkj dk {ks=Qy

¾ $\pi r l$ $ πr^2

¾ $\pi r(r+l)$

vr% 'kadq d lai.kZ i"B ftld vk/kkj dh f=T;k r bdkb ,oa fr;d Åpkb l bdkb gks $\pi r(r+l)$ gSA



ukV %&

Åij d 'kd dk oÙkkdkj vk/kkj dh ifjf/k $2\pi r$ gA ;g ,d ,l oÙk dk f=T;k[kM g ft ldh f=T;k l gA ge tkur g fd Nk;kfdr f=T;k[kM d {k=Qy rFkk oÙk d {k=Qy dk vuikr] f=T;k[kM d pki dh yckb rFkk oÙk dh ifjf/k d vuikr d cjkcj gkrk gA

vFkkr

$$\frac{\text{oÙk d f=T;k[kM dk {k=Qy}}}{\text{oÙk dk {k=Qy}}}=\frac{\text{f=T;k[kM d pki dh yckb}}{\text{oÙk dh ifjf/k}}$$

$$\frac{\text{oÙk d f=T;k[kM dk {k=Qy}}}{\pi l^2}=\frac{\text{f=T;k[kM d pki dh yckb}}{2\pi l}$$

$$\text{oÙk d f=T;k[kM dk {k=Qy}}=\frac{\text{f=T;k[kM d pki dh yckb}\times\pi l^2}{2\pi l}$$

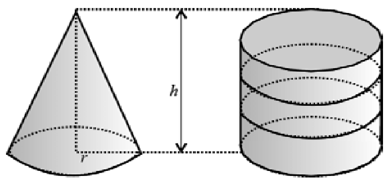
$$\text{oÙk d f=T;k[kM dk {k=Qy}}=\frac{\text{f=T;k[kM d pki dh yckb}\times l}{2}$$

$$\text{oÙk d f=T;k[kM dk {k=Qy}}=\frac{2\pi r\times l}{2}$$

$$\text{oÙk d f=T;k[kM dk {k=Qy}}=\pi rl$$

tgk $2\pi r$ oÙk d f=T;k[kM d pki dh yckb g rFkk l oÙk dh f=T;k gA

3- 'kd dk vk;ru

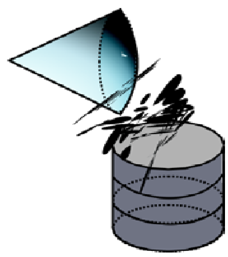


vkdfr & 28

'kd ,o cyu d vk;ru d chp lc/k dk le>u d fy; vkb, ,d fØ;kdyki djA leku vk/kkj ,o Lkeku Åpkb okyk ,d 'kd ,o ,d cyu cukb,A

'kd dk ckjhd jr l Hkfj, vkj fQj mlh jr dk cyu e Mky nhft,A D;k cyu jr l Hkj x;k\

cyu dk jr l Hkju d fy; vkidk ;g ifØ;k fdruh ckj nkgjkuh iMxh\



vkdfr & 29

cyu dk ijk Hkju d fy; ge ;g ifØ;k rhu ckj nkgjkuh iMrh g A bl idkj 'kd o cyu d vk/kkj dk {k=Qy ,o Åpkb leku gku dh fLFkfr e cyu dk vk;ru 'kd d vk;ru dk rhu xuk gkrk gA

vr% 3×'kd dk vk;ru ¾cyu dk vk;ru

'kd dk vk;ru ¾ $\frac{1}{3}$ ¼cyu dk vk;ru½ ¾ $\frac{1}{3}$ ¼vk/kkj dk {k=Qy×Åpkb½

D;kfd cyu dk vk;ru vk/kkj ¼oÙk½ dk {k=Qy ,o Åpkb dk x.kuQy gkrk gA vr% 'kdq dk vk;ru $=\frac{1}{3}\times A\times h$ tgk¡ A vk/kkj dk {ks=Qy gS vkSj h cyu dh Å¡pkbZ gSA

vk/kkj dk {ks=Qy $A=\pi r^2$

vr% 'kdq dk vk;ru ¾ $\frac{1}{3}\times\pi r^2 h$?ku bdkbZ

cyu dk vk;ru ftlds vk/kkj dh f=T;k r rFkk Å¡pkbZ h gks $\pi r^2 h$ gksrh gSA vFkkZr~ 'kdq dk vk;ru] cyu ds vk;ru dk ,d frgkbZ gksrk gS ftuds vk/kkj dh f=T;k,¡ ,oa Å¡pkbZ leku gksrh gSA

mnkgj.k&6- ,d 'kdq dk O;kl 12 lseh- vkSj Å¡pkbZ 8 lseh- gSA 'kdq dk oØi"B vkSj vk;ru Kkr dhft,A

gy& ekuk 'kdq dh f=T;k r lseh-] Å¡pkbZ h lseh- vkSj fr;Zd Å¡pkbZ l lseh- gSA

fn;k gS 'kdq dh Å¡pkbZ h ¾8 lseh-

'kdq dk O;kl $2r$ ¾12 lseh-

'kdq dk f=T;k r ¾6 lseh-

'kdq dh fr;Zd Å¡pkbZ $l=\sqrt{h^2+r^2}$

$$=\sqrt{8^2+6^2}=\sqrt{64+36}$$

¾ $\sqrt{100}=10$ lseh-

'kdq dk oØi"B ¾ πrl

¾ $\pi\times 6\times 10=60\pi$ oxZ lseh-

'kdq dk vk;ru ¾ $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

$$=\frac{1}{3}\times\pi\times 6\times 6\times 8$$

$=96\pi$?ku lseh-

mnkgj.k&7- ,d 'kdq ds vk/kkj ds ry ea 65π oxZ ehVj dk iMk yxk gSA rEcw dh fr;Zd Å¡pkbZ 13 ehVj gS rks mldh Å¡pkbZ rFkk f=T;k Kkr dhft,A

gy& ekuk 'kdq dh f=T;k r eh-] Å¡pkbZ h eh- vkSj fr;Zd Å¡pkbZ l eh- gSA

fn;k gS 'kdq dh fr;Zd Å¡pkbZ l ¾ 13 ehVj

'kdq ds vkdkj ds rc es yxs diM+s dk {ks=Qy] 'kdq ds oØi"B ds {ks=Qy ds cjkcj gksxk ¼D;ksa½

'kdq ds oØi"B dk {ks=Qy $=65\pi$

$$\pi rl = 65\pi$$

$$r = \frac{65\pi}{\pi l}$$

$$r = \frac{65}{13}$$

$r = 5$ eh-

fr;d Åpkb l¾$\sqrt{h^2 + r^2}$

$$l^2 = h^2 + r^2$$

$$h^2 = l^2 - r^2$$

$$= (13)^2 - (5)^2$$

$$= 169 - 25$$

$$h^2 = 144$$

$h = 12$ eh-

'kd d vk/kkj d rc dh f=T;k 5 eh- vkj Åpkb 12 eh- gA

i'ukoyh 3

1- ,d yc oÙkh; 'kd d oØi"B dk {k=Qy Kkr dhft, ftldh fr;d Åpkb 10 leh- rFkk vk/kkj dh f=T;k 7 leh- gA

2- ;fn fdlh 'kd d oØi"B dk {k=Qy 77π ox leh- g rFkk mldk vk/kkj dk O;kl 14 l- eh- gk rc ml 'kd dh Åpkb Kkr dhft,A

3- ;fn 'kd dh fr;d Åpkb 21 leh- rFkk vk/kkj dk O;kl 14 leh- gk rk mld lli.k i"B dk {k=Qy Kkr dhft,A

4- ;fn ,d tkdj dh 'kDokdkj Vkih d vk/kkj dh f=T;k 7 leh- rFkk Åpkb 24 leh- gk rk ,lh 10 Vkih cuku d fy, yxu okyh 'khV dk {k=Qy Kkr dhft,A

5- ,d 'kDokdkj rc dh Åpkb 5 eh- rFkk vk/kkj dh f=T;k 12 eh- gk rk mldh fr;d Åpkb rFkk rc dk cuku e yxu oky frjiky¼duokl½ dk ykxr eY; Kkr dhft; ;fn mldk eY; 70 :- ifr ox ehVj gkA

6- ml 'kd dk vk;ru Kkr dhft; ftld vk/kkj dk {k=Qy 300 ox leh- rFkk Åpkb 15 leh- gkA

7- 'kd dh Åpkb Kkr dhft, ;fn mldk vk;ru 550 ?ku leh- rFkk mldk O;kl 10 leh- gkA

8- fdlh 'kDokdkj di d vk/kkj dh ifjf/k 22 leh- rFkk Åpkb 6 leh- gk rk mle vf/kdre fdruk ikuh j[kk tk ldrk gA

9- ;fn ,d ehVj ych /kkr dh NM ¼tk cyukdkj g½ dh f=T;k 3-5 leh- g] dk fi?kykdj ,l fdru 'kd cuk; tk ldr g ftldh f=T;k 1 leh- vkj Åpkb 2-1 leh- gkA

10- ,d ledk.k f=Hkt ftldh Hktk,; 21 leh-] 28 leh- rFkk 35 leh- g ;fn ml 28 leh- oky Hktk dk v{k ekudj ?kek;k tk; rk cuu okyh vkdfr dk uke rFkk mldk vk;ru Kkr dhft;A

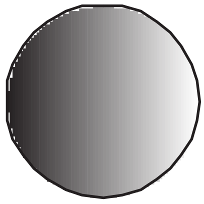
11- ;fn ,d 'kd o ,d cyu d vk/kkj dh f=T;k rFkk Åpkb leku gk rk mud vk;ruk dk vuikr Kkr dhft;A •

xkyk (Sphere)

,d oÙk dk 0;kl d ifjr% ?keku ij tk vkdfr ikIr gkrh g ml xkyk dgr gA

xkyk ,d ,lh Bkl vkdfr g ftl ij fLFkr gj fcn ml d dUn l ,d fuf'pr njh ij fLFkr gkrk gA

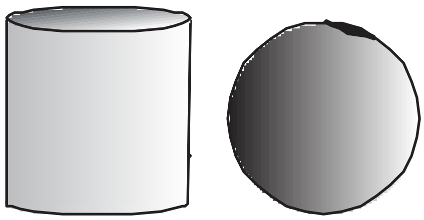
xky dk i"Bh; {k=Qy



vkdfr & 31

xfrfof/k&1

ge irk g fd i"Bh; {k=Qy fdlh Hkh Bkl ¼oLr½ vkdfr d ckgjh vkoj.k dk crkrh gA ge cyu vkj xky d i"Bh; {k=Qy dh ryuk dj ldr gA



vkdfr & 32

,d cyu vkj xkyk y ftle fd cyu d vkèkkj dh f=T;k vkj xky dh f=T;k leku gk vkj cyu dh Åpkb xky dh f=T;k dh nxuh gk lkFk gh ,d jLlh Hkh yA

cyu dh vk/kh Åpkb ij fpà yxkb, vkj cyu d ry vFkok 'kh"k l e/; fpà rd jLlh l cyu dk yiVA vc bl jLlh dk dkV vkj bl xky ij yiVA

vki ik,x fd bl jLlh d }kjk xky dk vk/kk Hkkx <d tk,xkA

vr% bl xfrfof/k l ge ;g dg ldr g fd cyu d oØi"B dk {k=Qy xky d i"Bh; {k=Qy d leku g tc cyu d vk/kkj dh f=T;k vkj xky dh f=T;k cjkcj gk vkj cyu dh Åpkb xky d 0;kl d cjkcj gkA

vr% ge dg ldr g fd]

xky dk i"Bh; {k=Qy ¾ cyu d oØ i"B dk {k=Qy

¾ $2\pi r h$

¾ $2\pi r(2r)$

¾ $4\pi r^2$ ox bdkb

bl fy, xksy dk i"Bh; {k=Qy ¾ $4\pi r^2$ ox bdkb] tgk¡ r xksy dh f=T;k gA

xfrfof/k & 2

,d Mksjh yhft, vkSj mls xn ij ijh rjg yiV nhft, ¼chp esa dkbZ Hkh txg NksM+us u ik,½ vkSj u gh Mksjh ,d&nwljs ds Åij gksA ¼vkdfr 33 nf[k,A½ vxj ge bl Mksjh ls oÙk cuk, ftldh f=T;k xsy dh f=T;k ds cjkcj gks] rks vki ik,xs fd ge ,sls 4 oÙk cuk ik jgs gS ¼vkdfr 34½ ftldk {k=Qy πr^2 gksxkA

vkdfr & 33

vr% xksy dk i"Bh; {k=Qy $= 4 \times$ oÙk dk {k=Qy

$= 4\pi r^2$

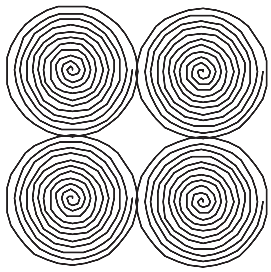
bl fy, xksy dk i"Bh; {k=Qy $= 4\pi r^2$ ox bdkb] tgk¡ r xksy dh f=T;k gA

rc ,d v)xksy dk i"Bh; {k=Qy fuEufyf[kr rjhds ls ikIr fd;k tk ldrk g A

v)xksy ds oØi"B dk {k=Qy $= \frac{1}{2} \times$ ¼xksy dk i"Bh; {k=Qy½

$= \frac{1}{2}\left(4\pi r^2\right)$

$= 2\pi r^2$



vkdfr & 34

v)xksy ds lEiw.kZ i"B dk {k=Qy $= 2\pi r^2 + \pi r^2$

$= 3\pi r^2$ ox bdkb

vr%

xksy dk i"Bh; {k=Qy	$= 4\pi r^2$ ox bdkb
v)xksy ds oØi"B dk {k=Qy	$= 2\pi r^2$ ox bdkb
v)xksy ds lEiw.kZ i"B dk {k=Qy	$= 3\pi r^2$ ox bdkb

xksy dk vk;ru

xksy dk vk;ru mldh f=T;k ds ?ku ds lekuqikrh gksrk gA tSl&tSl f=T;k c<rh g vk;ru rth ls c<rk gA vk;ru dk eku $\frac{4}{3}\pi r^3$ }kjk fn;k tkrk gA

mnkgj.k&8- fdlh ykg d xky dh f=T;k 7 lseh- g] rks mlds oØi"B dk {ks=Qy rFkk vk;ru Kkr dhft,A

gy& fn;k g xky dh f=T;k r ¾ 7 lseh-

xky d oØi"B dk {ks=Qy ¾ $4\pi r^2$

$$¾\ 4\times\frac{22}{7}\times(7)^2$$

$$=4\times\frac{22}{7}\times7\times7$$

$=616$ ox lseh-

xky dk vk;ru ¾ $\frac{4}{3}\pi r^3$

$$=\frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times(7)^3$$

$$=\frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times7\times7\times7$$

$=1437.33$?ku lseh-

mnkgj.k&9- 14 lseh- 0;kl okys v)xksy dk lEi.kZ i"Bh; {ks=Qy Kkr dhft, A

gy& eku yhft, v)xksy dh f=T;k r lseh- gSA

fn;k g v)xksy dk 0;kl ¾ 14 lseh-

∴ $2r$ ¾ 14 lseh-

;k r ¾ 7 lseh-

∵ v)xksy dk lEi.kZ i"B dk {ks=Qy ¾ $3\pi r^2$

$$¾\ 3\times\frac{22}{7}\times(7)^2$$

¾ 462 ox lseh-

mnkgj.k&10- 2 l- eh- f=T;k okyh 64 xkfy;ksa dks fi?kykdj ,d cMk xksyk cuk;k x;kA cM xksy dh f=T;k Kkr dhft,A

gy& eku yhft, NksV xksy dh f=T;k r l- eh- gSA

fn;k g r ¾ 2 lseh-

iR;sd NksV xksy dk vk;ru ¾ $\frac{4}{3}\pi r^3$ ¾ $\frac{4}{3}\pi(2)^3$ ¾ $\frac{32}{3}\pi$?ku lseh-

∵ 64 NkV xky dk vk;ru ¾ $64\times\frac{32}{3}\pi$

¾ $\frac{2048\pi}{3}$

bu 64 NkV xky dk fi/kykdj cMk xkyk cuk;k g] vr% cM xky dk vk;ru 64 NkV xky d vk;ru d cjkcj gkxkA eku yhft, cM xky dh f=T;k R leh- gA

cM xky dk vk;ru ¾ 64 NkV xky dk vk;ru

$\frac{4}{3}\pi R^3$ ¾ $\frac{2048\pi}{3}$

$$R^3=\frac{2048\pi\times 3}{3\times 4\pi}$$

$$R^3=512$$

R ¾ 8 leh-

blfy, cM xky dh f=T;k ¾ 8 leh-

mnkgj.k&11- /kkr d cu ,d xky dh f=T;k 3 lseh- gA ;fn /kkr dk ?kuRo 8 xke @ lseh^3 gk rk xky dk n0;eku Kkr dhft,A

gy% ge tkur g fd vk;ru vkj ?kuRo dk x.kuQy n0;eku d cjkcj gkrk gA blfy, ge igy xky dk vk;ru Kkr djxA

eku yhft, fd xky dh f=T;k r lseh- gA

r ¾ 3 lseh-

xky dk vk;ru ¾ $\frac{4}{3}\pi r^3$

$$=\frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times(3)^3$$

$$=\frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times 3\times 3\times 3$$

¾ 113-14 lseh-^{3}

pfd /kkr dk ?kuRo 8 xke@lseh-^{3} g vFkkr 1 lseh-^{3}/kkr dk n0;eku 8 xke g

∴ xky dk n0;eku ¾ vk;ru × ?kuRo

¾ 113-14 × 8

¾ 905-12 xke

¾ 0-9051 fdxk- ¼yxHkx½

i'ukoyh 4

1- ,d xksy dk i"Bh; {k=Qy Kkr dhft, ftldh f=T;k 21 lseh- gSA

2- ,d Xyksc dk O;kl 14 lseh- g] i"Bh; {k=Qy Kkr dhft,A

3- ,d xksy dk i"Bh; {k=Qy 154 oxZ lseh- g] xksy dk O;kl Kkr dhft,A

4- ,d xksy dk vk;ru Kkr dhft, ftldh f=T;k 3 lseh- gSA

5- 2 lseh- f=T;k okyh 21 xksfy;k¡ dks fi?kykdj cMk xksyk cuk;k tkrk gS blu;s xksys dk vk;ru Kkr dhft,A

6- ,d BksI xksys dk ftldh f=T;k 10-5 lseh- g] dks fi?kykdj dN NksVs 'kdq cuk, x;s ftuesa fd iR;sd fd f=T;k 3-5 lseh- vkSj Å¡pkbZ 3 lseh- gSA cuk, x, 'kdqvksa dh la[;k Kkr dhft,A

7- gok Hkjus ij xksykdkj xqCckjs dh f=T;k 7 lseh- ls c<dj 14 lseh- gks tkrh gSA nksuksa fLFkfr esa xqCckjs d i"Bh; {k=Qy dk vuqikr Kkr dhft,A

8- ,d xksys dk vk;ru Kkr dhft, ftldk i"Bh; {k=Qy 154 oxZ lseh- gSA

9- nks xksyksa d vk;ruksa dk vuqikr 64%27 gSA mud i"Bh; {k=Qyksa dk vuqikr Kkr dhft,A

10- ,d BksI xksys dh f=T;k 12 lseh- gSA blls 6 lseh- f=T;k d fdrus xksys cu ldrs gSA

11- ;fn fdlh xksys dk vk;ru vkSj i"Bh; {k=Qy cjkcj gksrk mldh f=T;k Kkr dhft,A

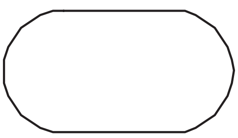
12- feV~Vh dk ,d 'kdq ftldh Å¡pkbZ 24 lseh- vkSj vk/kkj dh f=T;k 6 lseh- g tks ,d cPps xksys esa ifjofrZr djrk gSA bl xksys dh f=T;k Kkr dhft,A

13- yksg d rhu xksfy;k dks ftudh f=T;k,¡ 6 lseh-] 8 lseh- vkSj 10 lseh- g dks fi?kykdj ,d cMk BksI xksyk cuk;k tkrk gSA cuk, x, u;s xksys dh f=T;k Kkr dhft,A

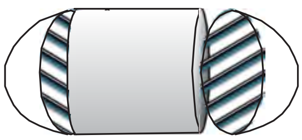
l;kstr Bksl ksa dk i"Bh; {k=Qy vkSj vk;ru

(Surface area and volume of a combination of solids)

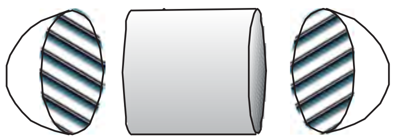
gekjs nfud thou esa vud l;kstr BksI fn[kkbZ nrs g tSls ,d dSIwy tks ,d cyu vkSj nks v)Zxksyk dk l;kstu g] ;s v)Zxksy cyu d Nksjksa esa yxs gksrs gSA blh idkj



vkdfr&35



vkdfr&36



vkdfr&37

f[kykuk ftldk vk/kkj v)xkyk rFkk mldk Åij 'kd gkrk gA blfy, l;kftr Bkl k d i"Bh; {k=Qy ,o vk;ru dh x.kuk dh vko';drk gkrh gA

vkb, vkdfr 35 e fn[kk, x, ik=¼container½ ij fopkj dhft,A ge bl ik= dk cuku d fy, vko';d ykg dh pknj dk {k=Qy vkj vk;ru Kkr djuk g ijr ik= ,lh vkdfr dk ugh g ftld fy, geu ;g x.kuk dj yh gA ;fn dkb BkI vkdfr 36 e fn[kk, vkdkj dk gk rk fQj ge D;k dj\

,lh fLFkfr;k e ge vkdfr dk ,l NkV&NkV Hkkxk e ckV yr g ftudk vk;ru o {k=Qy vkfn fudky ldr g vkj leL;k dk gy ikIr dj ldr gA ge n[k ldr g fd ;g dIly ,d BkI cyu d Nkjk ij v)xkyk dk tkM dj cuk;k x;k gA ;fn ge ik= dk dkVr g rk ;g vkdfr 36]37 d vulkj fn[kxhA

vr% ik= dk cuku d fy, vko';d ykg dh pknj dk {k=Qy $=$ igy v)xky d oØi"B dk {k=Qy $+$ cyu d oØi"B dk {k=Qy $+$ nlj v)xky d oØi"B dk {k=Qy

ik= dk vk;ru $=$ igy v)xky dk vk;ru $+$ cyu dk vk;ru $+$ nlj v)xky dk vk;ru

mnkgj.k%&12- ykg dk ,d cru ftl [kk[ky v)xky d Åij] [kk[kyk cyu tkMdj cuk;k x;k gA v)xky dk 0;kl 14 leh- vkj cru dh dy Åpkb 13 leh- gA cru dk cuku d vko';d ykg dh pknj dk {k=Qy rFkk cru e /kkfjr rjy dk vk;ru Kkr dhft,A ¼ykg dh pknj dh ekVkb ux.; gA½

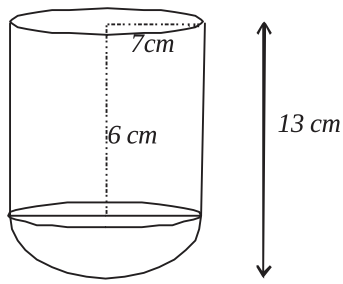
gy%& v)xky dk 0;kl $=$ 14 leh-

$\therefore$ v)xky dh f=T;k $=$ 7 leh-

cyukdkj Hkkx dh Åpkb $=$ 13&7

$=$ 6 leh-

cyukdkj Hkkx d oØi"B dk {k=Qy $= 2\pi rh$



vkdfr & 38

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 6$$

$= 264$ ox leh-

v)xky dk {k=Qy $= 2\pi r^2$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7$$

$=$ 308 ox leh-

blfy, cru dk cuku d fy, vko';d

ykg dh pknj dk {k=Qy $=$ cyu d oØi"B dk {k=Qy $+$ v)xky dk {k=Qy

$= 264$ ox lseh-$+ 308$ ox lseh-

$= 572$ ox lseh-

cyukdkj Hkkx dk vk;ru $= \pi r^2 h$

$= \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 6$

$= 924$?ku lseh-

vkj] v)xksys dk vk;ru $= \frac{2}{3}\pi r^3$

$= \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 7$

$= 718.6$?ku lseh-

vr% crZu esa /kkfjr ikuh dh ek=k $=$ cyu dk vk;ru $+$ v)xksys dk vk;ru

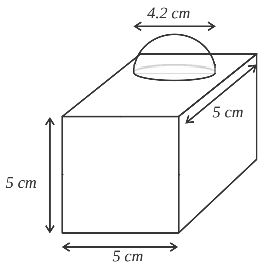
$= 924$?ku lseh-$+ 718.6$?ku lseh-

$= 1642.6$?ku lseh-

FTM1HU

iz'ukoyh 5

1- nh xbZ vkdfr ¼vkdfr 39½ nkoku Bksl] ,d ?ku rFkk ,d v)Zxksys ls cuh gS vkdfr esa vk/kkj ,d ?ku gS ftldh dksj 5 lseh- rFkk ,d v)Zxksyk gS tks Åij yxk gS blxdk O;kl 4-2 lseh- gks rks nh xbZ vkdfr dk lEiw.kZ i"B dk {ks=Qy Kkr dhft,A ¼$\pi = 22/7$½



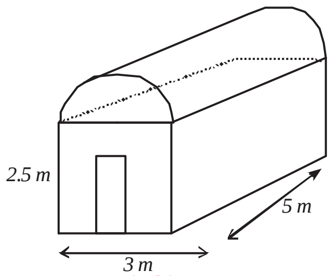
vkdfr&39

2- ,d f[kykSuk tks fd 'kadq dh vkdfr dk gS] dh f=T;k 5 lseh- gS og ,d lekU f=T;k d v)Zxksys d Åij yxk gS f[kykSus dh dy Åapkbz 17 lseh- gS mlds f[kykSus dk lEiw.kZ i"B dk {ks=Qy Kkr dhft,A

3- v)Zxksys ij 'kadq d vkdkj dk ,d Bksl fLFkr gS bu nksuks dh f=T;k,¡ 1 lseh- d cjkcj gS 'kadq dh Åapkbz] mldh f=T;k d cjkcj gS Bksl dk vk;ru π d :i esa Kkr dhft,A

4- xksykdkj 'kh'ks d ,d crZu dh cyukdkj xnZu 4 lseh- yach ,o 2 lseh- O;kl okyh gS xksykdkj Hkkx dk O;kl 6 lseh- gS rks mlesa Hkjs gq, ikuh dh ek=k Kkr dhft,A

5- vkdfr&40 e fn[kk, gfjr xg¼xhu gkml½ d Åijh fl j d nkuk Hkkx v)oÙkkdkj g]bUg bl xhu gkÅl dk diM l <ddj cuk;k x;k gA bl e 1-2 eh-×0-5 eh- lkbt dk ,d ydMh dk njokt k gA gfjr xg dk i.k :i l <du e yxu oky dy diM dk {k=Qy Kkr dhft ,A



vkdfr&40

geu lh[kk

1- fd lh f=foeh; vkdfr t l ?kukHk] cyu] 'kd vkfn dk i"Bh; tky le>uk o vkdkjk dk i"Bh; tky le>uk o cukukA
2- ?kukHk]?ku o vU; vkdkjk d ry]'kh"k]i"B o dkj igpkuuk o le>ukA
3- ?kukHk o ?ku d fofHkUu fod.kk dk igpkuuk]le>ukA
4- f=foeh; vkdfr;k t l cyu] 'kd] xkyk vkfn dk {k=Qy ,o vk;ru Kkr djukA
5- l ;kft r Bk lk dk i"Bh; {k=Qy vkj vk;ru Kkr djukA

mÙkjekyk&1

1- $2\sqrt{21}$ eh-   2- 36 leh-   3- 15 eh-

mÙkjekyk&2

1- 880 ox leh- ,o 2112 ox leh-	2- 42 leh-	3- 2 leh	4- 68-75#
5- 1584 oxehVj	6- 396 ?ku leh-	7- 1540 ?ku leh-	8- 6160 ?ku leh-
9- 7 leh-	10- 20 leh-	11- 6-49 leh-	12- 7700 ?ku leh-
13- 2@3	14- 2-5 ehVj	15- 40	16- 15 leh- ,o 35 leh-

mÙkjekyk&3

1- 220 ox leh-	2- $6\sqrt{2}$ leh-	3- 616 ox leh-	4- 5500 ox leh-
5- 34320 #-	6- 1500 ?ku leh-	7- 21 leh-	8- 77 ?ku leh-
9- 1750	10- 12936 ?ku leh-	11 1 % 3	

mÙkjekyk&4

1- 5544 ox l eh- 2- 196π ox l eh- 3- 7 l eh- 4- 36π ?ku l eh-

5- 224π ?ku l eh- 6- 126 7- 1 % 4 8- 179-66 ?ku l eh- 9- 16 % 9

10- 8 11- 3 bdkb 12- 6 l eh- 13- 12 ?ku l eh-

mÙkjekyk&5

1- 163-86 ox l eh- 2- 115π ox l eh- 3- 22000 #- 4- 40π ?ku l eh-

5- 70 ox ehVj ¼yxHkx½ 6- 62-9 ox l eh-

अध्याय

16

आँकड़ों का विश्लेषण

[ANALYZING DATA]

FTVHYH

ifjp; ¼Introduction½

ge ifrfnu ub ub lpukvk d lid e vkr g t l& bl lky pkoy d mRiknu e 8 ifr'kr of) gb] fiNy o"k fdl f[kykMh u lcl cgrj g,dh [kyh\ ;k fQj ekckby diuh 'A' u tuojh d eghu e fdru ekckby cp\ , lh vkj cgr lh egRoi.k tkudkfj;k idkf'kr gkrh g ftudh vko';drk ge iMrh jgrh gA t l& jyxkMh d vku&tku dk le;] Qy&lfCt;k d nke] iVky dk oreku eY;] vukt rFkk M;jh dk mRiknu] LVhy] dk;yk rFkk vU; mRiknuA bld vykok vkj Hkh cgr l vkdM gkr g] ftud vk/kkj ij egRoi.k fu.k; fy, tkr g rFkk Hkfo"; dh ;ktuk,¡ Hkh cukb tkrh gA

fdLe&fdLe dht kudkfj; k¡dSs<¡ws

D;k ge vHkh ;g crk ldr g fd vku oky nk fnuk dk rkieku dl k jgxk\ ;k bl o"k jkT; e fdruh ek=k e pkoy dk mRiknu gvk\ ;k fQj fiNy ikp o"kk e iVky d nkek e fdruh of) ;k deh gb\

bu lHkh d ckj e dN dg ikuk lHko g fdr lh/k lh/k ugh] bu lHkh lokyk d tokc [kkstu d fy, ge bul lcf/kr vkdMk dk v/;;u djuk gkxkA

v[kckjk vkj if=dkvk e fofHkUu vkdM t l&Qlyk d mRiknu] ekle lc/kh tkudkfj;k] [kyk dk fooj.k] [kk| oLrvk d nke vkfn idkf'kr gkr jgr gA

LokLF; vkj f'k{kk l lcf/kr vkdM Hkh ljdkj }kjk fofHkUu lLFkkvk d ek/;e l ,df=r fd, tkr g t l& dku l {k= e fdl chekjh dk Qyko vf/kd g] mll fdru ykx iHkkfor g\ bld vk/kkj ij ;g r; dju e enn feyrh g fd chekjh dh jkdFkke d fy, fdl rjg d brtke dh vko';drk gA vkt l 6&7 n'kd igy Hkkjr e ;g Hkh egRoi.k i'u Fkk fd bl lky n'k e vukt dk fdruk mRiknu gvk] fdru dh vko';drk g vkj vukt dh vkifr d fy,] fdruk vukt ckgj l exokuk iM ldrk gA vkdMk dk fofHkUu v[kckjk] i=&if=dkvk e idkf'kr djok;k tkrk g] ftl ls lcdk tkudkjh jg fd dku&lh ;ktuk fdl idkj d vkdMk dk vk/kkj cukdj ykx dh tk jgh g rFkk fdl idkj d vkdMk d vk/kkj ij fu.k; fy, tk jg gA

djd n[k

1- vkiu xf.kr d vfrfjfDr vU; fo"k;k t l& foKku] lkekftd v/;;u vkfn e Hkh vkdMk dk i;kx gkr g, n[kk gkxkA vkdMk d dN mnkgj.k nhft ,A

2- dN i=&if=dkvk rFkk v[kckjk dk voykdu dhft , rFkk bue Ni vkdMk dk bdëk dhft ,A ppk dhft , ;g fd l&fd l d ckj e g\

3- vkid Ldy d v,fQl e fd l rjg d vkdM miyC/k g\ irk dhft ,A

4] Ldy ifjlj e vkiu ukfVl ckM ij vkdM n[k gkxA dku&dku l vkdM n[k\

lkp vkj ppk dj

uhp fn, x, lokyk d tokc vki dgk&dgk l irk yxk ldr g\

¼1½ vkid fty e dku&lh chekjh dk Qyko vf/kd g\

¼2½ oreku o"k e vkid fty dh tul[;k fdruh g\

¼3½ oreku o"k e ljdkj }kjk cktkj e xg rFkk /kku dk U;ure eY; fdruk fu/kkfjr fd;k x;k g\

db vkj ljy loky Hkh

blh rjg l db ckr ge viu ckj e Hkh tkuuk pkgr g] t l D;k vki d{kk d lHkh fo|kfFk;k l rt nkM ldr g ;k fQj vkidh Åpkb d{kk d ckdh Nk=k l ryuk dju ij de g ;k vf/kd\ bl rjg d i'uk dk gy ge d l <<\

dN Nk=&Nk=k vki l rt nkMr g] dN /khjA dN vki l yc gkx] dN NkVA

vxj ,d d{kk e 50 fo|kFkh g vkj mle jkuh dh Åpkb 160 leh- g rFkk ckdh d fo|kfFk;k dh Åpkb bl idkj g ¼&

161	160	162	159	161	158	162	163
158	158	160	159	160	161	163	160
158	161	158	159	163	159	160	159
158	160	159	162	163	160	159	159
159	162	161	163	159	161	161	160
163	160	163	161	160	158	160	163
160	160						

D;k bu vkdMk dk n[kdj vki ;g crk ldr g fd jkuh dh Åpkb ckdh fo|kfFk;k dh Åpkb dh ryuk e dgk Bgjrh g\ gj cPp dh Åpkb d lkFk mldh Åpkb dh ryuk djuk ef'dy gA ;fn mijkDr vkdMk dk 0;ofLFkr :i l lxfgr dj fy;k tk, rk ryuk djuk vklku gk tk,xkA vr% vkdMk dk 0;ofLFkr dju d fy, ge ckjEckjrk lkj.kh cukr gA

fuEufyf[kr ckjEckjrk lkj.kh e bu vkdMk dk 0;ofLFkr fd;k x;k g%&

rkfydk&1

Åpkb ¼lseh-e½	158	159	160	161	162	163
fo|kfFk;k dh l[;k	7	10	13	8	4	8

bl ckjEckjrk lkj.kh dk n[kdj D;k&D;k fu"d"k fudky ldr g\

,d rk ;g fd lcl T;knk cPp 160 lseh- oky leg e gA ble 13 cPp gA 17 cPp mu legk e g ftudh Åpkb jkuh dh Åpkb l de gA lcl de Åpkb 158 lseh- g vkj ble 7 cPp gA

ge bl lkj.kh l vkj D;k&D;k fu"d"k fudky ldr g\ nkLrk l pPkk djo de l de 5 vkj fu"d"k fy[kA

blh rjg ge rt nkMu dh ckr dj rk ge n[kr g fd lHkh nkMu okyk dh xfr ,d cjkcj ugh gkrhA uhp fn, x, vkdMk e 50 ykxk d nkMu dh xfr fdeh-ifr ?kV e nh xb gA ;kuh ;g crk;k x;k g fd ,d ?kV e o fdru&fdru fdeh- nkMr gA

rkfydk&2

nkMu dh xfr ¼fdeh-ifr ?kVk½	15	11	9	5	6	4
Nk=k dh l[;k	5	6	7	8	9	10

;fn uQhlk d nkMu dh xfr 7 fdeh-@?kVk g rk mijkDr rkfydk dh lgk;rk l mldh xfr dk ryukRed v/;;u dj ldr gA ;g Hkh n[k ldr g fd fdru ykx mll rt nkMr g vkj fdru ykx mll /khj nkMr g\

djd n[k

1- uhp fn, x, loky if<, vkj crkb, fd mud tokc <<u d fy, ge fdl idkj d vkdM pkfg,\ pPkk djd ;g Hkh crkb, fd vkdM ge dgk l vkj dl feyx\

1- fiNy rhu o"kk e jk;ij e iVky
d nkek e D;k&D;k cnyko vk,\

2- bl lky n'k d dku l jkT; e lcl
de o"kk gb\

3- fiNy ikp o"kk e NÙkhlx< e eNyh
mRiknu e fdruh of) gb\

4- 2011 dh tux.kuk e fdl jkT;
dh tul[;k lcl vf/kd Fkh\

5- fiNy ikp o"kk e vkid xko@
'kgj dh tul[;k e D;k ifjoru vk,\

6- NÙkhlx< d fdl fty e Ldyk
dh l[;k lcl vf/kd g\

7- fiNy ikp o"kk e Hkkjr u gkdh e fdru
vrjk"Vh; ep [ky\

8- o"k 2010 l 2015 rd ij Hkkjr e pkoy
dk fdruk mRiknu gvk\

lkp ,o ppk dj

1- ;fn vkid Ldy e dy 1000 Nk= gk vkj ;fn vkidk viuh Åpkb dh ryuk lcl djuh gk rk ;g dl djx\

2- ;fn vki viu fty d Nk=k d lkFk viu nkMu dh xfr dh ryuk djuk pkg rk vkidk fdl idkj d vkdMk dh vko';drk gkxh\ ;g Hkh lkp fd vki mUg dl 0;ofLFkr djx\

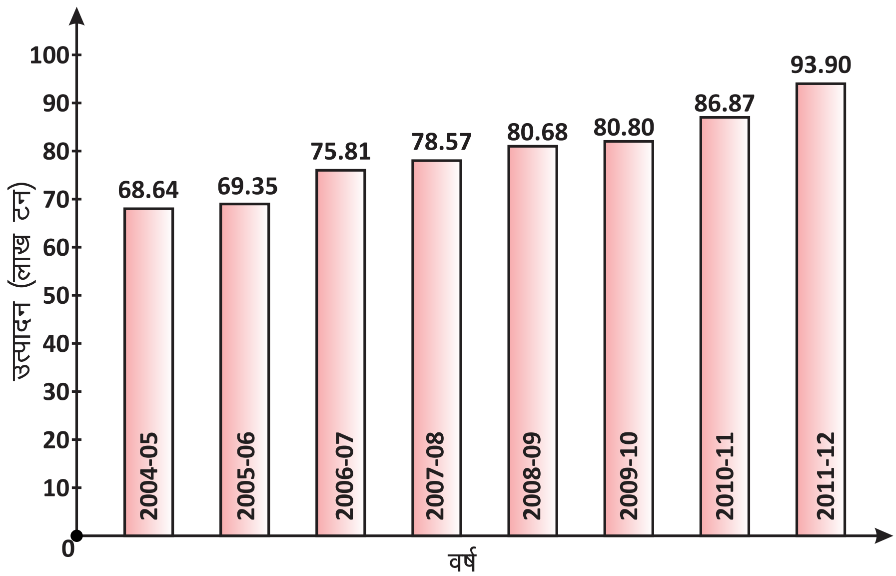
vkdMk dk fp=kRed fu:i.k

fiNyh d{kk e vkiu vkdMk dk lxg.k rFkk iLrhdj.k lh[kk gA lkFk gh ckjEckjrk lkj.kh rFkk vkdMk d vky[kh; fu:i.k dk Hkh le>k g] ft le vkiu vk;r fp=] vkofÙk cgHkt rFkk lp;h vkofÙk oØ vkfn cukuk lh[kkA bu fp=k d vk/kkj ij ge cgr&lh tkudkfj;k iklr djr g rFkk mul fu"d"k Hkh fudkyr gA vkb, dN blh rjg d vkdMk dk v/;;u djr g&

LrHk vky[k dk v/;;u

fdlh in'k e fofHkUu o"kk e g, xg d mRiknu dk fuEufyf[kr vky[k }kjk n'kk;k x;k g&

bl vky[k dk n[ku l xg mRiknu d ckj e dku&dku lh ckr Li"V fn[krh g\ vky[k dk i<dj fuEufyf[kr lokyk d tokc [kkstA



(i) 2007&08 e xg mRiknu fdru Vu Fkk\

(ii) fdl o"k e xg mRiknu lcl vf/kd gvk\

(iii) D;k ;g dgk tk ldrk g fd iR;d o"k xg mRiknu e of) gb g\

(iv) fdu nk o"kk d chp xg mRiknu e lcl vf/kd ifjoru gvk\

djd n[k

rkfydk dk v/;;u

o"k 1980 l 1989 rd ,d 'kgj e gb o"kk d ,df=r fd, x, vkdMk dk uhp dh rkfydk e n'kk;k x;k gA

o"k	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989
dy o"kk ¼bpe½	24-7	21-2	14-5	13-2	12-1	16-8	19-9	29-2	31-6	21-0

o"kk l lcf/kr bu vkdMk dk v/;;u dhft,] LrEHkky[k cukb, rFkk bud vk/kkj ij de l de ikp vyx&vyx rjg d fu"d"k fyf[k,A

ek/;] ekf/;dk] cgyd

vkiu vkdMk l cu LrEHk vky[k o vkofÙk oØ l dN lokyk d tokc << rFkk fu"d"k fudkyA D;k LrEHk vky[k dk n[kdj ;g crk ldr g fd 2005 l 2012 rd xg dk vk l r mRiknu ifro"k fdruk jgk\ D;k ge ;g crk ik,x fd vkdMk dk Øe e j[ku ij dku&lk o"k Bhd chp e vk;xk\ fQj nljh rkfydk l ;g tku ldr g fd bl 'kgj e vk l ru ,d o"k e fdruh ckfj'k gkrh g ;k ;g fd lkekU;r% fdruh ckfj'k gku dh mEehn dh tk ldrh gA LrEHk vky[k n[kdj ge vkdMk d Øe o mud :[k d ckj e ugh crk ldrA bl d vykok vk l r mRiknu fudkyu d fy, ge vdxf.krh; vk l r pkfg,A vkb,] ;kn dj ge ;g d l fudkyr g\

vdxf.krh; vk l r ;k lekrj ek/; (Arithmetic Mean)

vc ge 2005 l 2012 rd xg d vk l r mRiknu dh x.kuk dju d fy, iR;d o"k d xg d mRiknu ¼yk[k Vu e½ dk tkMx rFkk m l dy o"kk l Hkkx nxA vkb, n[k fd xg dk vk l r mRiknu fdruk jgk\

dy mRiknu ¾ 68-64 $ 69-35 $ 75-81 $ 78-57 $ 80-80 $80-80 $ 86-87 $ 93-90

¾ 634-74 yk[k Vu

2005 l 2012 rd dy o"k ¾ 8 Ok"k

vk l r mRiknu $= \dfrac{634.74}{8}$

¾ 79-34 yk[k Vu

;gk geu xg d vk l r mRiknu dh x.kuk dh gA vkdMk d vk l r dk lkf[;dh e lekrj ek/; dgr gA ;kuh tc vkdMk dk lekrj ek/; Kkr djuk gk rk vkdMk dk tkMdj dy vkdMk dh l[;k l Hkkx nr gA l= d :i e bl fuEufyf[kr <x l fy[kr g&

$$\text{lekrj ek/;} = \frac{\text{i{k.kk dk ;kx}}}{\text{i{k.kk dh dy l[;k}}}$$

;fn i{k.kk dk x fy[k rk i{k.kk dk ;kx Σx rFkk i{k.kk dh l[;k n gk rc

$$\text{lekrj ek/;} = \frac{\sum x}{n}$$

lekrj ek/; dk ik;% A.M.,M vFkok $\bar{x}$ l inf'kr fd;k tkrk gA

vlrr J.kh oky vkdM

vHkh rd geu tk mnkgj.k n[k o 0;fDrxr J.kh d vkdM Fk rFkk vkdMk dh l[;k de Fkh yfdu tc vkdMk dh l[;k cgr vf/kd gk rc lekrj ek/; dh x.kuk d l dj\

d{kk uoeh dh v)okf"kd ijh{kk e 35 fo|kfFk;k d xf.kr fo"k; d iklrkd fuEuku lkj g%&

30]	30]	38]	40]	42]	35]	40]	30]	45]	48]
40]	42]	38]	30]	38]	40]	35]	30]	42]	40]
42]	38]	35]	42]	40]	38]	42]	40]	48]	45]
38]	40]	30]	35]	35					

;gk U;ure iklrkd 30 rFkk vf/kdre iklrkd 48 gA ge n[k ik jg g fd iklrkd 30]35]38]40]42]45]48 rd lhfer g ftudh gh iujkofÙk gk jgh gA vr% bu vkdMk dk fuEufyf[kr rjhd l fy[kk tk ldrk gA

iklrkd¼x½	%	30	35	38	40	42	45	48
ckjEckjrk¼f½	%	6	5	6	8	6	2	2

tc vkdM bl idkj l fn, x, gk rc lekrj ek/; dh x.kuk dju d fy, vkdMk ¼i{k.kk½ rFkk mud lxr ckjEckjrkvk d x.kuQy d ;kx dk ckjEckjrkvk d ;kx l Hkkx dj nr gA

iklrkd(x)	ckjEckjrk(f)	iklrkd rFkk lxr ckjEckjrk dk x.kuQy(fx)
30	6	180
35	5	175
38	6	228
40	8	320
42	6	252
45	2	90
48	2	96
	$\sum f = 35$	$\sum fx = 1341$

$$\therefore \text{ lekrj ek/; } = \frac{\text{iklrkd o mud lxr ckjEckjrkvk d x.kuQy dk ;kx}}{\text{ckjEckjrkvk dk ;kx}}$$

$$\bar{X} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3 + f_4x_4 + f_5x_5 + f_6x_6 + f_7x_7}{f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + f_7}$$

$$= \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$$

$$= \frac{1341}{35}$$

$$\bar{X} = 38.31$$

d{kk uoeh dh v)okf"kd ijh{kk e fo|kfFk;k d xf.kr fo"k; dk vklr iklrkd 38-31 gA vc ge mu vkdMk d lekrj ek/; d ckj e ppk djx ftue vkdMk dh iujkofÙk rk gk jgh g ij vkdMk dh l[;k cgr vf/kd gA Rkc ge mu vkdMk dk leg e ckVdj lekrj ek/; dh x.kuk djr gA

vkb, bl ,d mnkgj.k l lh[k

mnkgj.k&1- ,d xko d ek/;fed fo|ky; e 100 fo|kFkh g] mu fo|kfFk;k d ?kj l fo|ky; dh nfj;k fdeh- e uhp nh xb gA bu vkdMk l vkSlr njh Kkr dhft,A

17	1	19	0	4	1	3	2	0	4
5	7	2	8	9	19	2	17	1	18
0	3	2	5	2	8	1	10	1	11
13	8	9	4	15	0	15	3	11	11
2	19	0	14	12	1	12	1	13	1
9	3	6	4	14	3	10	12	4	8
0	7	9	6	5	9	7	8	2	9
5	8	6	7	9	5	5	6	3	8
7	5	0	1	3	0	4	2	0	1
3	0	4	3	2	0	1	0	4	0

gy& fn, x, vkdMk e ge n[kr g fd db vkdM cgr ckj vk, g bue lcl NkVh l[;k 0 vkj lcl cMh 19 gA bu vkdMk dk ge legk e ckVuk gkxk ftlls x.kuk vklku gk tk,A

vkdMk dk 4 vrjky oky legk e ckVr gA tl 0 l 4 fdeh- rd dh njh l vku oky fo|kFk;k dh l[;k 42] 4 l 8 fdeh- rd dh njh l vku fo|kFk;k dh l[;k 24 g] bR;kfnA blh rjg ge 8&12] 12&16] 16&20 vrjky e Nk= dh l[;k irk djr g(

fo|kFk;k d ?kj l fo|ky; dh njh fdeh-e	fo|kFk;k dh l[;k (f)	e/;eku (x)	fx
0-4	42	2	84
4-8	24	6	144
8-12	19	10	190
12-16	9	14	126
16-20	6	18	108
	$\sum f_i = 100$		$\sum f_i x_i = 652$

Åij geu vrjkyk dk e/;eku vrjky dh nkuk lhekvk dk tkMdj 2 l Hkkx djd fudkyk gA vc ge e/;eku vkj fo|kFk;k dh l[;k d x.kuQy dk tkMdj fo|kfFk;k dh l[;k l Hkkxdj vkSlr irk dj ldr gA vkl r ¾ $\dfrac{\text{fo|kfFk;k dh l[;k o e/;eku d x.kuQy dk tkM}}{\text{fo|kfFk;k dh dy l[;k}}$

$$= \frac{84+144+190+126+108}{100}$$

$$= \frac{652}{100}$$

$= 6.52$ fdeh-

^vkl r* dk ge ,d ,lh l[;k d :i e n[k ldr g tk vkdMk d ij leg dk ,d x.k crkrh gA tkfgj g ;g lcl de eku l vf/kd rFkk lcl vf/kd eku l de gkrh g vkj bu vkdMk d chp e gh gkrh gA bl ^vdxf.krh; vkl r dgr gA

vdxf.krh; vkl r dh x.kuk

vkb,] bl dN vkj mnkgj.kk l le>r gA

uhp rkfydk e ikp o"kk d nky mRiknu lc/kh vkdM fn, x, g&

o"k	2007&08	2008&09	2009&10	2010&11	2011&12
nky dk mRiknu ¼yk[k Vu e½	14-8	14-6	14-7	18-2	17-2

bu vkdMk dk lekrj ek/; ;k vkl r Kkr djuk gA bl irk dju d fy,] lHkh i{k.kk dk tkM dj mlsa o"kk dh dy l[;k l Hkkx nuk gkxk] ;kuh

lekrj ek/; ¾ $\dfrac{14.8+14.6+14.7+18.2+17.2}{5}$ yk[k Vu

¾ $\dfrac{79.5}{5}$ ¾ 15-9 yk[k Vu

nky dk vkl r mRiknu 15-9 yk[k Vu gA rkfydk e inf'kr iR;d o"k dk mRiknu vkl r l vyx gA ijUr vkl r d i;kx l ge fiNy ikp lky d mRiknu dk fdlh ,d gh eku }kjk n'kk ldr gA

vkb,] vkl r dk ,d vkj mnkgj.k n[kr gA

mnkgj.k&2- /kerjh f t y e gb o"kk ¼fe-eh-½ d vkdM bl idkj gA bu vkdMk dk vkl r Kkr dhf t ,A

880-5] 1474-9] 806-3] 1554-9] 1019]2] 1046-5] 1017-2

gy%& vki tkur g fd

$$\text{ek/;} = \frac{\text{i\{k.kk dk tkM}}{\text{i\{k.kk dh l[;k}}$$

$$\text{bl idkj] vkl r} = \frac{880.5+1474.9+806.3+1554.9+1019.2+1046.5+1017.2}{7}$$

$$= \frac{7799.5}{7} = 1114\text{-}21 \text{ feeh-}$$

vr% o"kk dk vdxf.krh; vkl r 1114-21 feeh- gA

vkl r dk 0;ogkj e mi;kx

D;k vki crk ldr g fd yMfd;k dk lkekU; r% ?kj e [kyu dk fdruk le; feyrk g\ ge tkur g fd jkt [kyu dk le; fuf'pr ugh gkrk] fd lh fnu dkb ?kVk rd [kyrk g vkj fdlh fnu cgr de ;k fQj fcYdy ughA

bldk eryc g fd ,d fnu d vk/kkj ij vki ugh crk ldr fd yMfd;k ifrfnu fdru le; rd [kyrh gA vxj vki iR;d yMdh d gj jkTk [kyu d le; d ckj e vkdM ,df=r djx rk vkid ikl cgr lkj vkdM gk tk;xA bUg 0;ofLFkr djuk vklku ugh gkxkA bl leL;k dk gy dju d fy, ge ,d eghu d vkdM ydj mud ifrfnu [kyu dk vkl r le; irk dj ldr gA rkfydk&3 n[kA ;gk ge 50 yMfd;k d [kyu dk le; fn;k x;k gA D;k vki crk ldr g fd vf/kdrj yMfd;k fdru le; rd [kyrh g\

rkfydk&3 e vki n[k ldr g fd vf/kdrj yMfd;k dk [kyu d fy, vkl ru 2 ?kV l de dk le; feyrk gA lcl T;knk ;kuh 12 yMfd;k vkl ru 2 ?kV [kyrh g fdUr lHkh yMfd;k d ifrfnu [kyu dk vkl r le; 2 ?kV ugh gA ;gk vdxf.krh; vkl r fudkyu d fy, lHkh 50 yMfd;k }kjk vkl ru [kyu e ifrfnu fcrk, tku oky dy ?kV irk dju gkxkA

rkfydk&3

ifrfnu [kyu dk vklr le; ¼?kV e½	yMfd;k dh l[;k	50 yMfd;k d [kyu dk dy le;
x_i	f_i	$x_i f_i$
0	4	0
$\frac{1}{2}$	6	3
1	8	8
$1\frac{1}{2}$	9	$13\frac{1}{2}$
2	12	24
$2\frac{1}{2}$	7	$17\frac{1}{2}$
3	4	12
dy	$\sum f_i = 50$	$\sum f_i x_i = 75$

$$\text{vklr} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$$

$$\text{vklr} = \frac{75}{50} \text{ ?kV}$$

$$= 1 \text{ ?k.Vk } 50 \text{ feuV}$$

;fn i{k.kk $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots\ldots\ldots x_n$ dh ckjEckjrk, Øe'k% $f_1, f_2, f_3, \ldots\ldots\ldots\ldots f_n$ gk rk bldk vFk g fd i{k.k x_1, f_1 ckj vkrk g] i{k.k x_2, f_2 ckj vkrk g] bR;kfnA t l bl mnkgj.k e ifrfnu vk l ru 0 ?kVk [kyu okyh 4 yMfd;k g vkj vk l ru 1@2 ?kVk [kyu okyh 6 yMfd;k g rk $x_1 = 0, f_1 = 4$ vkj $x_2 = \frac{1}{2}, f_2 = 6$ gkxkA

vc l Hkh i{k.kk vkj ckjEckjrk d x.kuQy (fx) d ekuk dk

;kx $= f_1x_1 + f_2x_2 + ... + f_nx_n$ g rFkk

i{k.kk dh dy l [;k $= f_1 + f_2 + ... + f_n$ gA

ek/; fudkyu d fy, ge bl ;kx dk ckjEckjrk d ;kx l Hkkx nxA bl idkj ek/; gvk&

ek/; ¼vdxf.krh; vk l r½ $= \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$ tgk i dk eku 1 l n rd gkxkA

tkM dk l f{klr e ,d ;ukuh v{kj $\sum$ ¼f l Xek½ l 0;Dr djr gA ;g tkM dk n'kkrk gA blfy, ckjEckjrk d tkM dk $\sum f_i$ vkj i{k.kk ,o ckjEckjrk d x.kuQy d ;kx dk $\sum f_i x_i$ l n'kk;k gA

bldk vFk ;g gvk fd 1 ?kVk 50 feuV dk vk l r le; iR;d yMdh dk gj jkt [kyu d fy, feyrk gA vc ckdh vkdMk d l kFk bl vk l r dh ryuk djr gA

D;k vki crk l dr g fd fdruh yMfd;k vk l r ?kVk l vf/kd ?kV [kyrh g vkj fdruh yMfd;k de\ vki n[k l dr g fd vk l r l de le; [kyu okyh yMfd;k dh l [;k 27 g rFkk vk l r l T;knk [kyu okyh 23 gA

bl idkj tc ge cM ieku ij vkdMk dk v/;;u djr g rc mUg 0;ofLFkr dju e vk l r gekjh enn djrk gA t l mijkDr mnkgj.kk e yMfd;k d [kyu dk vk l r le; ;k nkMu dh vk l r xfrA

djd n[k

1- fiNy mnkgj.k e iLrr d{kk d 50 Nk=k dh ÅPkkb dk vkl r Kkr dhft ,A viuh Åpkb d lkFk mldh ryuk dhft ,A

2- rkfydk&2 e iLrr d{kk d 50 Nk=k dh nkMu dh xfr dk vkl r fudkfy,A bl vkl r l vki D;k&D;k fu"d"k fudky ldr g\

mijkDr mnkgj.kk e vkiu fn, x, i{k.kk dk vkl r fudkyuk l h[kk ijUr ;fn vkl r igy l fn;k x;k gk rk D;k vKkr i{k.kk dk Kkr fd;k tk ldrk gA

uhp fn, x, mnkgj.k dk nf[k,&

mnkgj.k&3- uhp fn, x, i{k.kk dk vkl r 36 gA vKkr i{k.k (f) Kkr dhft ,A
25] 39] 35] f] 46

gy& vki tkur g fd&

$$\text{vkl r} = \frac{25+39+35+f+46}{5}$$

$$\text{vkl r} = \frac{145+f}{5}$$

vkl r dk eku j[ku ij

$$36 = \frac{145+f}{5}$$

$$36 \times 5 = 145 + f$$
$$180 = 145 + f$$
$$180 - 145 = f$$
$$35 = f$$

vr% f dk eku 35 gvkA bl idkj lHkh i{k.k 25] 39] 35] 35] 46 g,A

mnkgj.k&4- uhp nh xb rkfydk d vkdMk dh enn l Nk=k dh vkl r Åpkb Kkr dhft ,A

Åpkb ¼ l eh-e½	158	159	160	161	162	163
Nk=k dh l [;k	7	10	13	8	4	5

gy%& ge irk g fd ek/; ¼vdxf.krh; vk l r½

• Åpkb¼ l eh-e½(x_i)	Nk=k dh l [;k(f_i)	($f_i x_i$)
158	7	1106
159	10	1590
160	13	2080
161	8	1288
162	4	648
163	5	815
	$\sum f_i = 47$	$\sum f_i x_i = 7527$

vr% vdxf.krh; vk l r $= \dfrac{7527}{47}$

¾ 160-15 l eh-

;kuh Nk=k dh vk l ru Åpkb 160-15 l eh- gA

djd n[k

1- igyh 15 ikÑr l [;kvk dk vk l r Kkr dhft ,A

2- ekp&vi y] 2010 d nkjku Hkou'oj ¼mMh l k½ e iVky d nke ¼: i ; e½ uhp fn, x, gA budk vk l r Kkr dhft ,A

61-28] 62-08] 59-35] 56-28] 59-28

3- ,d jkT; e 8 o"kk e g, pkoy mRiknu ¼yk[k Vu½ d vkdM fuEufyf[kr gA bu vkdMk dk vk l r Kkr dhft ,A

84-98] 93]34] 71-82] 88-53] 83-13] 91-79] 93-36] 96-69

vk l r ge D;k crkrh g\

geu n[kk fd vk l r l ge ,d vk/kkj fey tkrk g tk ij vkdMk dk ifrfuf/kRo djrk gA ijUr D;k vdxf.krh; vk l r vkdMk dk ijk inf'kr ugh dj ikrhA

uhp fn, x, dFkuk dk if<,%&

1- b l l ky Qjojh ekg e fnu dk vk l r rkieku 23°C FkkA

2- fiNy ikp o"kk e iVky d ifr yhVj nke dk vk l r 65-70 #i ; jgkA

3- n l oh d{kk d fo|kfFk;k dh vk l r vk; yxHkx 15 o"k gA

vkiu vDl j ,l dFkuk dk i<k gkxk vkj l uk Hkh gkxkA ,d eghu vFkok fnu dk vk l r rkieku] iVky dk vk l r nke vkfn d eku l ge dN ckr l e> l dr g vkj dN fu"d"k fudky l dr gA fdUr db ckr vk l r l irk ugh pyrhA t l &

dFku&1 e] ij eghu rkieku dHkh 23°C l vf/kd vkj rk dHkh mll de jgk gkxkA vkl r ge ;g ugh crkrk fd rkieku fdruk&fdruk FkkA vf/kd l vf/kd fdruk o de l de fdruk A D;k rkieku e cgr mrkj&p<ko gvk ;k og yxHkx ,d tl k gh FkkA

dFku&2 e Hkh] iVky d nke le;≤ ij cnyr jg gkxA iR;d o"k vkl r nke 65-70 :i; ugh jgk gkxkA bl l ge ;g ugh crk ldr fd vkt iVky dk nke D;k g\ fQj Hkh vkl r l ge ;g vnktk yxk ik ldr g fd iVky dk nke ifr yhVj 64 #i; l 66 #i; d bn&fxn gh jgk gkxk vxj ge ;g irk gk fd vdlj iVky d nkek e vpkud mrkj&p<ko ugh gkrk gA

dFku&3 e] dN fo|kfFk;k dh vk; 15 l de gkxh rFkk dN dh vf/kd gkxhA bl l ge vkj vf/kd tkudkjh ugh feyrhA

vkb,] vkl r dk ,d mnkgj.k vkj n[kr g&

mnkgj.k&5- uhp rkfydk e lkr depkfj;k d oru d vkdM fn, g, g&

1400	1500	8400	8700	9000	9200	9400

bu vkdMk dk vkl r fudkydj nf[k,&

vki tkur g] vkl r ¾ $\dfrac{1400+1500+8400+8700+9000+9200+9400}{7}$

¾ $\dfrac{47600}{7} = 6800$:i;

vkdMk dk vkl r oru 6800 :i; gA

ij D;k vkl r bu vkdMk d dUn dk lgh :i l iLrr dj ik jgk g\ dkb Hkh vkdMk vkl r d djhc ugh gA bl vkl r l ge ;g rk irk dj ldr g fd gj eghu dy fdruk [kpk oru ij gkrk g] fdUr ;g ugh fd ,d depkjh dk yxHkx fdruk oru feyrk g\

vki n[k ldr g fd bu vkdMk dk xf.krh; vkl r ge vkdMk d forj.k dk le>u e enn ugh dj ik jgk gA

ekf/;dk

tc i{k.kk d eku ,d&nlj l cgr vUrj ij gkr g] rc ek/; l ge lHkh db vFki.k fu"d"k ugh fudky ikrA ;gk ge ,d u, l[;kRed ifrfuf/k dk mi;kx djx ftl ekf/;dk dgr gA ekf/;dk og vkdMk g tk 0;ofLFkr i{k.kk e vk, ekuk d Bhd chp e gkrk gA

FU5T15

vkb, ,d mnkgj.k l ekf/;dk dk le>rs g vkj fQj mlds mi;kfxrk n[krs gSA

mnkgj.k 5 d oru vkdMk dk nf[k,&

1400] 1500] 8400] 8700] 9000] 9200] 9400

bu vkdMk dh ekf/;dk D;k g\ vkdMk e dy lkr in g ftle l pkFkk in e/; in gA blfy, bu vkdMk dh ekf/;dk 8700 gA vkdMk d i{k.kk dk e/; in gh ge ekf/;dk nrk gA db ckj ekf/;dk vkdMk dk cgrj ifrfuf/kRo djrk g D;kfd ekf/;dk ij cgr cM ,o cgr NkV i{k.kk dk vlj ugh iMrkA

djd n[k

fuEufyf[kr vkdMk dh ekf/;dk Kkr dhft,&

1- 25] 21] 23] 18] 20] 23] 24

2- 113] 102] 95] 85] 110] 109] 106]110] 115

vkb,] ekf/;dk d dN vkj egRoi.k mi;kx le>r gA

mnkgj.k&6- fdlh n¶rj e 10 ink ij fu;fDr d fy, 21 0;fDr;k u bVj0; fn;kA bVj0; e mUg dy 50 vdk e l fuEufyf[kr vd iklr g,&

25] 23] 45] 40] 42] 38] 32] 43] 47] 36] 28] 37] 35] 34] 42] 21] 27] 18] 39] 41] 40

bue l 10 0;fDr;k dk ukdjh d fy, puk tkuk gA

blds fy, D;k fd;k tk,\

ge tkur g fd 21 e l lokf/kd vd iklr djus oky 10 0;fDr;k dk puk tk,xkA bl ifØ;k dk ljy cuku d fy, vkdMk dk c<r Øe e 0;ofLFkr fd;k tk ldrk g tk fd bl idkj gkxk&

18] 21] 23] 25] 27] 28] 32] 34] 35] 36] 37] 38] 39] 40] 40] 41] 42] 42] 43] 45] 47

bu vkdMk e ekf/;dk 11 ok in ;kuh 37 g tk fd 'k: d 10 0;fDr;k rFkk vkf[kj d 10 0;fDr;k d chp e gA vr% ukdjh d fy, 37 l vf/kd vdk oky 0;fDr;k dk puko fd;k tk;xkA ;gk 37 vkdMk dh ekf/;dk gA

vFkkr ;fn i{k.kk dh dy l[;k n gk]

rk i{k.kk dk $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ ok in gh ekf/;dk gkxhA

vki n[k ldr g fd mnkgj.k&4 vkj mnkgj.k&5 e dy i{k.kk dh l[;k fo"ke l[;k, gA mijkDr rjhd l dy i{k.kk dh l[;k fo"ke gku ij ekf/;dk vklkuh l Kkr dj ldr gA ijUrq ;fn i{k.kk dh dy l[;k le gk rk ekf/;dk dk dl irk djx\ bl le>u d fy, ,d mnkgj.k n[kr g&

mnkgj.k%&7- 10 fo|kfFk;k dh Åpkb ¼lseh-e½ fuEufyf[kr g&

117] 106] 123] 110] 125] 112] 115] 102] 100] 115

bu vkdMk dh ekf/;dk Kkr dhft,A

gy%& ekf/;dk Kkr djus d fy, vkdMk dk lcl igys c<rs g, Øe e j[kuk gkxkA

100] 102] 106] 110] 112] 115] 115] 117] 123] 125

;gk i{k.kk dh l[;k le g blfy, u gh ikpok in i{k.kk d fcYdy e/; g vkj u gh NBk inA i{k.kk dk e/;in ;kuh ekf/;dk ikpo vkj NB in d e/; e g vr% ,lh ifjfLFkfr e i{k.kk d e/; e iMu oky nkuk in dk vkSlr gh ekf/;dk gkrh gA bl mnkgj.k e] ikpok in ¾ 112 lseh-

NBk in ¾ 115 lseh-

$$\text{ekf/;dk} = \frac{\text{ikpok in} + \text{NBk in}}{2}$$

$$= \frac{112+115}{2} = 113\text{-}5 \text{ lseh-}$$

bu vkdMk dh ekf/;dk 113-5 lseh- gA

;kuh tc i{k.kk dh dy l[;k le gk rc ekf/;dk dk ,l le>k tk ldrk g&

$$\text{ekf/;dk} = \frac{\left(\frac{n}{2}\right)\text{ok in} + \left(\frac{n}{2}+1\right)\text{ok in}}{2}$$

vHkh rd geu fn, g, i{k.kk dh ekf/;dk fudkyhA vc nh gb ekf/;dk dk i;kx dj vKkr i{k.kk dk eku irk djxA

mnkgj.k%&8- vkjkgh Øe e 0;ofLFkr vkdMk 7] 10] 12] p] q] 27] 31 dh ekf/;dk 17 gA ;fn bl ,d vkj i{k.k 40 tkM fn;k tk,] rk ekf/;dk 18 gk tkrh gA p rFkk q dk eku Kkr dhft,A

gy%& vki tkur g fd ekf/;dk lno i{k.kk d e/; in dk eku gkrh gA

i{k.kk 7] 10] 12] p] q] 27] 31 e ekf/;dk pkFkk in gA ;kuh $p = 17$

vc ;fn ,d vkj i{k.k 40 bl tkM fn;k tk,] rk i{k.k gkx 7] 10] 12] p] q] 27] 31] 40 vc pfd i{k.kk dh l[;k le gk xb g vr%

$$\text{ub ekf/;dk} = \frac{\left(\frac{n}{2}\right)\text{ok in} + \left(\frac{n}{2}+1\right)\text{ok in}}{2}$$

$$18 = \frac{p+q}{2}$$

$$18 = \frac{17+q}{2}$$

$$36 = 17 + q$$

$$19 = q$$

vr% p vkj q d eku Øe'k% 17 rFkk 19 gA

cgyd

FUEP2S

vkiu vk¡dM+ksa ds fy, ,d ekè; dk irk yxkus dh fofèk] ekè; dh vis{kk ls ,d vkSj ekid ^cgyd* gA cgyd i{k.kk e lcl vf/kd ckj vk;k i{k.k gkrk g A mnkgj.k d fy, fdlh ijh{kk e d{kk 10 d 20 fo|kfFk;k d xf.kr fo"k; d iklrkd fuEufyf[kr Fk%&

40] 25] 40] 35] 36] 45] 45] 40] 35] 39] 41] 42] 40] 25] 40] 42] 35] 38] 40

bu vkdMk e ge n[kr g fd 40 vd iku oky fo|kfFk;k dh l[;k lcl vf/kd 6 g ;kuh cgyd 40 gvkA

vkb, ,d vU; mnkgj.k l cgyd dk le>&

mnkgj.k&9- ,d ndkunkj viuh ndku ij fdlh fo'k"k dEiuh d ikp vyx&vyx uEcj ¼6] 7] 8] 9] 10½ d tr cprk gA rhu eghu e gb fcØh d vkdM bl idkj g&

tr dk uEcj	6	7	8	9	10
cp x, trk dh l[;k	18	24	41	19	9

rhu eghu e ndkunkj u n[kk fd dkQh tr fcd pd gA vc ndkunkj dk trk d [kkyh g, LVkd dk Hkjuk gA D;k og vklr ;k ekf/;dk Kkr djd ;g fu.k; y ik,xk fd ml dku&l uEcj d tr tYnh l tYnh dEiuh l exoku gkx\ ;g ge vklr o ekf/;dk l irk ugh dj ldrA ml ml eki d tr exoku pkfg, tk lcl T;knk fcdr gkA

mijkDr fjdkM dk n[kdj ndkunkj 8 uEcj d tr dEiuh l exoku dk fu.k; yrk gA og vU; uEcj d trk d LVkd dk mud de [kjhnkjk dk n[kr g, dN le; d fy, Vky nrk gA vki n[k ldr g fd ^8* uEcj d tr dh ekx lcl vf/kd g D;kfd budh fcØh lcl T;knk gbi gA

vr% ;gk cgyd 8 gA

djd n[k

fuEufyf[kr vkdMk dk cgyd Kkr dhft,A

1- 25] 9] 69] 34] 70] 36] 90] 70] 56] 70] 71

2- 56] 39] 94] 36] 39] 15] 39] 40

i'ukoyh&1

1- fuEufyf[kr lokyk d gy [kkstu d fy, vki lekrj ek/; rFkk ekf/;dk e l fdldk i;kx djx vkj fdle bue l dkbZ Hkh dke ugh vk,xk\

(i) jkT; e lcl vf/kd ykdfi; v[kckj dku&lk g\

(ii) ,d eghu e gbZ vkSlr o"kkZ fdruh g\

(iii) fdlh ijh{kk e 100 fo|kfFk;k u Hkkx fy;kA bu fo|kfFk;k e l vdk d vk/kkj ij lcl cgrj in'ku dju oky 50 fo|kFkh dku&l g\

(iv) tuojh d eghu e iVky dk vkSlr nke fdruk jgk\

(v) dku&l f[kykMh u vrjk"Vh; fØdV e vHkh rd lcl T;knk fodV fy, g\

(vi) nkor e cyk, x, 20 O;fDr;k d fy, fdruh pikfr;k dh vko';drk iMxh] ;g r; dju d fy,A

(vii) fdl eghu e T;knk ckfj'k gkrh g\

2- 10 eghuk e gbZ o"kkZ ¼feeh-½ d vkdM fuEufyf[kr g&

243.50,	266.00,	347.70,	240.00,	325.20,
264.80,	356.30,	211.60,	246.90,	282.70

bu vkdMk l vkSlr o"kkZ Kkr dhft,A

3- lcl igyh 10 le l[;k,¡ dku&lh g\ budk vkSlr Kkr dhft,A

4- ikp vyx&vyx 'kgjk e pkoy d nke dk vkSlr Kkr dhft,&

'kgj	A	B	C	D	E
nke ¼#i; e½	25	28	30	31	32

5- rkfydk e vrjk"Vh; [kyk ¼vkyfid½ e vf/kdre Åph dn d vkdM fn, g, gA bu vkdMk dk vkSlr] cgyd rFkk ekf/;dk Kkr dhft,A

o"k	1960	1964	1968	1972	1976	1980	1984	1988	1992	1996	2000	2004
Åpkb ¼ehVj e½	1-85	1-90	1-82	1-92	1-93	1-97	2-02	2-03	2-02	2-05	2-01	2-06

6- vkB fo|kfFk;k dk Hkkj ¼fdykxke e½ bl idkj g&

30] 32] 33] 38] 37] 41] 35] 40

fo|kfFk;k dk vklr Hkkj Kkr dhft,A

7- yxkrkj ikp o"kk e fdlh Ldy e fo|kfFk;k dh l[;k fuEufyf[kr g&

1150] 1250] 1360] 1275] 1310

bu ikp o"kk e Ldy e vklru fdru fo|kFkh FkA

vdxf.krh; vklr] ekf/;dk vkj cgyd dh lhek,

vkdMk dk le>u d fy, ,d ifrfuf/k eku vdxf.krh; vklr ;kuh ek/; gA geu n[kk ;g vkdMk d ckj e ge cgr dN crkrk g] yfdu bl l dN ckr Li"V ugh gk ikrh vkj bl vk[k endj bLreky dju l xMcM gk ldrh gA tl ?kj dk njok tk ?kj e jgu oky cMk o cPPkk dh Åpkb dk vklr ydj ugh cuk;k tk ldrk vkj u gh bl vk/kkj ij fd T;knk yxk fdl Åpkb d gA

tlk fd geu n[kk fd bld vykok ekf/;dk vkj cgyd Hkh db i'uk dk tokc ugh crk ikrA ;g vkdMk dk le>u e T;knk ennxkj gkr g fdUr bUg Hkh /;ku l mi;kx djuk gkrk gA db fof'k"V ckr bue ugh fn[krhA

oxhdr vkdMk e dUnh; iofÙk d ekid

T;knkrj fLFkfr;k e i{k.kk dh l[;k bruh vf/kd gkrh g fd mudk Bhd rjg l i<u vkj fu"d"k fudkyu d fy, ge mUg legk e ckVdj ¼oxhdr djd½ NkVk dju dh t:jr gkrh gA vrh tc ge voxhdr vkdMk dk oxhdr vkdMk e cny nr g] rc ge bUg i<u ,o fu"d"k fudkyu d fy, ek/;] ekf/;dk vkj cgyd irk dju gkxA

mnkgj.k 13 e 10 d ox vrjky cukdj oxhdr vkdM fn, gA ;kn j[k fd ox vrjkyk dh ckjEckjrk, fuf'pr djr le; fdlh Åijh ox lhek e vku oky i{k.k vxy ox vrjky e yr gA tl& ftl o"k 50 yk[k Vu pkoy dk mRiknu gvk g] og 40&50 ox vrjky e u gkdj 50&60 ox vrjky e gkxkA geu n[kk fd voxhdr vkdMk dk ek/; fudkyu d fy, ge fn, x, i{k.kk dk tkM fudkyr gA yfdu oxhdr vkdMk d fy, ge D;k djx \ mlus oxi e l dku&lk eku y]dku&lh l[;k pu\ D;k 40&50 d ox d fy, 40 y vFkok 50 ;k dkb vkj\

vr% ;gk ge ,d ,lh l[;k pkfg, tk lHkh ox vrjkyk dk ifrfuf/kRo djA ge ;g eku yr g fd ij ox vrjky dh ckjEckjrk e/; fcUn d pkjk vkj dfUnr gkrh g] vkj gj ox vrjky dk e/; fcUn ml ox dk ifrfuf/k gA bl e/; fcUn (Mid Point) dk ox irhd (Class Mark) Hkh dgr gA

mnkgj.k&10- ,d mPprj ek/;fed 'kkyk d NkV& cM cPpk d otu d vkdM uhp fn, x, g] bl dk lekrj ek/; irk djA

otu ¼fdxk e½	30&40	40&50	50&60	60&70	70&80
cPpk dh l[;k	11	29	6	3	1

gy%& e/; fcUn Kkr dju d fy, ge ox lhek dk mi;kx djuk gkrk gA e/; fcUn] ox dh fuEu lhek rFkk mPp lhek dk vkSlr gkrk gA igy ge e/; fcn fudkyxA ox ¼30&40½ dk e/; fcUn n[k rk og 35 gkxk] ;kuh

$$\text{e/; fcUn} = \frac{\text{fuEu ox lhek \$ mPp ox lhek}}{2} = \frac{30+40}{2} = 35$$

e/; fcUn dk ge x_i }kjk n'kkr gA igyk e/; fcUn $x_1 = 35$

blh idkj ge ckdh oxk d e/; fcUn Kkr dj ldr g tk fd Øe'k% 45] 55] 65 vkj 75 gkxA vc iR;d e/; fcUn dk iR;d ox dh ckjEckjrk l x.kk dj bldk mi;kx ek/; Kkr dju d fy, djxA ub rkfydk bl idkj cuxh&

otu ¼fdxk-½	o"kk dh l[;k (f_i)	e/; fcUn (x_i)	$(f_i x_i)$
30&40	11	35	385
40&50	29	45	1305
50&60	6	55	---------
60&70	3	65	---------
70&80	1	75	---------
;kx	**50**		**2290**

rkfydk dk ijk dhft,A

vr% ge ikr g fd Åij cuh rkfydk e $f_i x_i$ dk ;kx ;kuh $\sum f_i x_i = 2290$ gA vr% fn, g, vkdMk dk ek/; $\bar{X}$ gkxk %

$$\bar{X} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{2290}{50} = 45.8 \text{ fdxk-}$$

;kuh vkSlru otu ifr cPpk 45-8 fdxk- gA

oxhZÑr vkdMk dk cgyd

Åij geu ;g irk yxk;k fd vkSlru cPPkk dk otu D;k gA ;fn ge ;g tkuuk pkgr g fd dku&lk otu lcl T;knk cPpk dk g] rk ge bu vkdMk dk cgyd irk djuk gkxkA

vki ;g tkur g fd cgyd fn, x, vkdMk e l og eku gkrk g tk lcl vf/kd ckj nkgjk;k x;k gkrk gA oxhZÑr vkdMk e ge lcl igy cgyd ox dh igpku djr gA bu vkdMk e ox ¼40&50½ dh vkofÙk lcl vf/kd g vr% ;g cgyd ox g A ge bll ;g irk py ikrk g fd vkdMk dk cgyd blh ox vrjky d chp ek tn gA bl idkj dh fLFkfr e cgyd l= e eku j[kdj Kkr dj yr gA

f_1 vkj f_0 e ftruk vf/kd vrj gkxk cgyd l l mruk gh cMk gkxkA blh rjg f_2 vkj f_1 e ftruk de vrj gkxk cgyd l l mruk gh cMk gkxk vkj $l+d$ d djhc gkxkA vxj ;g lkp fd cgyd dk vf/kdre eku fdruk gk ldrk g rk ge ;g n[kx fd bldk vf/kdre eku l rFkk f_1 o f_0 ;k f_2 o f_1 d vrj d d ;kx d cjkcj gkxkA ;kuh cgyd l vkj $l+d$ d chp gkxkA

cgyd Kkr dju dk l=&

$$\text{cgyd} = l + \left[\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \right] \times h$$

bl l= e&

l = cgyd ox dh fuEu lhek

f_0 = cgyd ox l Bhd igy dh ckjEckjrk

f_1 = cgyd ox dh ckjEckjrk

f_2 = cgyd ox d Bhd ckn dh ckjEckjrk

h = ox vrjky dh eki

mnkgj.k&11- mnkgj.k 10 dh rkfydk e cgyd ox ¾ 40&50] cgyd ox dh fuEu lhek ¼l½ ¾ 40

cgyd ox dh ckjEckjrk ¼f_1½ ¾ 29

cgyd ox l Bhd igy dh ckjEckjrk ¼f_0½ ¾ 11

cgyd ox l Bhd ckn dh ckjEckjrk ¼f_2½ ¾ 6

ox eki ¼h½ ¾ 10

l= e bu ekuk dk j[ku ij

cgyd $= 40 + \left[\frac{29-11}{2(29)-11-6}\right] \times 10$

$= 40 + \left[\frac{18}{58-17}\right] \times 10 = 40 + \frac{18}{41} \times 10$

$= 44.39$ fdxk-

;g $l+d$ d djhc g D;kfd f_0 cMk o f_2 NkVk gA

bl idkj oxhÑr vkdMk dk cgyd Kkr fd;k tkrkA ;g cgyd d vkdMk d djhc gA

oxhÑr vkdMk dh ekf/;dk

mnkgj.k&12- fdlh Ldwy e nloh d{kk dh yMfd;k dh Åpkb bl idkj nh xb g&

Åpkb ¼l eh-½	135&140	140&145	145&150	150&155	155&160
yMfd;k dh l[;k	1	2	11	9	7

bu vkdMk dh ekf/;dk Kkr dhft,A

gy& fn, x, vkdMk dh ekf/;dk fudkyu d fy, vkofÙk l lp;h vkofÙk fudkyuh gkxhA ¼vki d{kk&9 e lp;h vkofÙk fudkyuk lh[k pd g½

Åpkb	yMfd;k dh l[;k ¼lp;h ckjEckjrk½
140 l de	1
145 l de	1 $ 2 ¾ 3
150 l de	3 $ 11 ¾ 14
155 l de	14 $ 9 ¾ 23
160 l de	23 $ 7 ¾ 30

;g ^l de* idkj dk lp;h ckjEckjrk cVu g tgk 140] 145]150]155]160 ox dh Åijh lhek, gA

ge tkur g fd fn, x, oxhdr vkdMk d e/; dk i{k.k fdlh ox vrjky e fLFkr gkxkA og ox vrjky dl irk dj ftle e/; i{k.k fLFkr g \

Åpkbl	yMfd;k dh l[;k (f)	lp;h ckjEckjrk (cf)
135&140	1	1
140&145	2	3
145&150	11	14
150&155	9	23
155&160	7	30

bl ekf/;dk ox (Median Class) dk fudkyu d fy, ge lHkh oxk dh lp;h ckjEckjrk, vkj $\frac{n}{2}$ Kkr djr gA vc ge og ox [kkt r g ftldh lp;h ckjEckjrk $\frac{n}{2}$ l vf/kd ;k mll fudVre gA ;gk $n = 30$ g ;kuh $\frac{n}{2} = 15$ gvk vc 150&155 gh og ox g ftldh lp;h ckjEckjrk 23 g vFkkr 15 l T;knk g rk 15ok i{k.k ;k ekf/;dk 150&155 ox e gh vk,xkA

vr% 150&155 ekf/;dk ox gA ekf/;dk ox irk dju d ckn ge fuEufyf[kr l= dk i;kx djd ekf/;dk fudky ldr g&

$$\text{ekf/;dk} = l + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf}{f} \right) \times h$$

tgk $l =$ ekf/;dk ox dh fuEu lhek

$n =$ i{k.kk ¼dy vkofÙk½dh l[;k

cf = ekf/;dk ox l Bhd igys okys ox dh lp;h ckjckjrk

f = ekf/;dk ox dh ckjckjrk

h = ox eki ¼;g ekur g, fd ox eki cjkcj g½

vc $\frac{n}{2} = 15$, $l = 150$, $cf = 14$, $f = 9$, $h = 9$

$$\text{ekf/;dk} = 150 + \left(\frac{15-14}{9}\right) \times 5$$

$$= 150 + \frac{5}{9}$$

$$= 150.55 \text{ lseh-}$$

vr% yxHkx vk/kh yMfd;k dh ÅpkbZ 150-55 lseh-l de g vkj 'k"k vk/kh yMfd;k dh ÅpkbZ 150-55 lseh- l vf/kd ;k mld cjkcj gA

blh idkj ge vkdMk dk *l vf/kd* d :i e 0;ofLFkr dj ldr gA ;g rkfydk e fn[kk;k x;k gA blls Hkh db fu"d"k fudky ldr g]tl 150 lseh- l vf/kd 16 yMfd;k dh Åpkb g]vkfnA

Åpkb	yMfd;k dh l[;k
135 l vf/kd ;k mld cjkcj	30
140 l vf/kd ;k mld cjkcj	29
145 l vf/kd ;k mld cjkcj	27
150 l vf/kd ;k mld cjkcj	16
155 l vf/kd ;k mld cjkcj	7

bl rkfydk l vki D;k fu"d"k fudky ldr g\ ppk djd 3 fu"d"k fyf[k,A

: >ku ½ vi ro"k.k vkj cfgo"k.k (Trend:Interpolation and Extrapolation)

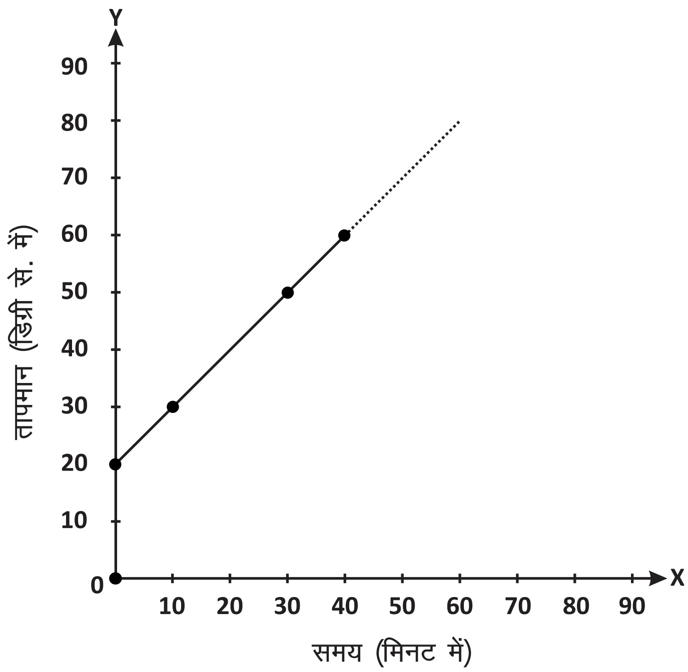
geu n[kk fd vkdMk dk 0;ofLFkr dju vkj mud v/;;u d ckn ge db ckr irk pyrh g fdUr db ckr ge ugh tku ikrA ,d vkj loky ;g g fd gekj ikl ft l vUrjky d vkdM g mld vkx d vkdMk d ckj e D;k ge dN dg ldr g\ ekuk geu ,d 'kgj e dy o"kk d vkdM db o"kk rd Kkr fd,A ble l chp d dN o"kk e dy ckfj'k d vkdM gekj ikl miyC/k ugh g D;kfd bUg bdVBk djuk jg x;k A rk D;k ge budk vueku yxk ldr g vkj ge ;g Hkh loky iN ldr g fd D;k bu vkdMk l ge ;g crk ldr g fd vku oky lky e dy fdruh ckfj'k gkxh\

bu nkuk d ckj e lkpu d fy, ge vkdMk d iVu dk n[kuk gkxkA ;kuh D;k vkdMk e cnyko dk dkb fuf'pr <x g\ D;k mue ge dkb :>ku n[k ldr g\ ge vkx dN mnkgj.kk d ek/;e l bl ij fopkj djx vkj ;g n[kx fd ,lk dc fd;k tk ldrk g vkj dc ughA

eku yhft, fd vki fdlh n0; dk 40 feuV rd xe djr g vkj pkj vyx&vyx le; ij mldk rkieku ukV djr g tk bl rkfydk e fn, gA

le; ¼feuV e½	0	10	30	40
rkieku ¼fMxh lfYl;l e½	20	30	50	60

bu vkdMk dk vky[k e n'kku ij fcn ikIr gkr gA bu fcnvk l tkMrh gb ,d j[kk [khp,A ge dg ldr g fd 'k:vkr e 0 feuV ij rkieku $20^{0}C$]10 feuV ckn $30^{0}C$] 30 feuV ckn $50^{0}C$ vkj 40 feuV ckn $60^{0}C$ ukV fd;k x;k ij D;k ge bu vkdMk dk n[kdj 20 feuV vkj 60 feuV ckn rkieku crk ldr g\ tkfgj g ughA bu vkdMk e flQ 0] 10] 30 vkj 40 feuV ij rkieku fn, gA 20 feuV] vrjky 10&30 d chp vkrk gA ge vky[k dh enn l 20 feuV d lxr rkieku irk dj ldr g tk fd $40^{0}C$ gA ¼vky[k&2½



;gk fn, x, vkdMk e vur ,l vkdM g tk fn, x, vkdMk d vnj vkr g vkj mud lxr rkieku Hkh bl vky[k l crk ldr g] bl vro"k.k dgr gA

/;ku nhft, fd ;gk¡ vkdMk dk ifjlj ¼Range½ 0 & 40 ¼feuV½ rd gA 50 feuV bld ckgj vkrk gA 50 feuV ij rkieku irk djus d fy, ge bl vky[k dh j[kk dk mlh vkj vkx c<k,xA vkx c<ku ij ge 50 feuV ij rkieku 70^0C ikl r gvkA blh idkj vkx c<kb xb j[kk ij vU; lxr rkieku Hkh n'kk; tk ldr gA ;g rjhdk ftle fy, x, vkdMk d :[k dk vkx c<kr g, vkdMk d ifjlj d ckgj d vur eku irk djr g] cfgo"k.k dgr gA ;g ekuk tkrk g fd vkdMk d cnyu dk :[k ¼Trend½ ,d gh g vkj vkdMk d ifjlj d chp o mld ckgj nkuk d fy, mle dkb viR;kf'kr mrkj&p<ko ugh gA

vrio"k.k vkj cfgo"k.k dh lhek,¡

Åij d mnkgj.k e geu vky[k d vk/kkj ij 0 l 40 d chp 20 feuV ij o bl ifjlj l ckgj Hkh 50 feuV dk rkieku crk fn;kA D;k vki ;g crk ldr g fd n0; dk 90 feuV rd xe djr rc rkieku fdruk gkxk\ rkfydk e vki n[kr g fd iR;d 10 feuV e n0; d rki e 10^0C dh c<krjh gk jgh g bl vk/kkj ij ge dg ldr g fd 90 feuV ij rkieku 110^0C gkxkA D;k [ky cruk e xe gk jg ikuh dk rki gk ldrk g\ tkfgj g fd bl xkQ dk :[k /khj&/khj cnyk vkj miyC/k vkdMk d vk/kkj ij ckn d le; dh vkj T;knk ugh fd;k tk ldrkA nljk i'u ;g Hkh g fd D;k vro"k.k ,o cfgo"k.k lHkh vkdMk e fd;k tk ldrk gA D;k fuEufyf[kr vkdMk e Hkh ge ;g dj ldr g\ vkb, n[k&

vkyfid e vf/kdre Åph dn d vkdM fuEukulkj g&

o"k	1960	1964	1972	1976	1980
Åpkb¼ehVj e½	1-85	1-90	1-92	1-93	1-97

bu vkdMk d vk/kkj ij D;k vki crk ik,x fd 1956 e Åph dn dh vf/kdre Åpkb fdruh jgh gkxh\

;g lHko ugh g D;kfd bue dkb :>ku ugh g A ; rk ml ifr;kfxrk e vf/kdre njh d fjdkM fd, x, vkdM gA blh idkj ;fn tul[;k d vkdMk e dkb :>ku ugh g rk bl e Hkh ge vueku ugh yxk ldr fd vkx d o"k e tul[;k fdruh gkxh ;k fn, x, o"kk d chp fdlh o"k e tul[;k fdruh jgh gkxh\ ;kuh vro"k.k ,o cfgo"k.k dh lhek,¡ g tk vkdMk d :i o :[k ij vk/kkfjr gkr g ge iR;d idkj d vkdMk d fy, vro"k.k vkj cfgo"k.k ugh dj ldrA

lkp ,o ppk dj

uhp dh rkfydk e d{kk nloh dh ijh{kk d ifj.kke fn, x, g&

o"k	2001	2002	2003	2005
ifj.kke	88%	80-5%	66%	55%

D;k vki 2004 ,o 2006 d ijh{kk ifj.kke dk vueku yxk ldr g\

xkQ ls vkdM+s fudkyuk

djds n[kks

vki viu Ldwy d vyx&vyx d{kkvk d 40 yM+d ;k yM+fd;k dh me ,o mudh ÅpkbZ ¼lseh-½ dk vkdM+k ,df=r dhft, ,o mu cPpk dh vk;q rFkk mudh vk;okj vkSlr Åpkb d chp xkQ [khfp,A ¼vkdM+ yrs le; /;ku j[ks fd leku vk;q oky cPpk dh la[;k 3 ls 5 vo'; gks½

bl xkQ d vk/kkj ij vki crk,&

1- 15 o"k dh me okyh yM+fd;k dh vkSlr Åpkb fdruh g\

2- 10 o"k dh me okyh yM+fd;k dh vkSlr Åpkb fdruh g\

3- 13 o"k ls ydj 15 o"k rd dh me okyh yM+fd;k dh vkSlr Åpkb e bl nkjku fdruh of) gb\

4- D;k vki irk yxk ldr g fd 14 o"k dh me okyh yM+fd;k dh vkSlr Åpkb fdruh gkxh\ dSl\

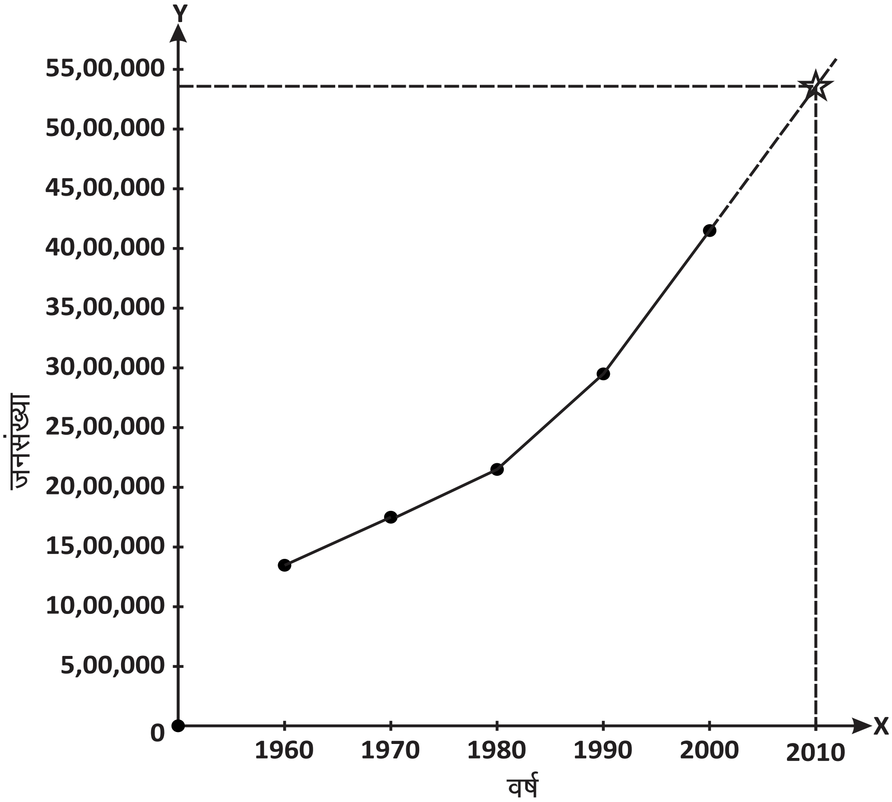
5- 16 o"k dh me okyh yM+fd;k dh vkSlr Åpkb fdruh gkxh\

loky 4 ,o 5 d gy dSl irk fd, tk ldr g\

ldr& X&v{k ij 14 o"k dk n'kkb, vkj mls X&v{k d ycor pydj vky[k dh j[kk d lh/kokyh fcnq ls feykb,A vky[k dh j[kk ij fey fcUnq dk Y&v{k ls feykb,A Y&v{k ij tk eku feyxk og 14 o"k dh me oky cPpk dh vkSlr Åpkb fn[kk,xkA blh idkj vki vkid }kjk fy, x, vkdM+k e ls fdlh Hkh me oky cPpk dh vkSlr Åpkb irk dj ldr gA

6- D;k vki bl xkQ 8 o"k o 20 o"k ij bUgh yM+fd;k dh vkSlr Åpkb irk dj ldr g\ ppk djd fy[kA

mnkgj.k&13- tul[;k d vkdMk l lcfèkr fuEufyf[kr xkQ dk nf[k, rFkk xkQ d vk/kkj ij uhp fy[k lokyk d tokc nhft,A



(i) o"k 1980 e tul[;k fdruh Fkh\

(ii) o"k 1960 l 2000 rd tul[;k e fdruh of) gb\

(iii) o"k 1975 e tul[;k fdruh Fkh\

(iv) o"k 1995 e tul[;k fdruh Fkh\ irk yxkb,A

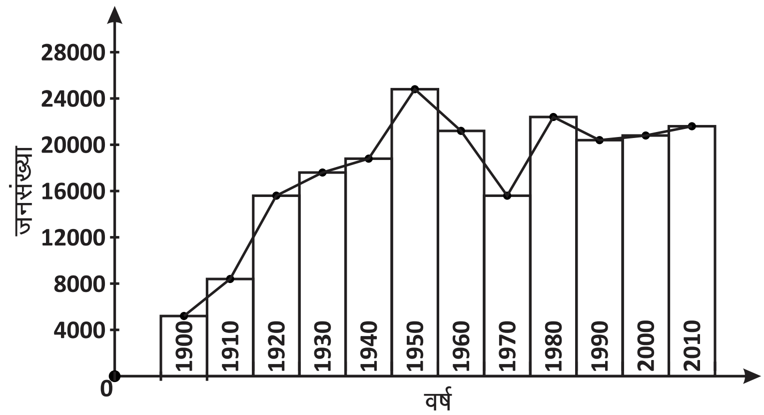
(v) D;k fn, x, vkdMk d vk/kkj ij 2010 dh tul[;k dk vueku yxk;k tk ldrk g\

i'u (i) vkj (ii) d vkdM ge lh/k&lh/k xkQ }kjk fey ldr gA ijr i'u (iii)] (iv) vkj (v) d vkdM ge xkQ }kjk fudkyu gkxA xkQ e inf'kr vkdMk dk ;fn n[k rk mle yxkrkj of) gkrh gb fn[kb iM jgh gA X&v{k ij o"k 1975]1995 vkj 2010 dk n'kku d lkFk&lkFk Y&v{k ij Hkh iekuk 4]500]000 l 5]500]000 rd c<kuk gkxkA vc ;fn xkQ ij Kkr g, fcUnvk dk Y&v{k ij fLFkr lxr fcnvk l feyk,] rk 1975]1995 vkj 2010 dh tul[;k d vuekfur vkdM fey ldr g ¼xkQ& n[k½A bl idkj ge ,df=r vkdMk d vk/kkj ij vuekfur vkdM ikIr dj ldr gA

vuekfur vkdMk d vk/kkj ij oreku e Hkfo"; d fy, ub ;ktuk, cuku e enn gkrh gA tl vuekfur tul[;k d okLrfodrk e cnyu l igy fu;f=r dju dh ;ktuk oreku e gh cuk;h tk ldrh gA

ukV& 2010 d vuekfur vkdM d fy, ;g ekuk x;k g fd tul[;k c<u dk :>ku ogh jgxkA ;g vko';d ugh g fd ,lk gk mlh le; tul[;k c<u dk jkdu d cgr i;kl gk jg FkA mll :>ku ij D;k vlj vk;k dg ugh ldr] blfy, bl rjg dk cfgo"k.k bl le> l gh fd;k tkrk g fd ;g ,d vueku ek= gA

mnkgj.k&14- fdlh n'k dh tul[;k dk fofHkUu o"kk e fuEufyf[kr vky[k }kjk n'kk;k x;k g&



vky[k dk vè;;u dj fuEufyf[kr lokyk d gy [kkft,A

(i) lcl vf/kd tul[;k dku l o"k e Fkh\

(ii) lcl de tul[;k fdruh g\

(iii) dku&dku l o"k ,l g ftle tul[;k e of) gb\

(iv) dku&l o"k ,l g ftle tul[;k e fxjkoV vkb\

(v) ikjEHk d ikp o"kk e tul[;k e yxkrkj of) gb g ;k deh vkb g\

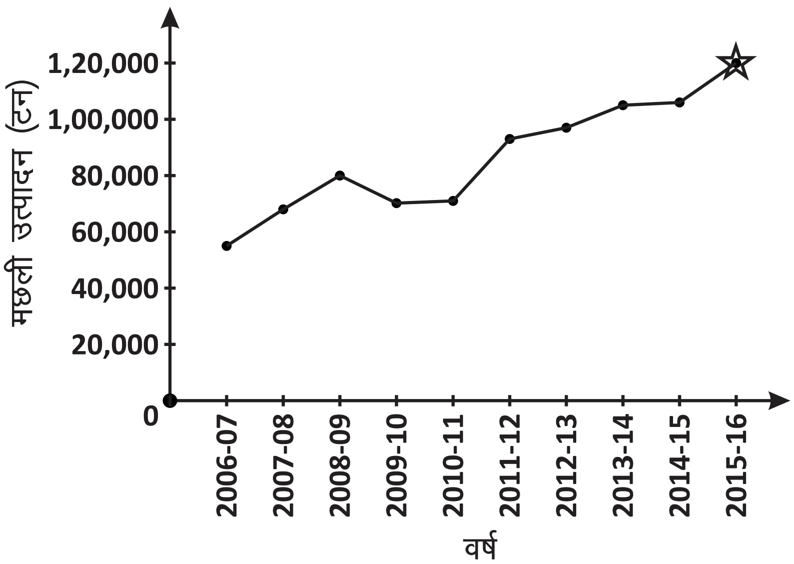
vkb, bu vkdMk ij FkkMk vkj fopkj djr gA

;fn ge o"k 1900 l 0k"k 1950 rd d ikjfEHkd ipkl o"kk d vkdMk dk n[k rk irk pyrk g fd tul[;k e yxkrkj of) gb gA mld ckn d o"kk dh ckr dj rk o"k 1950 l 1970 rd tul[;k e fxjkoV vkb g vkj mld ckn fQj l of) nt dh xbA o"k 1990 l 2010 rd d vkdM Hkh tul[;k e of) fn[kk jg gA

vkiu n[kk fd ckj&ckj tul[;k d vkdMk d cnyu dh fn'kk e db ckj ifjoru vk;kA vyx&vyx le; ij vkdMk e of) rFkk fxjkoV l] vkdMk e ifjoru dh fn'kk db ckj cnyh bl vkdMk dk :>ku dgr gA vkdMk dk :>ku ge vkdMk d ckj e Hkfo"; d iokueku yxku e enn djrk gA vkb,] bl ,d vkj mnkgj.k l le>r g&

mnkgj.k&15 fdlh in'k e eNyh mRiknu l lcf/kr vkdM uhp xkQ }kjk inf'kr fd, x, g&

xkQ dk v/;;u dhft, rFkk fuEufyf[kr lokyk d tokc [kkft,&



(i) o"k 2011&12 e fdruk eNyh mRiknu gvk\

(ii) vf/kdre eNyh mRiknu dku l o"k e gvk\

(iii) D;k eNyh mRiknu e yxkrkj of) fn[kk jgh g\

tc Hkh ge vkdMk dk v/;;u djr g ge vkdMk e cnyko d dkj.kk d ckj e Hkh lkpr g] t l& mijkDr mnkgj.k e eNyh mRiknu e of) gku d D;k dkj.k gA

o"k 2007 e mlh in'k dh ljdkj u ^eRL; fe=* uked ;ktuk dh igy dh ftl e eRL; foHkkx u lenk; dk lkFk e tkMdj eNyh ikyu dk ikRlkfgr fd;kA vc in'k foHkkx d lkFk gtkjk dh l[;k e lenk; d ykx g tk foHkkx dk eNyh ikyu d fy, vudy LFkku [kktu e enn djr g lkFk gh eNyh mRiknu l lcf/kr egRoi.k vkdM nt dju e Hkh Hkfedk fuHkkr gA

eNyh mRiknu e lenk; dk lfØ; :i l tkM yu d dkj.k in'k }kjk fd, x, mRiknu e yxkrkj of) gbA fiNy vkdMk d vk/kkj ij cfgo"k.k dju ij ;g vueku yxk;k x;k fd o"k 2015&16 rd eNyh mRiknu 1]20]000 Vu rd igp tk,xkA

FUXG63

iz'ukoyh&2

1- fuEufyf[kr vkdMk dk ek/; Kkr dhft,&

efgyk f'k{kdk dh l[;k ¼%e½	15&25	25&35	35&45	45&55	55&65	65&75	75&85
jkT;k dh l[;k	6	11	7	4	4	2	1

bl rkfydk d vk/kkj ij efgyk f'k{kdk dh l[;k d ckj e 5 fu"d"k fyf[k,A

2- ,dfnolh; vrjk"Vh; epk e cgr l xndkt }kjk fy, x, dy fodVk dh l[;k d vkdM rkfydk e fn, x, gA budk cgyd Kkr dhft,&

fodVk dh l[;k	0&50	50&100	100&150	150&200	200&250	250&300
xndkt dh l[;k	4	5	16	12	3	2

bl rkfydk d vkdMk d ckj e 5 fu"d"k fyf[k,A

3- fuEufyf[kr rkfydk e 35 'kgjk dh lk{kjrk nj ¼ifr'kr e½ d vkdM fn, x, gA bu vkdMk dk ek/; Kkr dhft,&

lk{kjrk nj ¼%e½	45&55	55&65	65&75	75&85	85&95
'kgjk dh l[;k	3	10	11	8	3

bl rkfydk d vkdMk d ckj e 3 fu"d"k fyf[k,

4- fdlh vLirky e ,d lky e Hkrh g, ejhtk d vkdM fuEufyf[kr gA budk ek/; Kkr dhft,&

me ¼o"kk e½	5&15	15&25	25&35	35&45	45&55	55&65
ejhtk dh l[;k	6	11	21	23	14	5

bl rkfydk d vkdMk d ckj e 3 fu"d"k fyf[k,

5- fdlh ijh{kk e fo|kfFk;k d ikIrkd fuEufyf[kr lkj.kh e nh xb g&

ikIrkd	0&10	10&20	20&30	30&40	40&50	50&60
fo|kfFk;k dh l[;k	1	12	24	32	10	5

ikIrkd dh ekf/;dk Kkr dhft,A bl rkfydk d vkdMk d vk/kkj ij 3 fu"d"k fyf[k,A

geu lh[kk

1- LrHk vky[k o rkfydk, vkdMk dk le>u e enn djrh gA

2- fofHkUu ifjfLFkfr;k e fopkjk/khu vkdM gh i{k.k gkr gA

3- vkIr ,d ,lh l[;k g tk vkdMk d ij leg dk x.k crkrh gA

4- vkIr fn, x, i{k.kk d lcl de o lcl vf/kd eku d chp e gh gkrk gA

5- vkdMk d vkIr dk lkf[;dh e lekrj ek/; dgr gA

6- ek/;] ekf/;dk ,o cgyd vkdMk d ifrfuf/k eku gkr gA

7- ekf/;dk og vkdMk g tk 0;ofLFkr i{k.kk e vk, eku d Bhd chp e gkrk gA

8- cgyd o eku gkr g tk fn, x, i{k.kk e lcl vf/kd ckj gkr gA

9- vkdMk e cgr vf/kd vrj gku ij mu vkdMk d ek/; l fudkyk x;k fu"d"k =fVi.k gk ldrk gA

10- 0;fDrxr J.kh e fn, x, vkdMk dh ekf/;dk Kkr dju d fy, vkdMk dk c<r ;k ?kVr Øe e 0;ofLFkr djr gA

11- fn, x, i{k.kk e vf/kdre o U;ure eku d vrj dk ifjlj dgr gA ;g i{k.kk d eku dk Qyko fn[kkrk gA

12- 0;fDrxr J.kh e lekrj ek/; Kkr dju dk l= fuEufyf[kr g&

$$\text{lekrj ek/;} = \frac{\text{i\{k.kk dk ;kx}}{\text{dy i\{k.kk dh l[;k}}}$$

13- vlrr o oxhdr J.kh e lekrj ek/; fudkyu dk l= fuEufyf[kr g&

$$\bar{X} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$$

14- 0;fDrxr J.kh d vkdMk l ekf/;dk Kkr djr le; i{k.kk ¼ink ½ dh l[;k d fo"ke gku ij fuEufyf[kr l= dk i;kx djr g&

$$\text{ekf/;dk} = \left(\frac{n+1}{2}\right) \text{ok in}$$

15- 0;fDrxr J.kh d vkdMk l ekf/;dk Kkr djr le; i{k.kk ¼ink ½dh l[;k d le gku ij fuEufyf[kr l= dk i;kx djr g&

$$\text{ekf/;dk} = \frac{\left(\frac{n}{2}\right)\text{ok in} + \left(\frac{n}{2}+1\right)\text{ok in}}{2}$$

16- oxhZd`r J.kh esa fn, x, vkdMksa dh ekf/;dk dh x.kuk ds fuEufyf[kr lw= dk iz;ksx djrs gS&

$$\text{ekf/;dk} = \ell + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf}{f} \right) \times h$$

17 oxhZd`r J.kh esa fn, x, vkdMksa dk cgqyd Kkr djus ds fy, fuEufyf[kr lw= dk iz;ksx djrs gS&

$$\text{cgqyd} = \ell + \left[\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \right] \times h$$

18- vkys[k dh enn ls vkdMksa ds ifjlj esa ,sls eku Hkh Kkr dj ldrs gSa tks vkdMksa esa ugh fn, x, gSa] vFkZkr~ vUrosZ"k.k dgykrk gSA fdUrq ,sls gj iz"u ds fy, lgh ugha gSA

19- vkys[k esa j[kk ds c<us dh fn'kk o ?kVus dh fn'kk ds vk/kkj ij vkdMksa ds ifjlj ds ckgj ds eku Kkr djuk cfgosZ"k.k dgykrk gSA ;g Hkh vkdMksa esa :>ku Li"V gksus dh fLFkfr esa fd;k tk ldrk gSA

mÙkjekyk&1

1-	¼i½ bues ls dksbZ ugh	¼ii½ lekarj ek/;		¼iii½ ekf/;dk	
	¼iv½ lekarj ek/;	¼v½ cgqyd		¼vi½ lekarj ek/;	
	¼vii½ bues ls dksbZ ugh				
2-	278-47 feeh-	3-	11	4-	29-2 :i;s

5- lekarj ek/; ¾ 1-965 ehVj] ekf/;dk ¾ 1-99] cgqyd ¾ 2-02

6- 35-75 fdyksxzke 7- 1]269 fo|kFkhZ

mÙkjekyk&2

1-	39-71%	2-	136-66	3-	69-42%
4-	ek/; ¾ 35-37]	5-	31-56		